計算科学特論

- 授業の到達目標

1. 種々の事象･現象に対応する数理モデルを知っている
2. 数理モデルに対応する微分方程式の導出過程を知っている
3. 自身の研究課題に対して数理モデルの導出と問題解決の方法を模索することができる

- 授業概要
  理工学や経済分野に現われる現象･事象に対応する微分方程式の導出過程を学び、その数値解法について扱います。

- キーワード
  数値計算、**微分方程式**、計算数学、シミュレーション
- 目的：微分方程式を計算機で解けるようになる
  　　　↑解きたい問題の、
- 微分方程式の分類

  常微分方程式・偏微分方程式
  1階線形、高階非線形、定数係数、斉次方程式
  双曲型、楕円型、放物型…
  →解き方(アルゴリズム)と対応し易い
- 本当は、

  解きたい問題→対応する方程式→どう解くのか

計算科学

- **計算科学（computational science）**
  数学的モデルとその定量的評価法を構築し、計算機を駆使して科学技術上の問題を解決する学問分野である。具体的には、様々な問題への計算機シミュレーションやその他の計算手法の適用を指す。
- 計算機科学（computer science）
  情報と計算の基礎理論、その実装と応用に関する研究分野で、コンピュータグラフィックスのように特定の処理に集中する領域もあれば、計算理論のように数学的な理論に関する領域、計算の実装を試みることに集中する領域、等々目的や方法論の異なる様々な領域の総称と言える。

授業スケジュール

授業時のスライドにあった誤りを修正してあります。

第01回(09/30):熱伝導方程式の導出
第02回(10/07):差分法の基礎
　10/14 体育の日
第03回(10/21):差分法の解法
　10/28 休講.. 岡野出張のため休講
　11/11 学生祭
第04回(11/12):熱伝導方程式の解法.... 火曜日ですが月曜授業です。
第05回(11/18):差分法演習
第06回(11/25):有限要素法の準備
第07回(12/02):有限要素法の基底関数
第08回(12/09):有限要素法とGalerkin法
第09回(12/16):有限要素法の連立方程式
第10回(12/23):有限要素法と変分法
　01/13 成人の日
第11回(01/20):スペクトル法と代用電荷法
第12回(01/27):有限要素法演習
第13回(02/03):代用電荷法演習
第14回(02/10):課題演習
第15回(02/13):まとめ.... 木曜日ですが月曜授業です。

http://comp.cs.ehime-u.ac.jp/~okano/computation/

熱伝導方程式の導出

- 熱素仮説**的**考え方

  出入りする熱によって物質の温度が上下する
- 熱流と比熱

  熱の流入量（流出量）∝温度の上昇（下降）

  比例係数：　比熱（水 1[cal/gK]>水銀0.03）
- フーリエ則

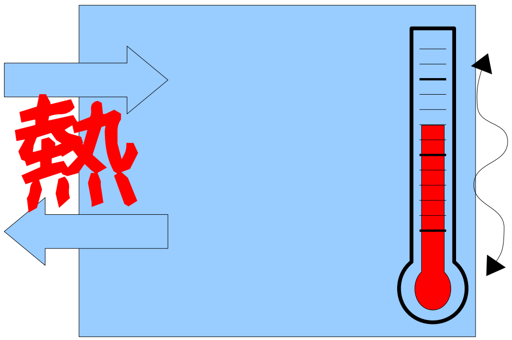
  熱流∝温度勾配

⇒熱伝導方程式　解き方は次回以降

熱素仮説的考え方

- 熱素仮説:
「熱素」粒子が存在して熱素の移動=熱伝導による温度変化が観測される、という考え方
「運動」「仕事」にもとづく「エネルギー」とは異なる
- 熱素仮説的考え方(を採用しましょう)

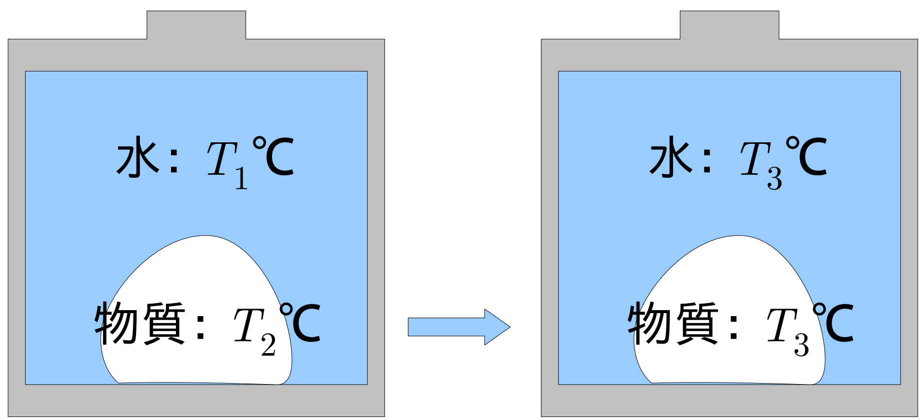
出入りする熱によって物質の温度が上下する



※熱素は物質、エネルギーは物質ではない

熱流と比熱

- 熱流と比熱
  熱の流入量(流出量)∝温度の上昇(下降)
  比例係数:　比熱 (水 1[cal/gK]>水銀0.03)
- 比熱測定(断熱測定法)



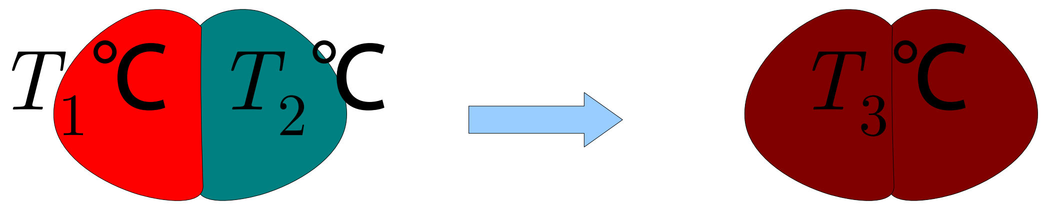
水を出た熱量=物質に入った熱量(熱量保存則)

$$[\textbf{水の比熱}]\times(T_1 - T_3) = [\textbf{物質の比熱}]\times(T_2 - T_3)$$

※熱容量:物質温度を1K上昇させるエネルギー[J/K]

フーリエ則

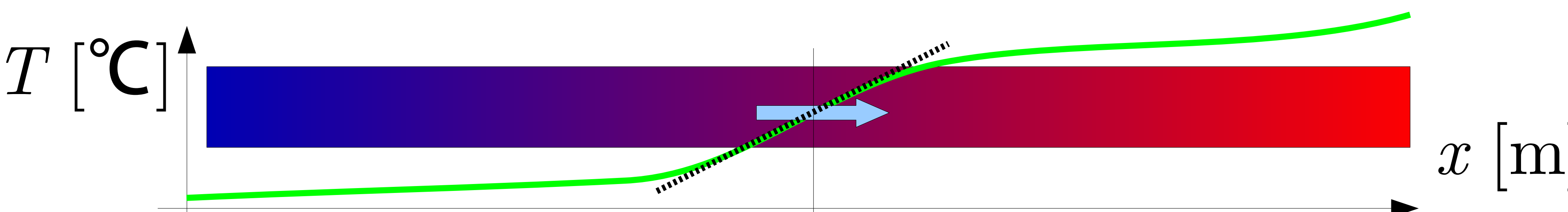
- 熱流:熱の移動量・速度を考える



温度差が大きいほど熱の変化が早い

⇒熱の移動量・速度が速い

- フーリエ則:熱流∝温度勾配



x 点を1秒間に流れる熱量∝$\mathrm{d}T/\mathrm{d}x$

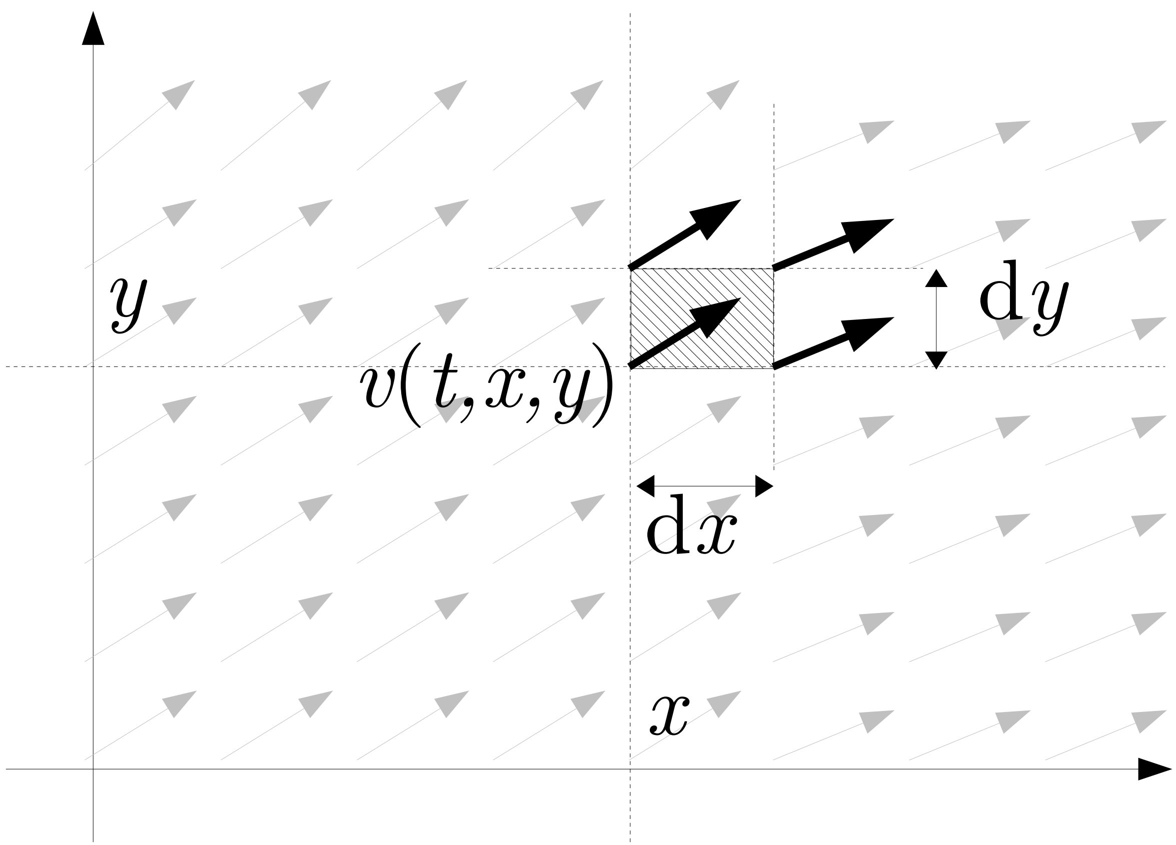
⇒熱流速：$Q = -\lambda\times\mathrm{d}T/\mathrm{d}x$ [cal/sec.]

熱伝導方程式の導出（2次元）

- 熱流と比熱

熱の流入量（流出量）∝温度の上昇（下降）

比例係数：　比熱（水 1[cal/gK]>水銀0.03）



v：単位幅を流れる熱の量で定義

$v\ (t,x,y)=v\ [\mathrm{cal/m{\cdot}s}]$

$\mathrm{d}t[\mathrm{s}]$ に流れる熱

＝$\mathrm{d}t\times s\ \times v\ [\mathrm{cal}]$

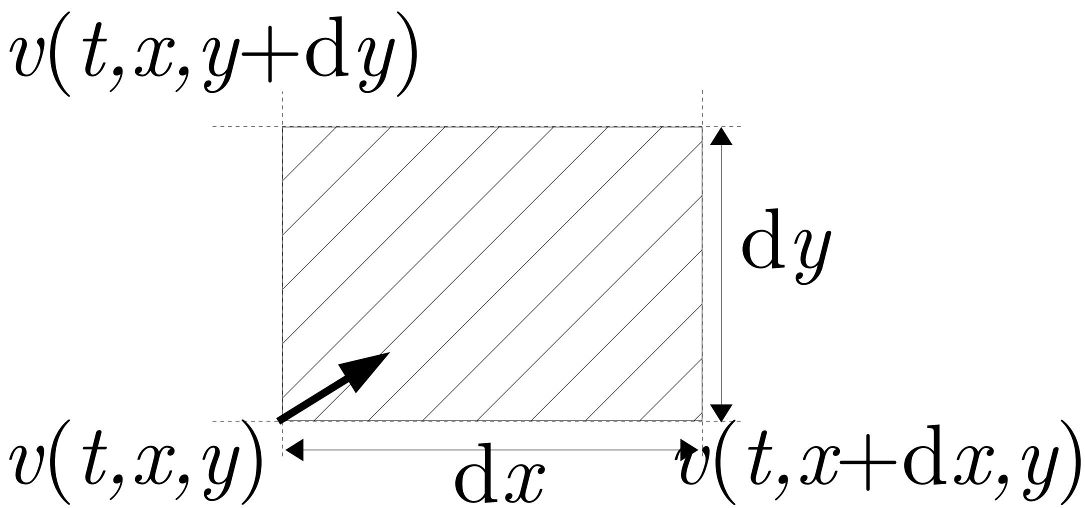
熱伝導方程式の導出(2次元)

- 熱流と比熱

  熱の流入量(流出量)∝温度の上昇(下降)

  比例係数:　比熱 (水 1[cal/gK]>水銀0.03)

v：単位幅を流れる熱の量で定義



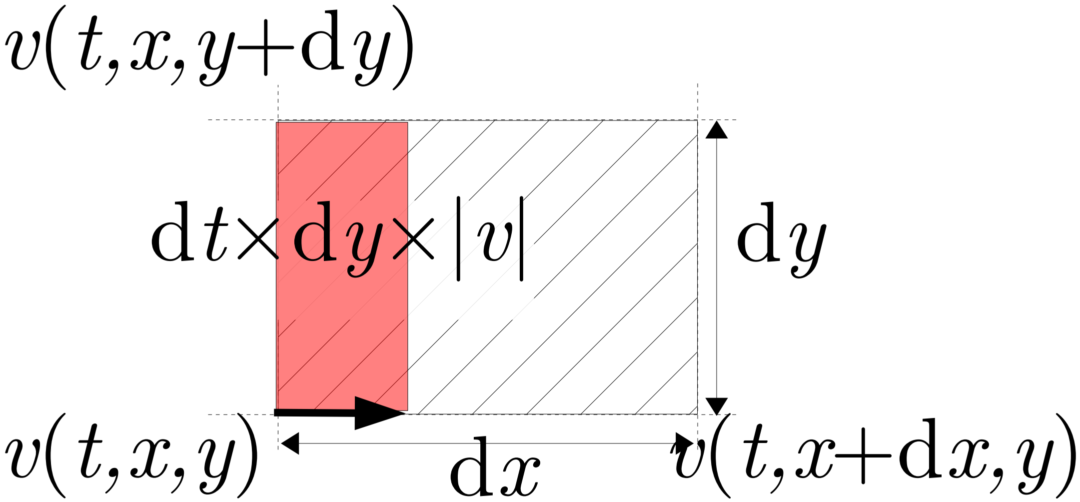
$v\ (t,x,y)=v\ [\mathrm{cal/m{\cdot}s}]$

$\mathrm{d}t[\mathrm{s}]$ に流れる熱

＝$\mathrm{d}t\times s\times v\ [\mathrm{cal}]$

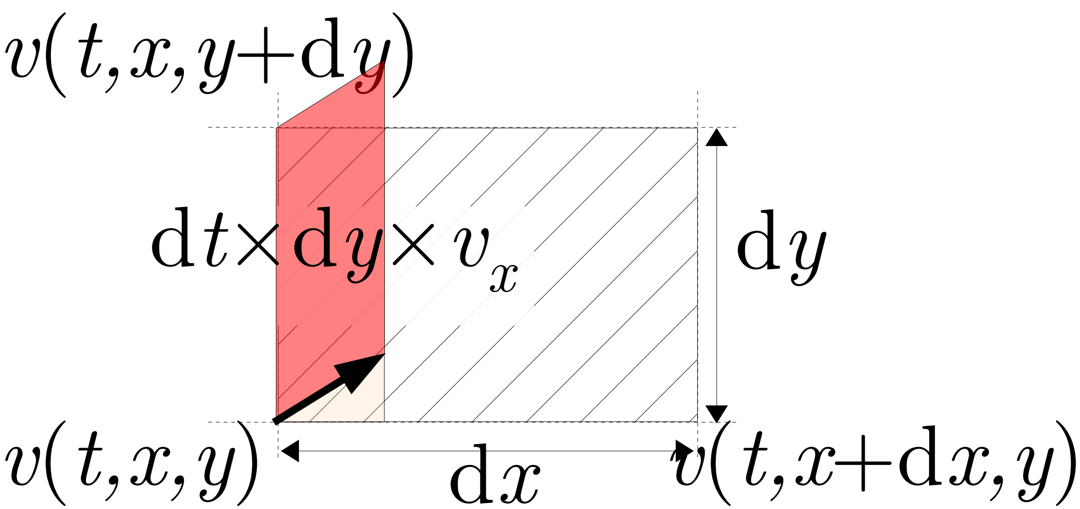
熱伝導方程式の導出（2次元）

- 微小領域に左面から流入する熱



v が面に垂直な場合
$\mathrm{d}t\times\mathrm{d}y\times|v|$[cal]流入

一般には、面に垂直な成分 v_x を考える

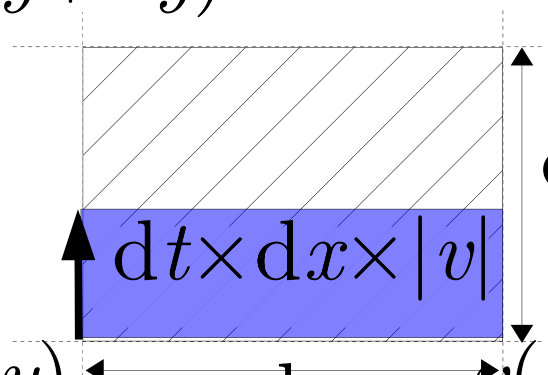


左右面からの入出を合せて

$$\mathrm{d}t\times\mathrm{d}y\times v_x(t,x,y)$$
$$-\mathrm{d}t\times\mathrm{d}y\times v_x(\mathrm{t},x+\mathrm{d}x,y)$$
$$=-\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y[v_x(x+\mathrm{d}x)-v_x(x)]$$
$$=-\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x$$

熱伝導方程式の導出(2次元)

- 微小領域に下面から流入する熱

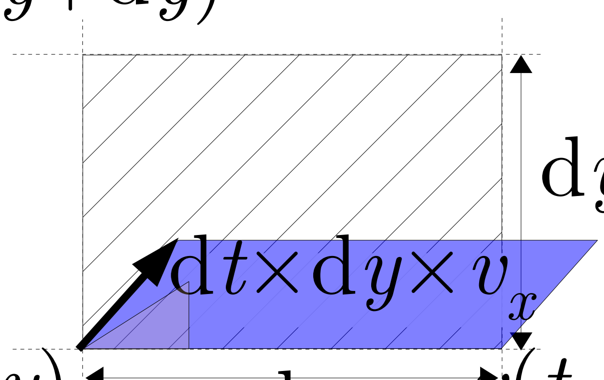


v が面に垂直な場合

$\mathrm{d}t\times\mathrm{d}y\times|v|$[cal]流入

一般には、面に垂直な成分 v_y を考える

上下面からの入出を合せて



$\mathrm{d}t\times\mathrm{d}x\times v_x(t,x,y)$

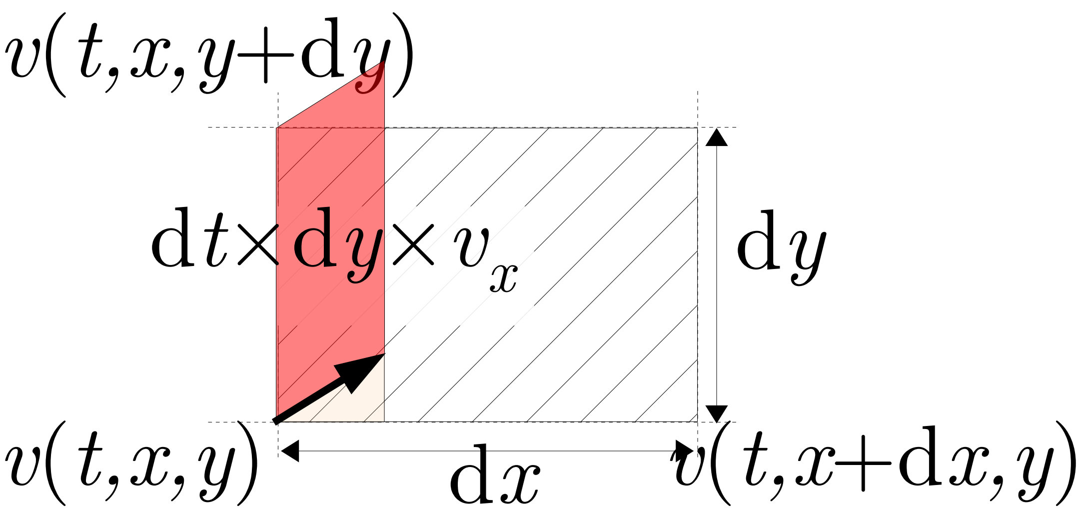
$-\mathrm{d}t\times\mathrm{d}x\times v_x(\mathrm{t},x,y+\mathrm{d}y)$

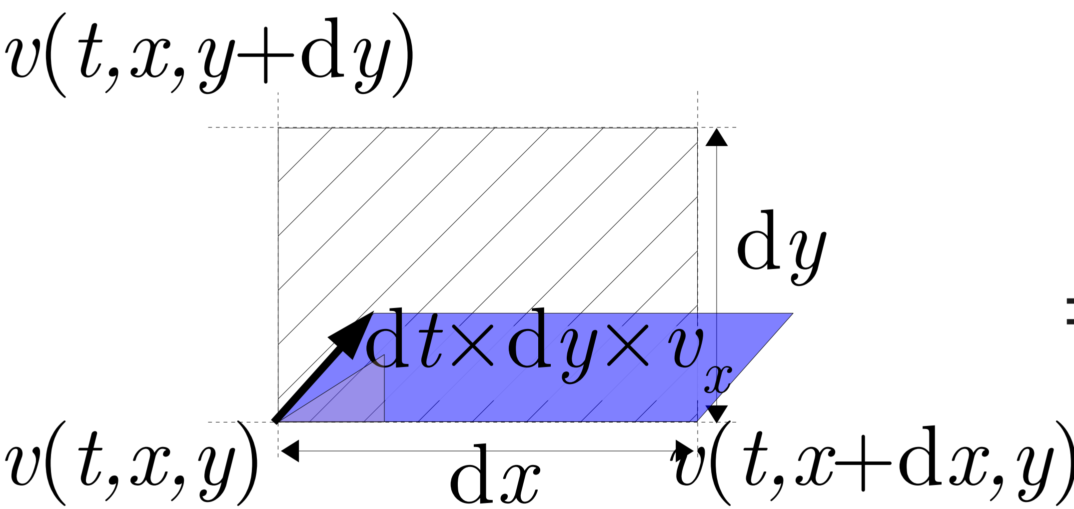
$=-\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x[v_x(y+\mathrm{d}y)-v_x(y)]$

$$=-\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\frac{\partial v_y}{\partial y}\mathrm{d}y$$

熱伝導方程式の導出（2次元）

- 微小領域に下面から流入する熱





4つの面を合せて全体の熱の流入出量は、

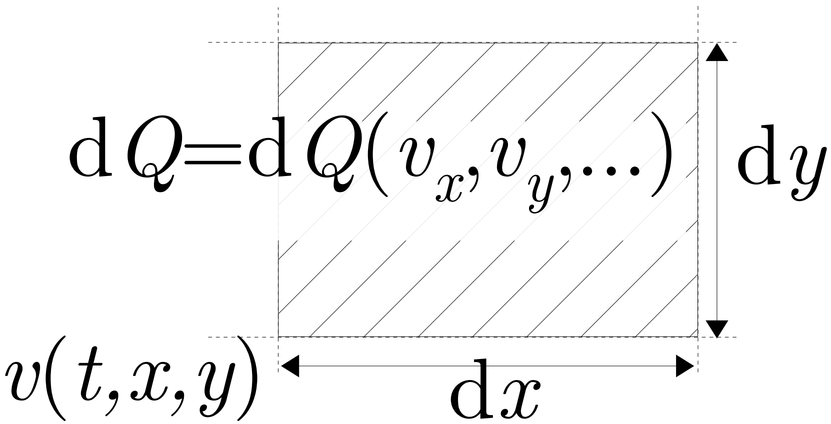
$$=-\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x$$

$$-\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\frac{\partial v_y}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$=-\mathrm{d}t\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

熱伝導方程式の導出（2次元）

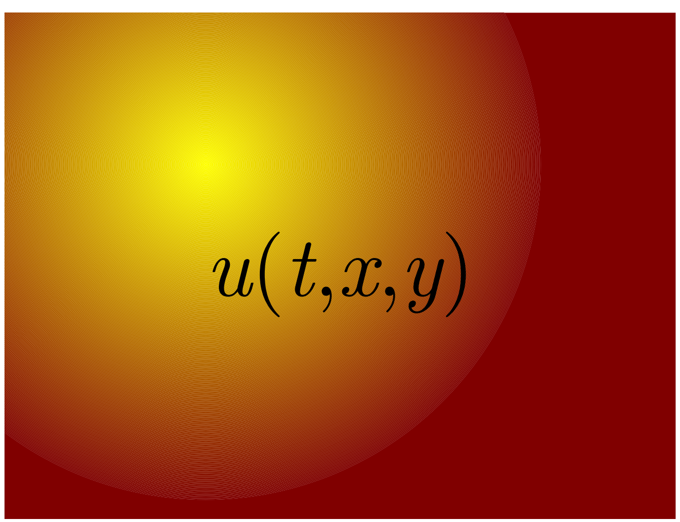
- 微小領域に流入する熱と温度



$\mathrm{d}x \times \mathrm{d}y$ の微小領域に

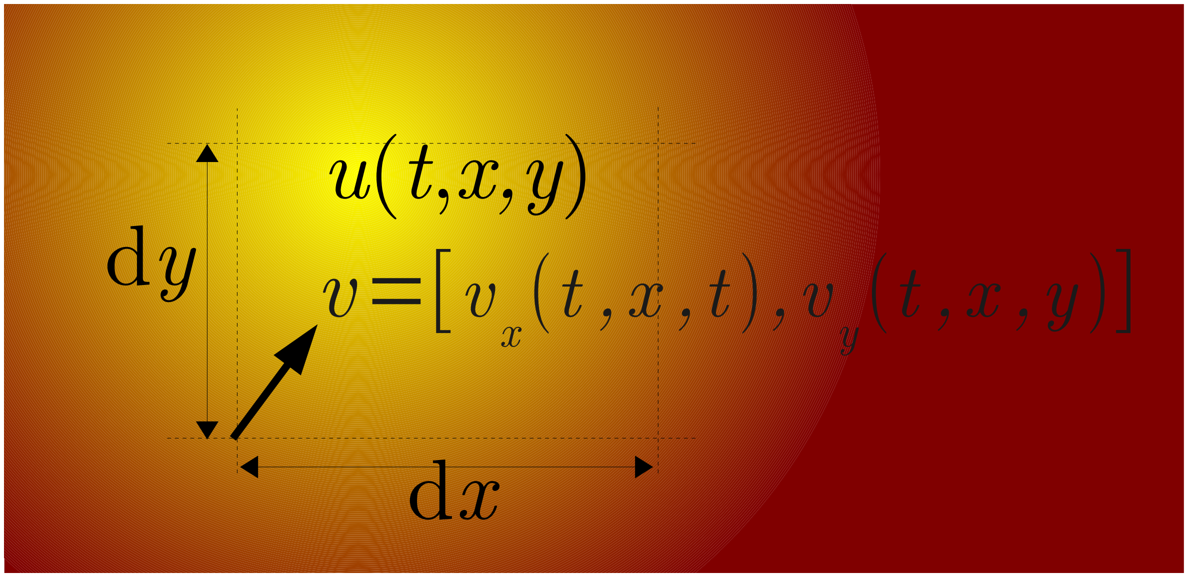
$$dQ = -\mathrm{d}t\left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

の熱が流入すれば、比例して温度が上昇する。
※比例係数 c:比熱
微小領域の温度＝$u(t,x,y)$
とすれば、上昇温度$\mathrm{d}u$ は
$\mathrm{d}Q = c \times$重量$\times \mathrm{d}u$
　＝$c(\rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\mathrm{d}u$（$\rho$は密度）

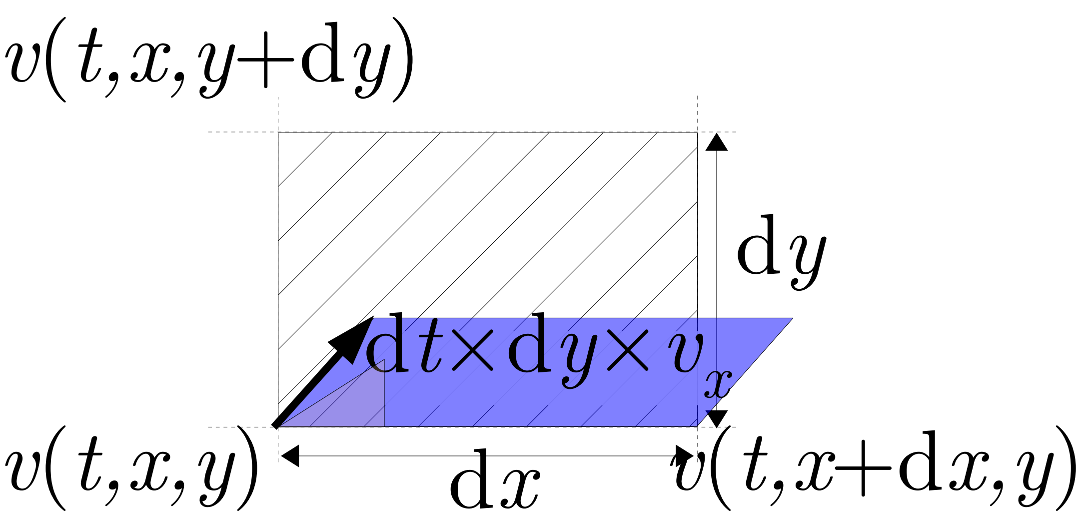


熱伝導方程式の導出（2次元）

- 微小領域に流入（流出）する熱と温度



熱の流入出量は
熱流速: $v=[v_x,v_y]$
の分布で決まる



今日のまとめ

- 熱素仮説**的**考え方
  出入りする熱によって物質の温度が上下する
- 熱流と比熱
  熱の流入量（流出量）∝温度の上昇（下降）
  比例係数:　比熱（水 1[cal/gK]>水銀0.03）
- フーリエ則
  熱流∝温度勾配
- 熱伝導方程式の導出
  ※ 解き方は次回以降

レポート(1)

学籍番号･氏名を記し提出してください。

- 1次元の熱伝導方程式を導出してください
- 授業内容について
  - 難易度（易し過ぎ～難し過ぎ）
  - 進行速度（早過ぎ～のんびりし過ぎ）
  - 既出でしたか？
- 授業の進め方について
  - スライド投影を板書との比重の希望
    （字が汚ないのはどうしようもありません。）
- 自分の研究分野の微分方程式を教えてください

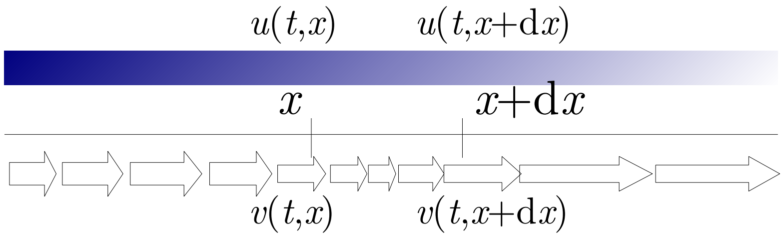
授業レポート用紙：氏名（　　　　　　　　　　）学籍番号(　　　　　　　　)

2019年9月30日（月曜日）

できれば授業の感想も書いてください。

授業レポート用紙:氏名(　　　　　　　　　　)学籍番号(　　　　　　　)

•1次元の熱伝導方程式を導出してください



時刻t、位置xの温度$u(t,x)$が熱流速$v(t,x)$によって変化する、と考える(**熱物質説**)
熱流速$v(t,x)$の向きを x と同一にすれば$\mathrm{d}t$時間に、区間$[x,x+\mathrm{d}x]$に左端から流入し、右端から流出する熱の収支は

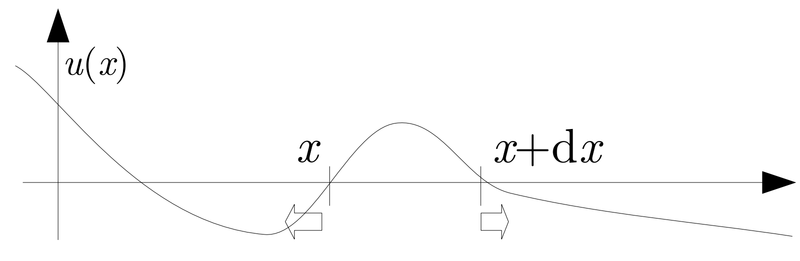
$$[v(t,x)-v(t,x+\mathrm{d}x)]\mathrm{d}t$$

単位質量あたりの比熱がcならば、

$$u_t(t,x)\mathrm{d}t\ \rho\mathrm{d}x = c[v(t,x)-v(t,x+\mathrm{d}x)]\mathrm{d}t$$

ただし、u_tはuの時間1階偏導関数、ρは密度
vの位置偏導関数v_xを使って表せば、

$$u_t(t,x)\mathrm{d}t\ \rho\mathrm{d}x = -cv_x(t,x)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}t$$



温度$u(t,x)$の位置変化率に比例して、温度の高い方から低い方への熱流が発生する、と考える(**フーリエ則**)
位置x の熱流と温度の位置変化率の関係は

$$v(t,x) = -\lambda u_x(t,x)$$

これを温度の時間変化の式に代入すれば、

$$u_t(t,x)\rho = c\lambda u_{xx}(t,x)$$

となり、1次元の熱伝導方程式を得る。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c\lambda}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

授業で扱った2次元の場合と v_x の意味が違うので注意してください。

2019年9月30日(月曜日)　　　　できれば授業の感想も書いてください。