計算科学特論

前回：熱伝導方程式の導出
今回：差分法の基礎と解法

復習:熱伝導方程式の導出

- 比熱
  流れ込む熱の量に比例して温度が変化する

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = c[\mathrm{d}Q(x) - \mathrm{d}Q(x+dx)]\mathrm{d}S$$

- フーリエ則
  熱は温度勾配に比例して流れる

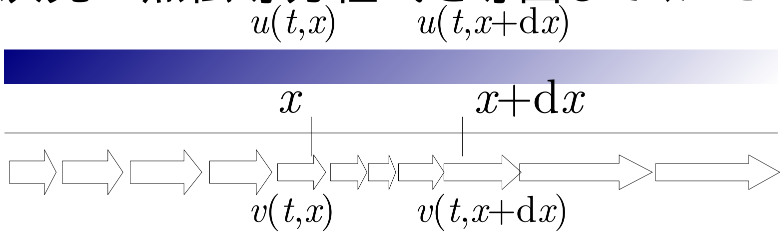
$$\mathrm{d}Q\mathrm{d}S = -\lambda\frac{\partial u}{\partial x}$$

- 熱伝導方程式(1次元)

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = c\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

授業レポート用紙：氏名（　　　　　　　　　　）学籍番号(　　　　　　　)

•1次元の熱伝導方程式を導出してください



時刻t、位置xの温度$u(t,x)$が熱流速$v(t,x)$によって変化する、と考える（**<u>熱物質説</u>**）
熱流速$v(t,x)$の向きを x と同一にすれば$\mathrm{d}t$時間に、区間$[x,x+\mathrm{d}x]$に左端から流入し、右端から流出する熱の収支は

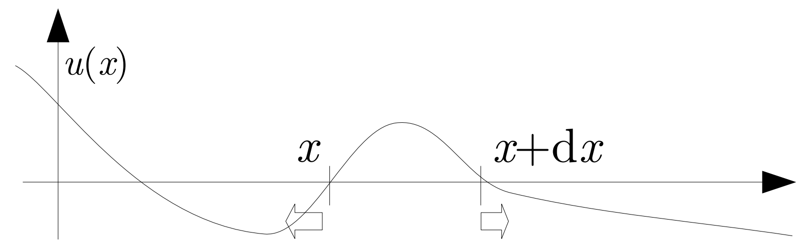
$$[v(t,x)-v(t,x+\mathrm{d}x)]\mathrm{d}t$$

単位質量あたりの比熱がcならば、

$$u_t(t,x)\mathrm{d}t\ \rho\mathrm{d}x = c[v(t,x)-v(t,x+\mathrm{d}x)]\mathrm{d}t$$

ただし、u_tはuの時間1階偏導関数、ρは密度
vの位置偏導関数v_xを使って表せば、

$$u_t(t,x)\mathrm{d}t\ \rho\mathrm{d}x = -cv_x(t,x)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}t$$



温度$u(t,x)$の位置変化率に比例して、温度の高い方から低い方への熱流が発生する、と考える（**<u>フーリエ則</u>**）
位置x の熱流と温度の位置変化率の関係は

$$v(t,x) = -\lambda u_x(t,x)$$

これを温度の時間変化の式に代入すれば、

$$u_t(t,x)\rho = c\lambda u_{xx}(t,x)$$

となり、1次元の熱伝導方程式を得る。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c\lambda}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

授業で扱った2次元の場合と v_x の意味が違うので注意してください。

2019年9月30日（月曜日）

できれば授業の感想も書いてください。

差分法

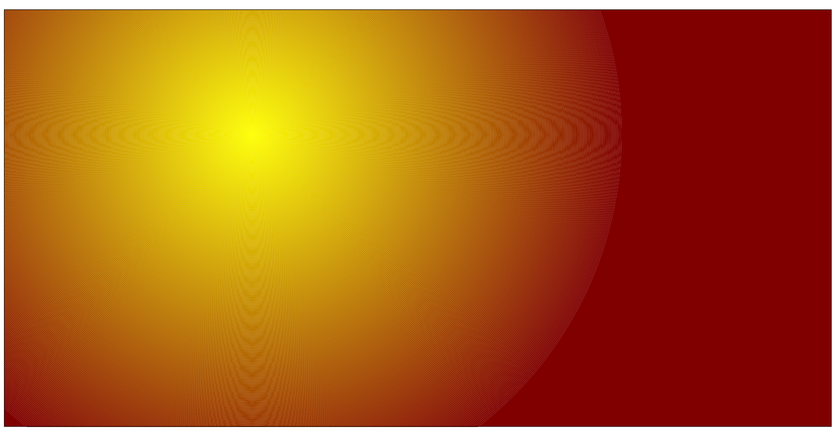
- 偏微分方程式の境界値問題
  (例：Laplace方程式の境界値問題)の数値解法
  - 有限要素法
  - **差分法**
- 差分〜微分 (和分〜積分)

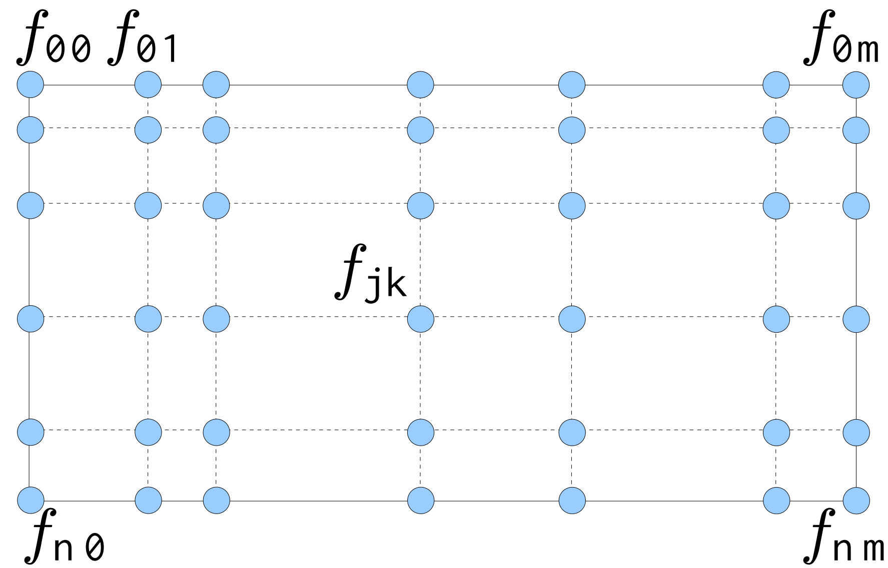
$$\frac{\triangle y}{\triangle x} \sim \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

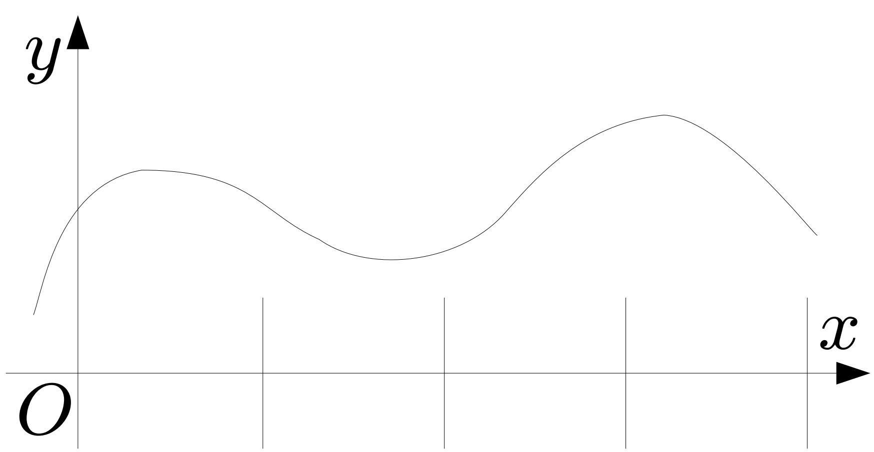
- 差分法
  ＋問題領域の離散化 (有限要素法も同様)

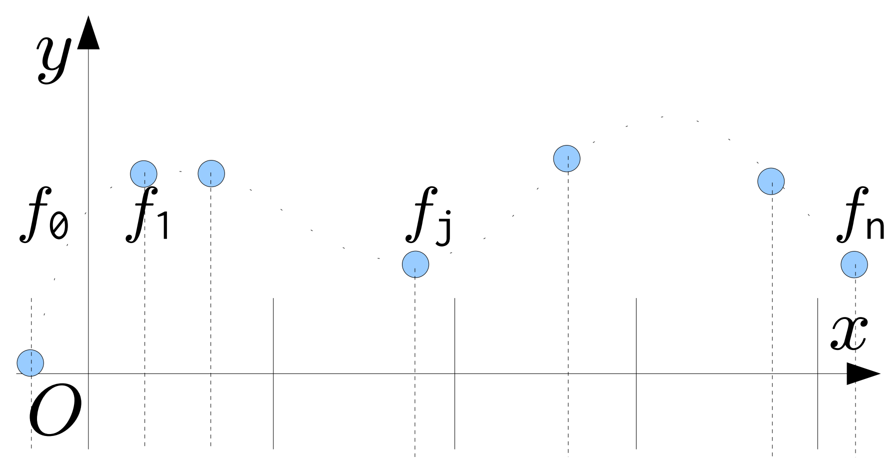
差分法

- 差分格子の導入









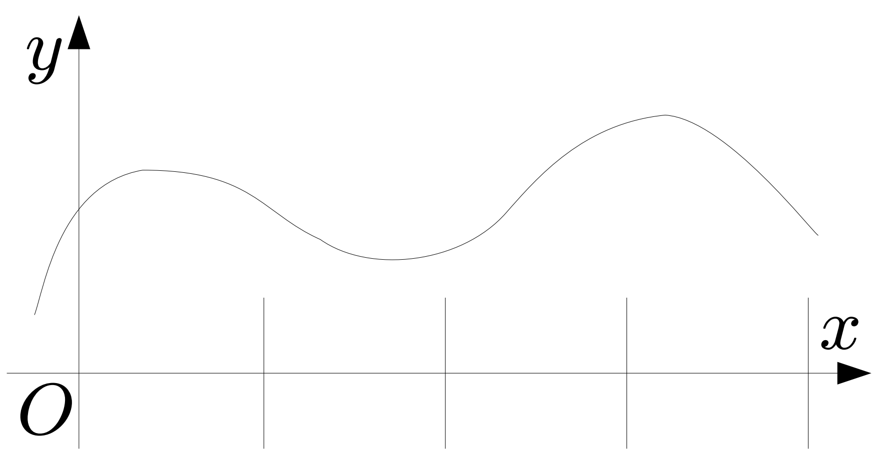
差分法

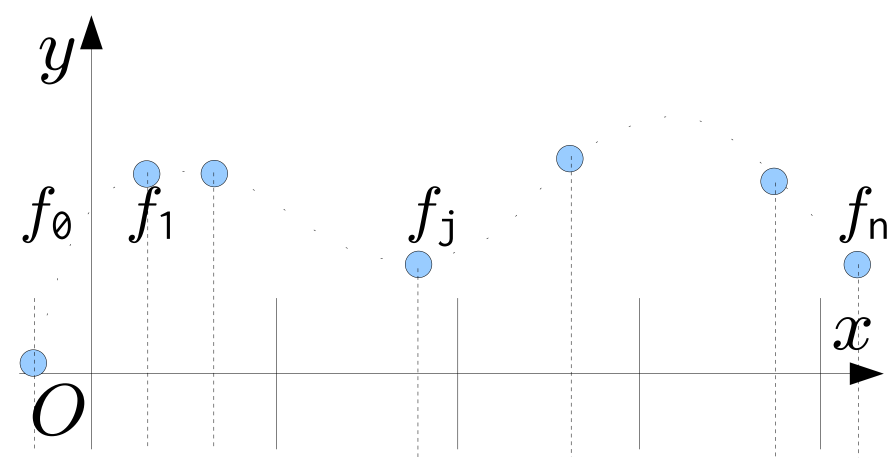
- 差分近似

前進差分: $$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_j} \fallingdotseq \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j}$$

後退差分: $$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_j} \fallingdotseq \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}}$$

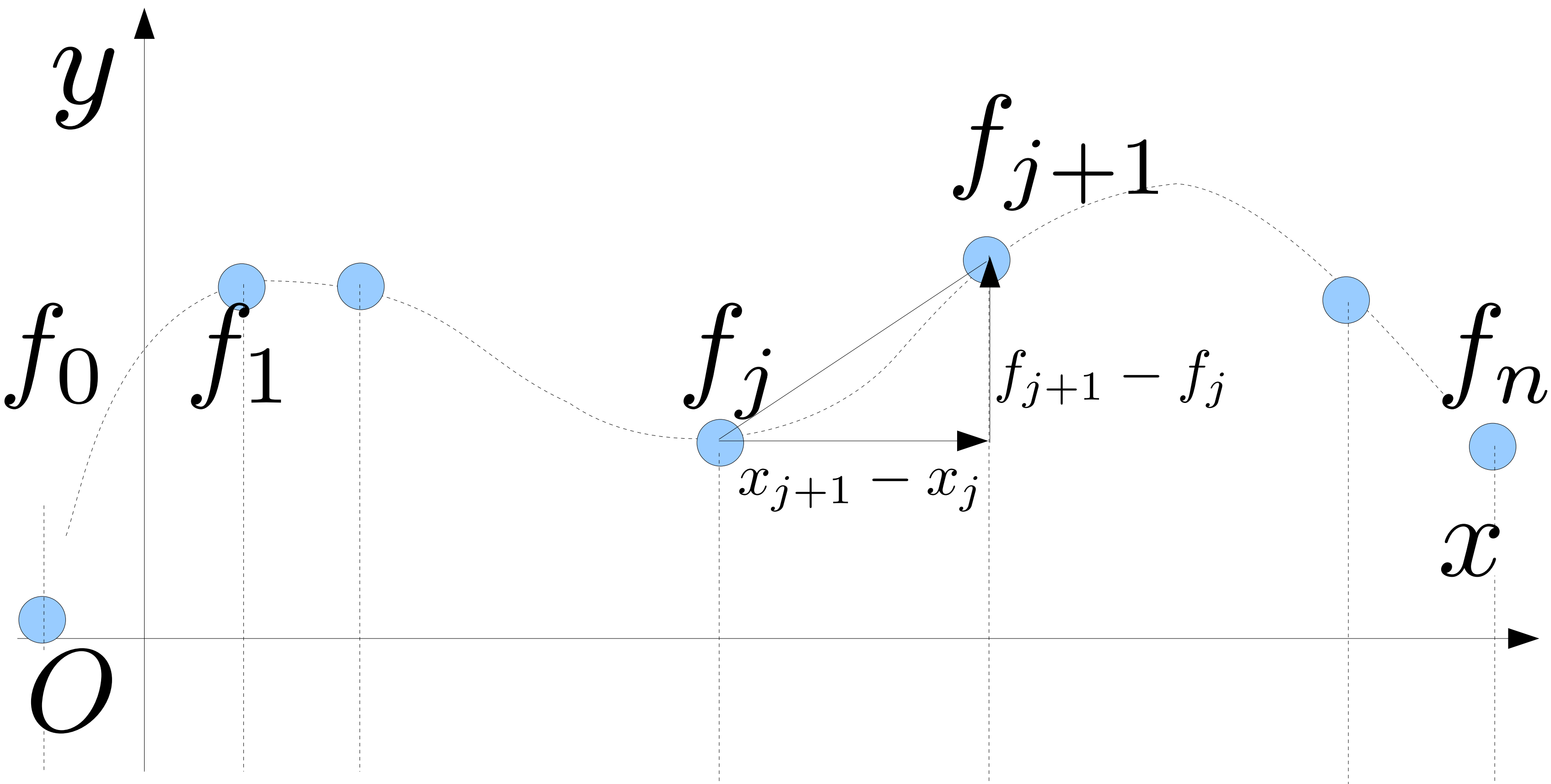
中心差分: $$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_j} \fallingdotseq \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1})}{x_{j+1} - x_{j-1}}$$





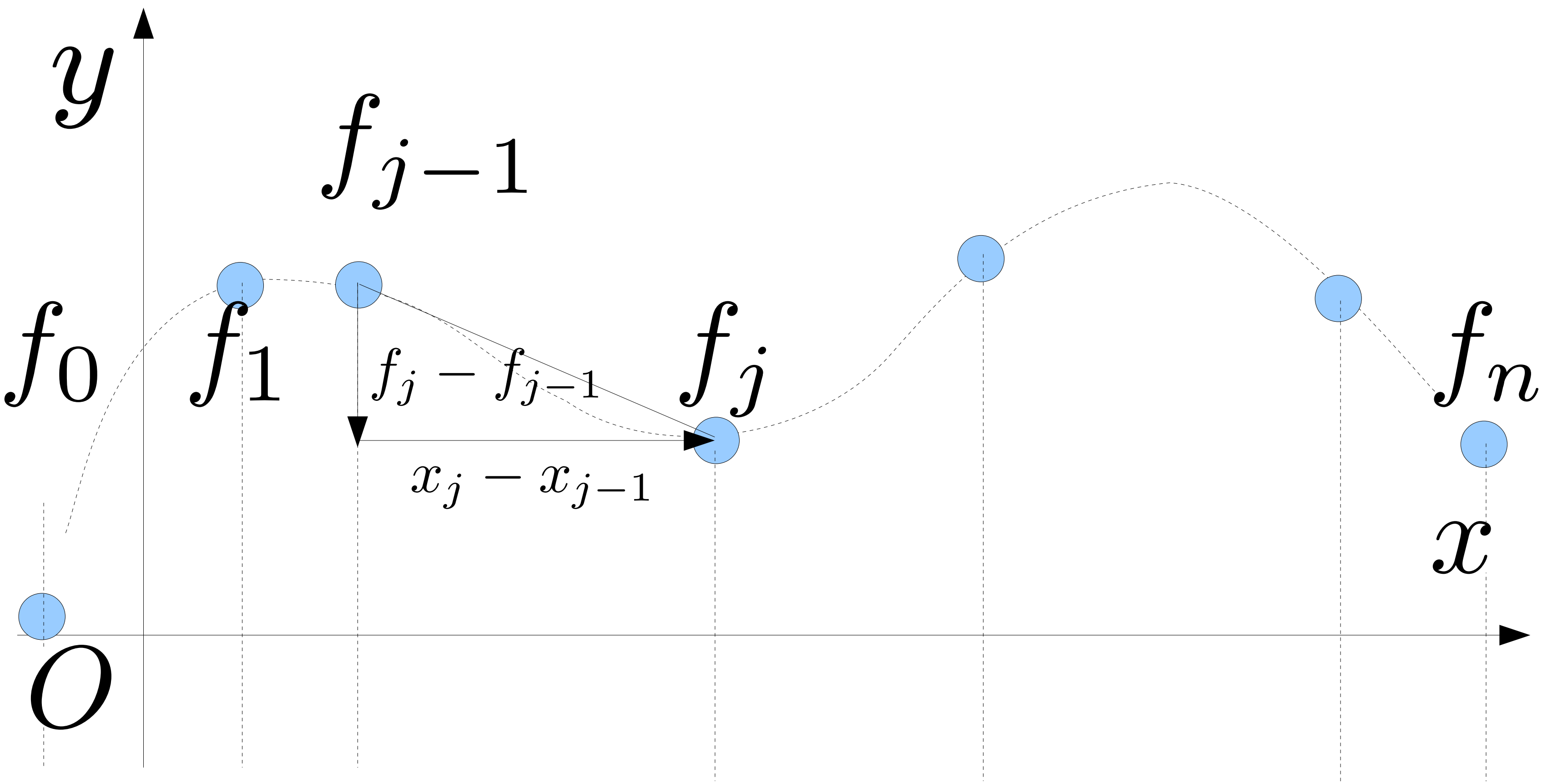
前進差分

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_j} \fallingdotseq \frac{f(x_{j+1})-f(x_j)}{x_{j+1}-x_j}$$



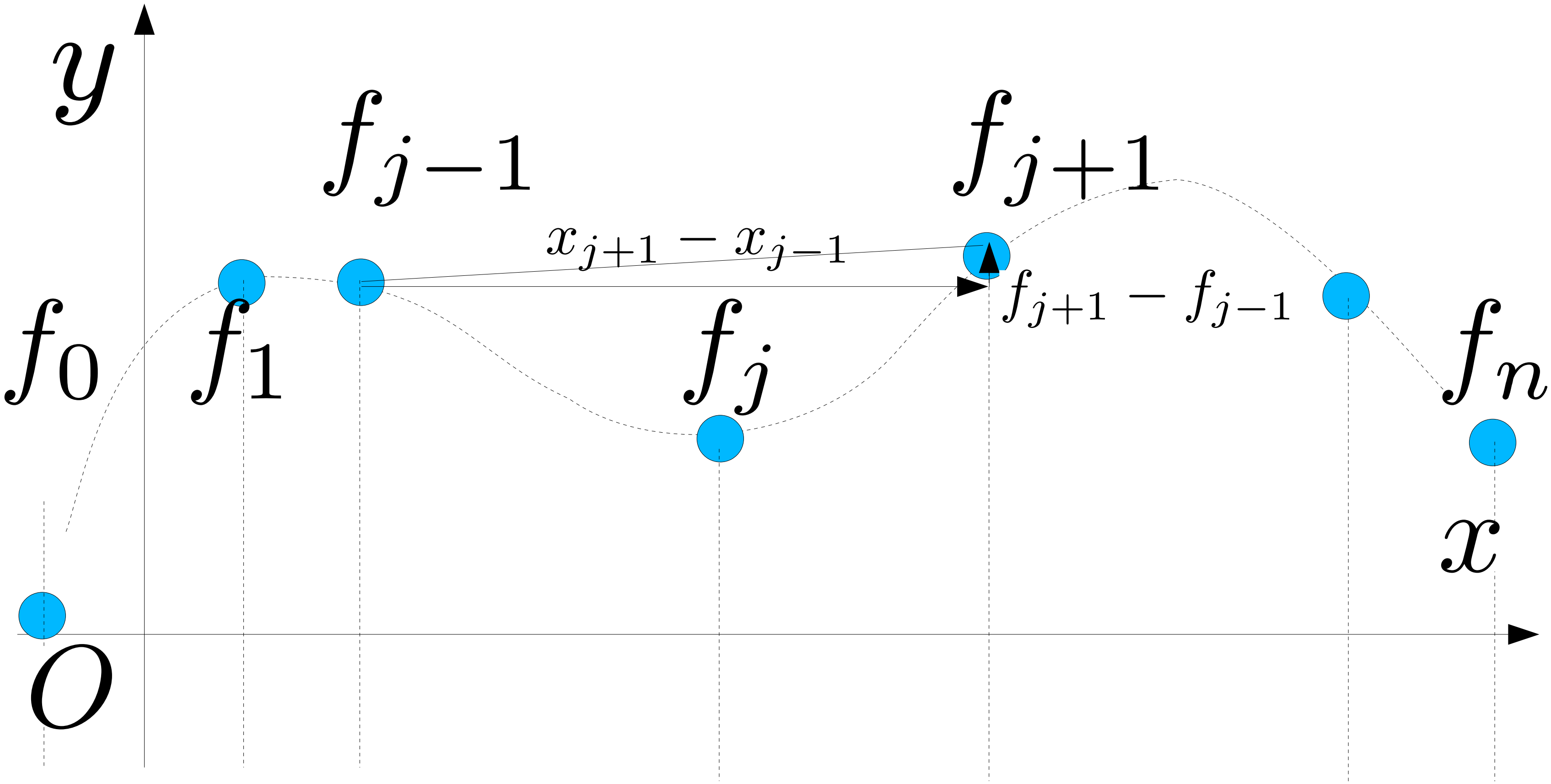
後退差分

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_j} \fallingdotseq \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}}$$



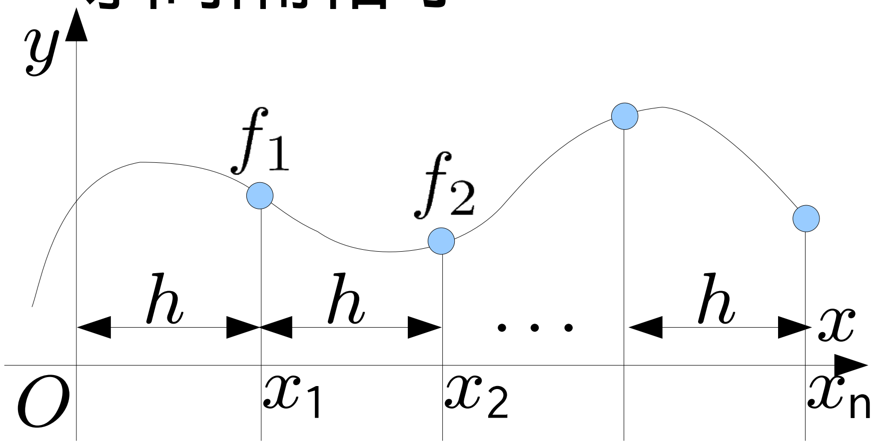
中心差分

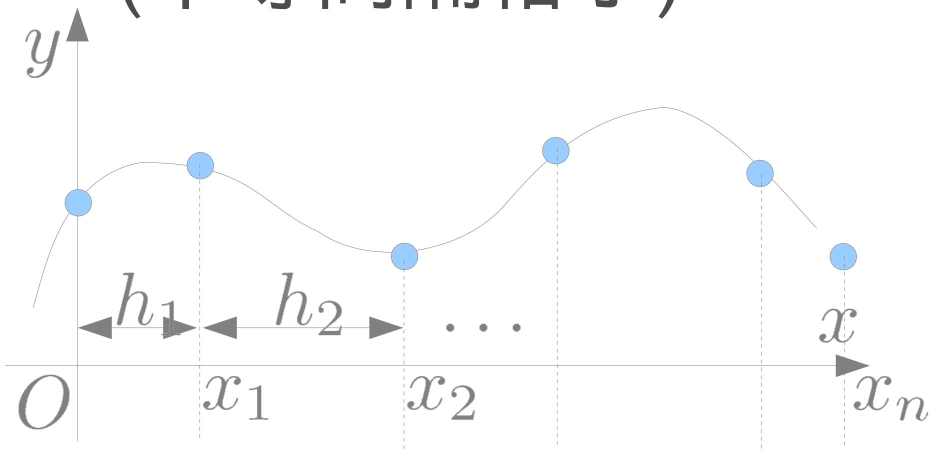
$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_j} \doteqdot \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1})}{x_{j+1} - x_{j-1}}$$



差分法

- 等間隔格子 (不等間隔格子)





- 差分近似

前進差分：
$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_j} \fallingdotseq \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j} = \frac{f_{j+1} - f_j}{h}$$

後退差分：
$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_j} \fallingdotseq \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} = \frac{f_j - f_{j-1}}{h}$$

中心差分：
$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_j} \fallingdotseq \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1})}{x_{j+1} - x_{j-1}} = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h}$$

差分法

- $f(x)$ の Taylor 展開を考える

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n+O(h^{n+1})$$

- 前進差分: $\displaystyle \frac{f_{j+1}-f_j}{h}=f'(x)+O(h)$

  後退差分: $\displaystyle \frac{f_j-f_{j-1}}{h}=f'(x)+O(h)$

  中心差分: $\displaystyle \frac{f_{j+1}-f_{j-1}}{2h}=f'(x)+O(h^2)$

$$\because f_{j+1}-f_{j-1}=\left(f+f'h+\frac{1}{2}f''h^2+\frac{1}{3!}f'''h^3+O(h^4)\right)$$

$$-\left(f-f'h+\frac{1}{2}f''h^2-\frac{1}{3!}f'''h^3+O(h^4)\right)=2f'h+O(h^4)$$

差分法

- 高階(2階)導関数の差分近似

前進差分: $f''(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$

$$\fallingdotseq \frac{\frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h} - \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}{h} = \frac{f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j}{h^2}$$

後退差分: $\cdots = \dfrac{f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2}}{h^2}$

中心差分: $\cdots = \dfrac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{h^2}$

, or $\quad f'' \fallingdotseq \dfrac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} \cdots \fallingdotseq \dfrac{f_{j+2} - 2f_j + f_{j-2}}{4h^2}$

差分法

- 2階導関数の差分近似精度
  1階導関数同様、Taylor展開を考える

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n+O(h^{n+1})$$

前進差分:

後退差分: $$\frac{f_{j+2}-2f_{j+1}+f_j}{h^2}=f''(x)+O(h)$$

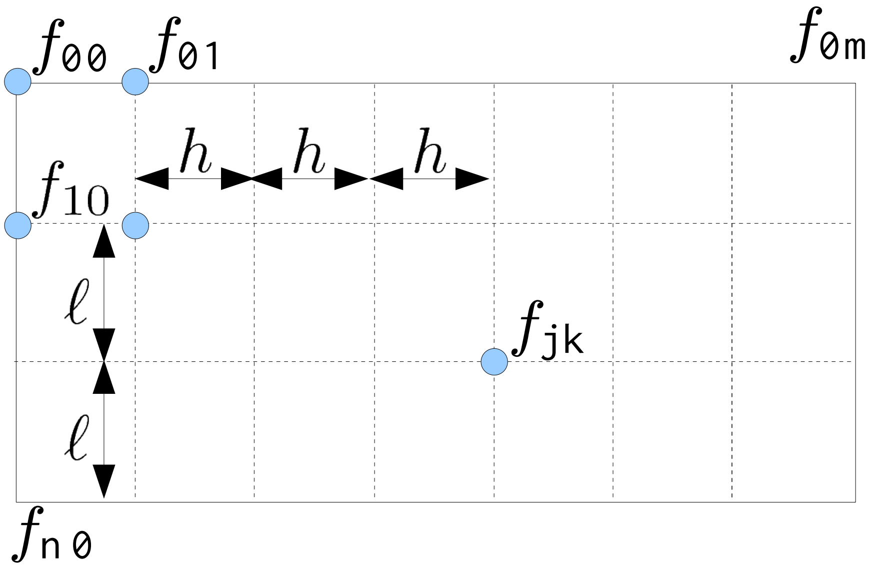
中心差分: $$\frac{f_j-2f_{j-1}+f_{j-2}}{h^2}=f''(x)+O(h)$$

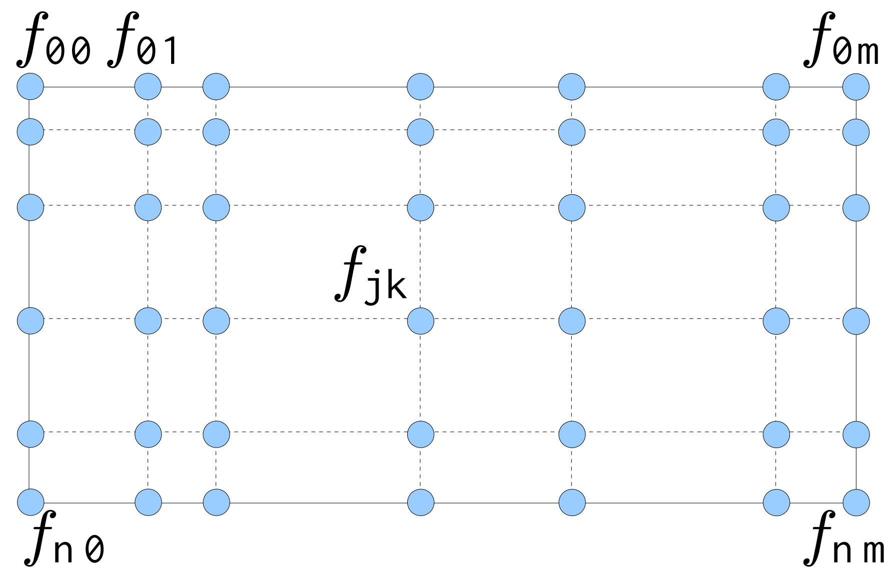
$$\frac{f_{j+1}-2f_j+f_{j-1}}{h^2}=f''(x)+O(h^2)$$

$$\frac{f_{j+2}-2f_j+f_{j-2}}{4h^2}=f''(x)+O(h^2)$$

差分法

- 偏微分方程式の差分法





- 前進差分の例

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_k,y=y_j} \fallingdotseq \frac{f(x_{k+1},y_j)-f(x_k,y_j)}{x_{k+1}-x_k}, \quad \frac{f_{jk+1}-f_{jk}}{h}$$

差分法

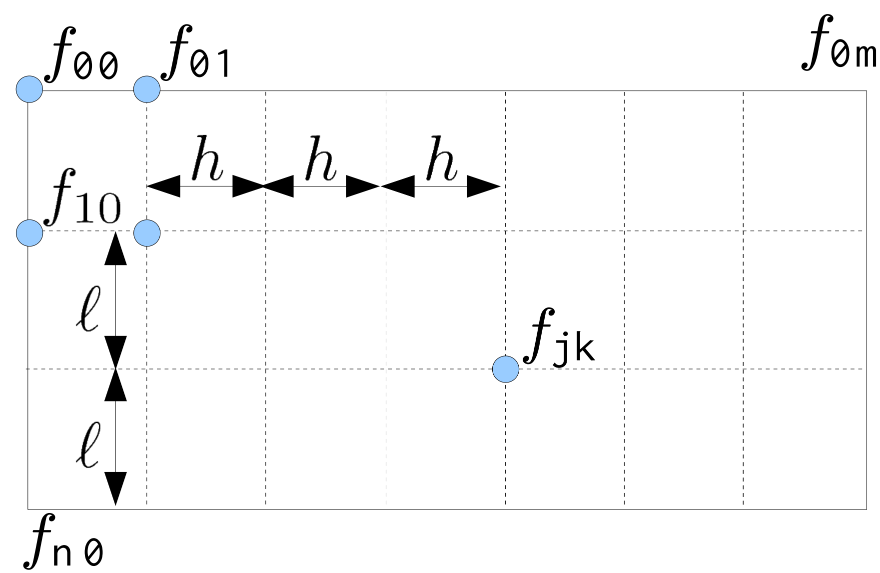
- 1階偏導関数の差分近似

$$\frac{f_{jk+1}-f_{jk}}{h},\ \frac{f_{jk}-f_{jk-1}}{h}\in\left\{\frac{\partial f}{\partial x}+O(h)\right\}$$

$$\frac{f_{j+1k}-f_{jk}}{\ell},\ \frac{f_{jk}-f_{j-1k}}{\ell}\in\left\{\frac{\partial f}{\partial y}+O(\ell)\right\}$$

$$\frac{f_{jk+1}-f_{jk-1}}{2h}=\frac{\partial f}{\partial x}+O(h^2)$$

$$\frac{f_{j+1k}-f_{j-1k}}{2\ell}=\frac{\partial f}{\partial y}+O(\ell^2)$$

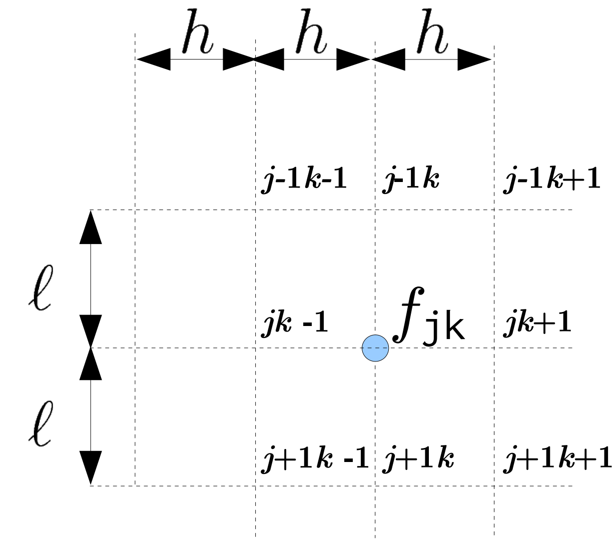


差分法

- 2階偏導関数の差分近似

$$\frac{f_{jk+1}-2f_{jk}+f_{jk-1}}{h^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+O(h^2)$$

$$\frac{f_{j+1k}-2f_{jk}+f_{j-1k}}{\ell^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+O(\ell^2)$$



$$\frac{f_{j+1k+1}-f_{j+1k-1}-f_{j-1k+1}+f_{j-1k-1}}{4h\ell}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+O(h^2,h\ell,\ell^2)$$

- ∵2変数関数のTaylor展開

$$f(x+h,y+\ell)=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial x}+\ell\frac{\partial}{\partial y})^n f+O((h+l)^m)$$

練習①

2階偏導関数の差分近似に関する近似精度について、次の式が成立することを示してください。

$$
\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+2f(x)-2f(x-h)+f(x-2h)}{2h^2} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x)+O(h^2)
$$

差分法

- Taylor展開

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n+O(h^{n+1})$$

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\frac{1}{6}f^{(3)}(x)h^3+O(h^4)$$
$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2-\frac{1}{6}f^{(3)}(x)h^3+O(h^4)$$
$$f(x+2h)=f(x)+2f'(x)h+2f''(x)h^2+\frac{4}{3}f^{(3)}(x)h^3+O(h^4)$$
$$f(x-2h)=f(x)-2f'(x)h+2f''(x)h^2-\frac{4}{3}f^{(3)}(x)h^3+O(h^4)$$

差分法

$$\therefore -2f(x+h) = -2f(x) - 2f'(x)h - f''(x)h^2 - \frac{1}{3}f^{(3)}(x)h^3 + O(h^4)$$

$$-2f(x-h) = -2f(x) + 2f'(x)h - f''(x)h^2 + \frac{1}{3}f^{(3)}(x)h^3 + O(h^4)$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2f'(x)h + 2f''(x)h^2 + \frac{4}{3}f^{(3)}(x)h^3 + O(h^4)$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2f'(x)h + 2f''(x)h^2 - \frac{4}{3}f^{(3)}(x)h^3 + O(h^4)$$

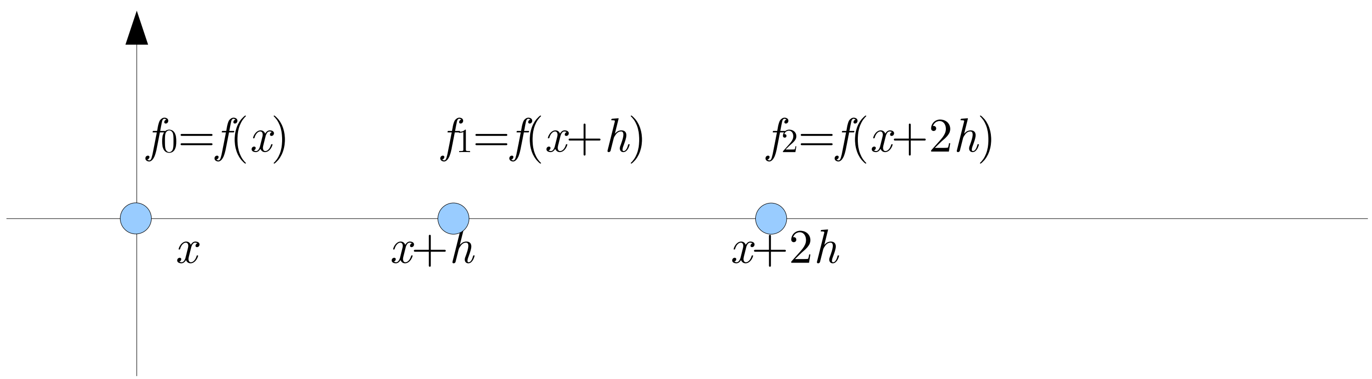
+)

$$f(x+2h) - 2f(x+h) - 2f(x-h) + f(x-2h) = -2f(x) + 2f''(x)h^2 + O(h^4)$$

$$\therefore \quad \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{2h^2} = f''(x) + O(h^2)$$

練習②

3点のデータ（関数値）を用いてxにおける2次の精度を持つ1階の導関数値を示してください。



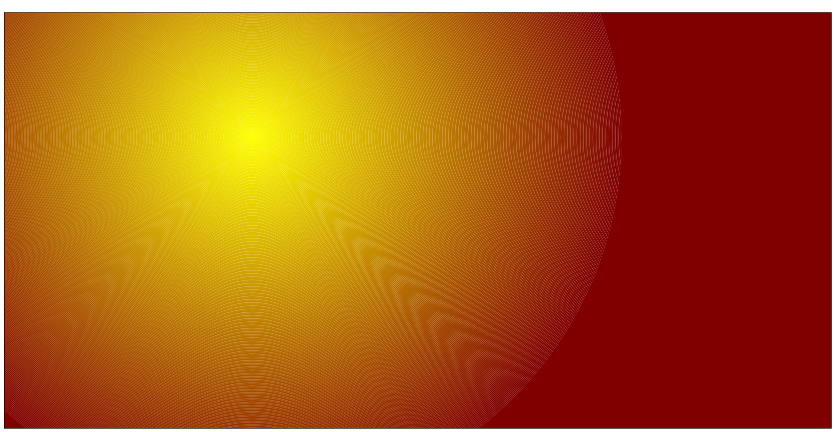
3点のデータ（関数値）を使って
$O(h^2)$の精度の導関数値を求める。
注意：f_{-1}は使えません。

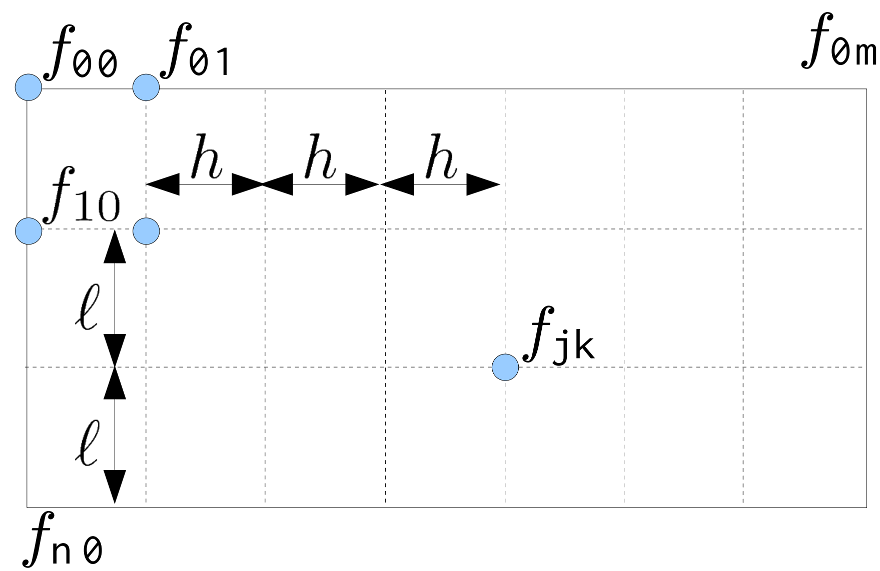
差分法の基礎

- 差分近似
  - 微分を差分で近似する

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} \sim \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \qquad \frac{\triangle\left[\frac{\triangle y}{\triangle x}\right]}{\triangle x} \sim \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$$

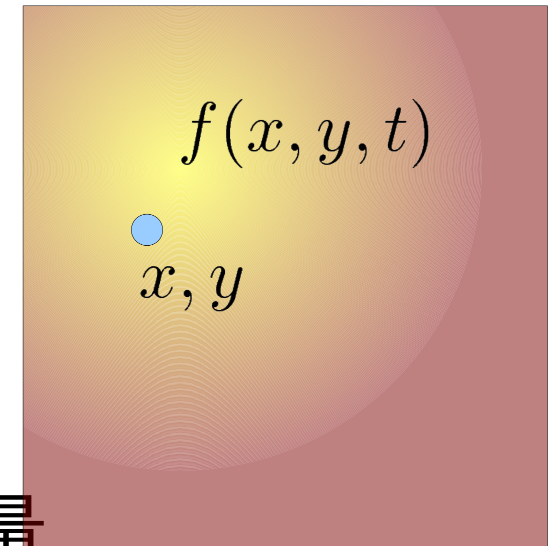
- 差分格子の導入(等間隔格子)



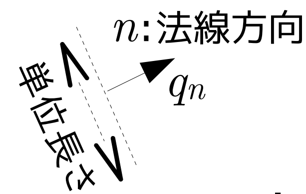


熱伝導方程式とラプラス方程式

- フーリエ則:熱流は温度差に比例する
  $q(z)$: z 点をある方向へ流れる熱量



$$q_n(z) = -\lambda \frac{\partial}{\partial n} f(z)$$



- 2次元の温度変化
  微小領域の温度勾配∝流れ込む熱量

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,y,t) = -c\left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}\right] = c\lambda\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right] f(x,y,t)$$

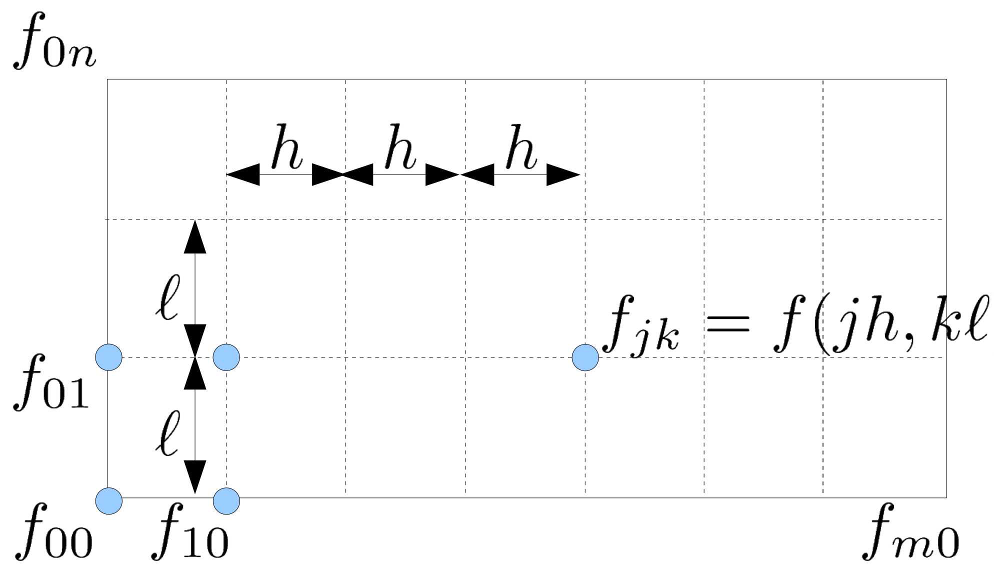
$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$ (＝0 ～時間変化なし＝平衡状態)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$ 平衡状態の熱伝導方程式＝Laplace方程式

差分法

- 2次元Laplace方程式の境界問題に差分法を適用

  $f\,(x,y)$：調和関数、
  $b(x,y)$：f の境界値
  Laplace方程式：



$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

Laplace方程式の差分近似：

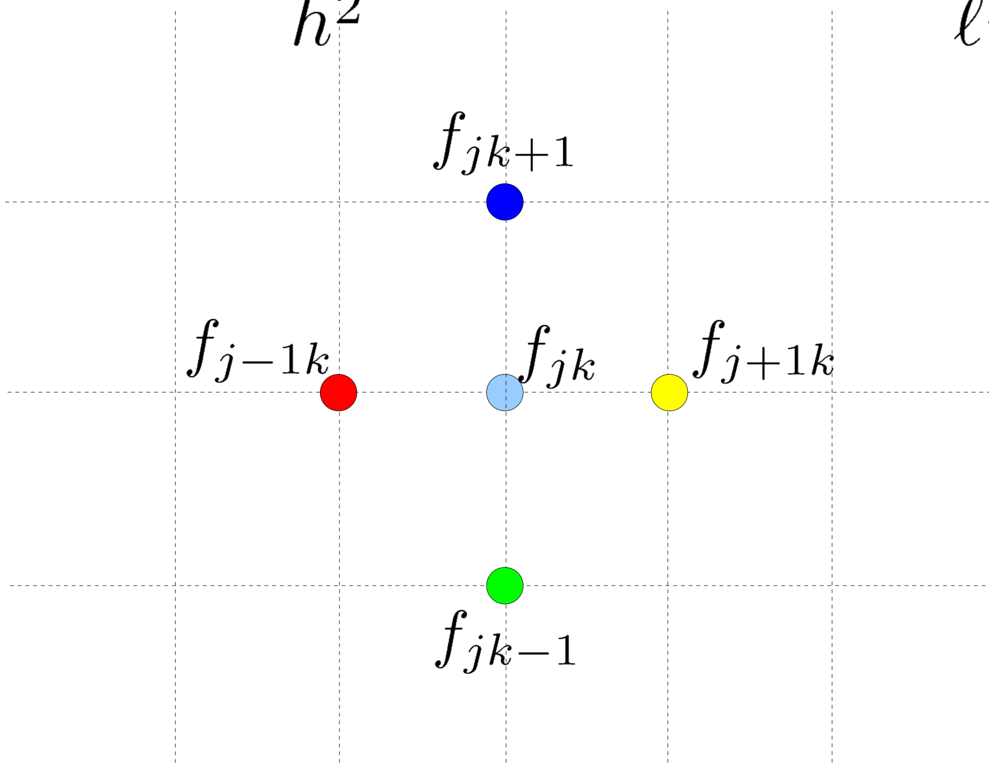
$$\frac{f_{j+1k}-2f_{jk}+f_{j-1k}}{h^2}+\frac{f_{jk+1}-2f_{jk}+f_{jk-1}}{\ell^2}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+O(h^2,\ell^2)=O(h^2,\ell^2)$$

差分法

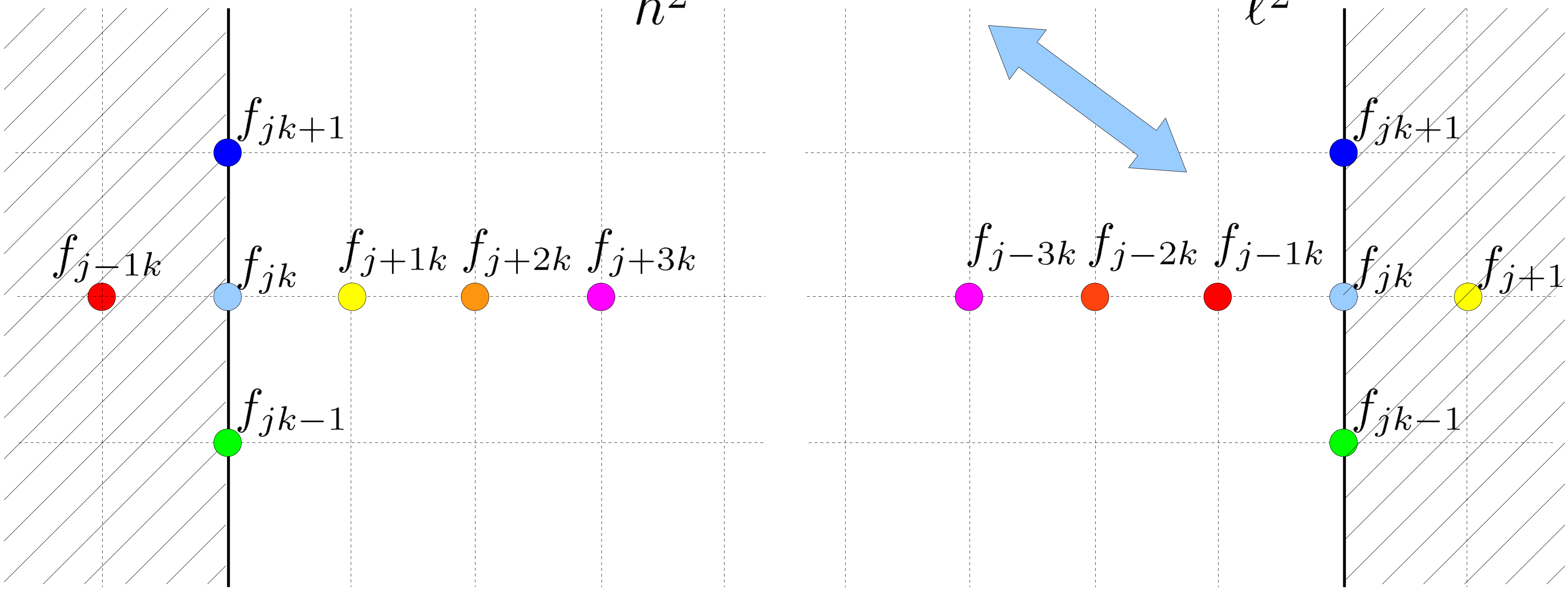
- 解くべき連立方程式
  Laplace方程式：
  $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

  近似：
  $$\frac{f_{j+1k}-2f_{jk}+f_{j-1k}}{h^2}+\frac{f_{jk+1}-2f_{jk}+f_{jk-1}}{\ell^2}=0$$



差分法

- 解くべき連立方程式
  Laplace方程式:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$
  近似:
$$\frac{-f_{j-3k}+4f_{j-2k}-5f_{j-1k}+f_{jk}}{h^2}+\frac{f_{jk+1}-2f_{jk}+f_{jk-1}}{\ell^2}=0$$



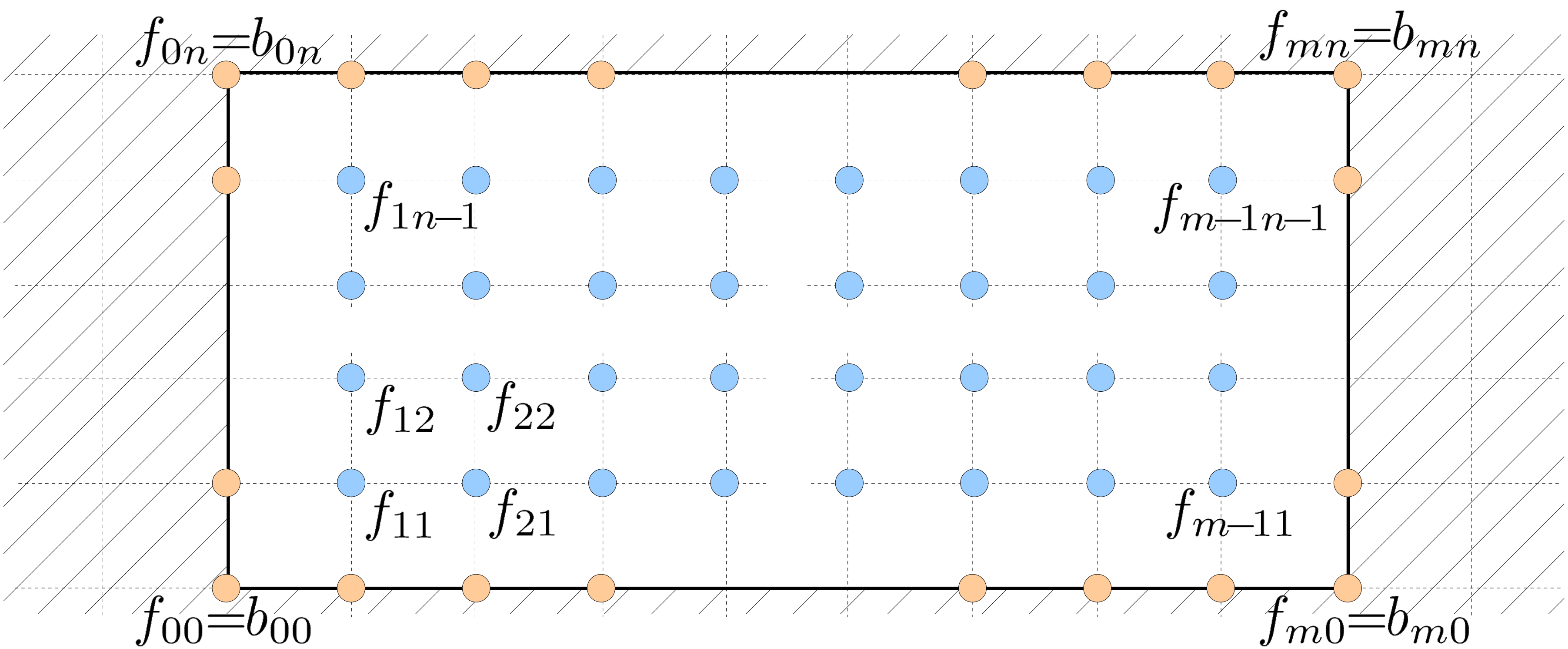
差分法

- 境界条件:　$f(x,y) = b(x,y)$

  近似:　$f_{j0}{=}b_{j0}, f_{jm}{=}b_{jm}, f_{0k}{=}b_0k, f_{nk}{=}b_{nk},$

  ただし、$b_{jk} = b(jh, k\ell),\ j = 0, \ldots, m, k = 0, n,$

  or $j = 0, m, k = 0, \ldots, n.$
- 求める未知量:



$$f(jh, k\ell) \sim f_{jk} \quad j = 1, \ldots, n-1, k = 1, \ldots, m-1$$

差分法

- Laplace方程式の差分近似:

$$\frac{f_{j+1k}-2f_{jk}+f_{j-1k}}{h^2}+\frac{f_{jk+1}-2f_{jk}+f_{jk-1}}{\ell^2}=0$$

  が与える連立方程式を求める
- 係数をまとめる

$$-2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{\ell^2}\right)f_{jk}+\frac{1}{h^2}(f_{j+1k}+f_{j-1k})+\frac{1}{\ell^2}(f_{jk+1}+f_{jk-1})=0$$

- 行列表現を考える

$$[\beta\ \alpha\ \beta]\begin{bmatrix} f_{j-1k} \\ f_{jk} \\ f_{j+1k} \end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix} f_{jk-1} \\ f_{jk+1} \end{bmatrix}=0 \quad \alpha=2(\beta+\gamma),\ \beta=\frac{1}{h^2},\ \gamma=\frac{1}{\ell^2}$$

差分法

- j=1,...,m-1で考える

$$\alpha_j \begin{bmatrix} f_{1k} \\ \vdots \\ f_{j-1k} \\ f_{jk} \\ f_{j+1k} \\ \vdots \\ f_{m-1k} \end{bmatrix} + \gamma_j \begin{bmatrix} f_{1k-1} \\ \vdots \\ f_{j-1k-1} \\ f_{jk-1} \\ f_{j+1k-1} \\ \vdots \\ f_{m-1k-1} \end{bmatrix} + \gamma_j \begin{bmatrix} f_{1k+1} \\ \vdots \\ f_{j-1k+1} \\ f_{jk+1} \\ f_{j+1k+1} \\ \vdots \\ f_{m-1k+1} \end{bmatrix} = 0$$

ただし、$\alpha_j = [\ldots \beta \alpha \beta \ldots],\ \gamma_j = [\ldots \gamma \ldots],$

- まとめて

$$\alpha_j \boldsymbol{F}_k + \gamma_j \boldsymbol{F}_{k-1} + \gamma_j \boldsymbol{F}_{k+1} = 0 \quad \boldsymbol{F}_k = [f_{1k} \ldots f_{m-1k}]^{\mathrm{T}},$$

$$[\ldots \gamma_j \alpha_j \gamma_j \ldots][\ldots \boldsymbol{F}_{k-1} \boldsymbol{F}_k \boldsymbol{F}_{k+1} \ldots]^{\mathrm{T}} = 0.$$

差分法

- j=1,...,m-1で考える

$$[\dots \gamma_j \alpha_j \gamma_j \dots][\dots \boldsymbol{F}_{k-1} \boldsymbol{F}_k \boldsymbol{F}_{k+1} \dots]^{\mathrm{T}} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} \vdots & \ddots & & & & & \\ \dots \gamma_{j-1} \alpha_{j-1} \gamma_{j-1} & \dots & & & & & \\ & \dots & \gamma_j & \alpha_j & \gamma_j & \dots & \\ & & & \dots & \gamma_{j+1} \alpha_{j+1} \gamma_{j+1} \dots & & \\ & & & & & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}_{k-1} \\ \boldsymbol{F}_k \\ \boldsymbol{F}_{k+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}_{n-1} \end{bmatrix} = 0,$$

$$\boldsymbol{A}' \boldsymbol{F}' = 0 \quad \boldsymbol{F}' = [\boldsymbol{F}_1, \dots, \boldsymbol{F}_{n-1}]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{F}' = [f_{11} \dots f_{m-11}, \dots, f_{1n-1} \cdots f_{m-1n-1}]^{\mathrm{T}},$$

- 境界条件は?

$$\boldsymbol{F} = [f_{00} \dots f_{m0}, \dots, f_{0n} \dots f_{mn}]^{\mathrm{T}}.$$

領域の内側: $1 \leqq j \leqq n-1,\ 1 \leqq k \leqq m-1$ の連立方程式

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{F}' = 0 \Leftrightarrow \frac{f_{j+1k}-2f_{jk}+f_{j-1k}}{h^2}+\frac{f_{jk+1}-2f_{jk}+f_{jk-1}}{\ell^2}=0$$

添字ごとにまとめると、

$$\Leftrightarrow -2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{\ell^2}\right)f_{jk}+\frac{1}{h^2}(f_{j+1k}+f_{j-1k})+\frac{1}{\ell^2}(f_{jk+1}+f_{jk-1})=0$$

$f_{00},\dots,f_{m0},f_{10},\dots,f_{1m},\dots,f_{0n},\dots,f_{mn}$ の順に並べて

$$(0\cdots0)\begin{pmatrix} f_{00} \\ \vdots \\ f_{m0} \end{pmatrix}+\cdots+(0\cdots0\ \overset{j}{\gamma}\ 0\cdots0)\begin{pmatrix} f_{0k-1} \\ \vdots \\ f_{mk-1} \end{pmatrix}+$$

$$(0\cdots0\ \overset{j-1}{\beta}\ \overset{j}{\alpha}\ \overset{j+1}{\beta}\ 0\cdots0)\begin{pmatrix} f_{0k} \\ \vdots \\ f_{mk} \end{pmatrix}+(0\cdots0\ \overset{j}{\gamma}\ 0\cdots0)\begin{pmatrix} f_{0k+1} \\ \vdots \\ f_{mk+1} \end{pmatrix}+\cdots+(0\cdots0)\begin{pmatrix} f_{0n} \\ \vdots \\ f_{mn} \end{pmatrix}=0$$

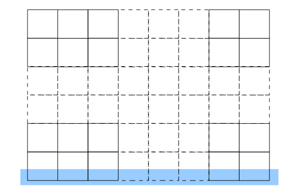
ただし、 $\alpha \equiv -2(h^{-2}+\ell^{-2}), \beta \equiv \ell^{-2}, \gamma \equiv h^{-2}.$

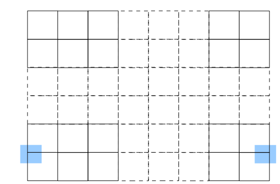
境界　$j=0,m,\quad k=0,n$　の連立方程式(境界条件)

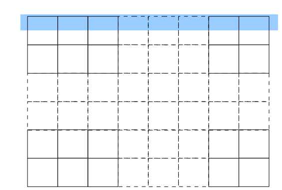
$$f_{0k}=b_{0k}, f_{mk}=b_{mk},\quad k=0,\ldots,n,$$
$$f_{j0}=b_{j0}, f_{mk}=b_{mk},\quad j=0,\ldots,m.$$

$f_{00},\ldots,f_{m0},f_{10},\ldots,f_{1m},\ldots,f_{0n},\ldots,f_{mn}$ の順に並べて

$$
\begin{array}{l}
(10\cdots0)\boldsymbol{F}_0+(0\cdots0)\boldsymbol{F}_1+\cdots+(0\cdots0)\boldsymbol{F}_n=b_{00}\\
(01\cdots0)\boldsymbol{F}_0+(0\cdots0)\boldsymbol{F}_1+\cdots+(0\cdots0)\boldsymbol{F}_n=b_{10}\\
\vdots\\
(0\cdots01)\boldsymbol{F}_0+(0\cdots0)\boldsymbol{F}_1+\cdots+(0\cdots0)\boldsymbol{F}_n=b_{m0}\\
(0\cdots0)\boldsymbol{F}_0+(10\cdots0)\boldsymbol{F}_1+\cdots+(0\cdots0)\boldsymbol{F}_n=b_{01}\\
(0\cdots0)\boldsymbol{F}_0+(0\cdots01)\boldsymbol{F}_1+\cdots+(0\cdots0)\boldsymbol{F}_n=b_{m1}\\
\vdots\\
(0\cdots0)\boldsymbol{F}_0+\cdots+(10\cdots0)\boldsymbol{F}_{n-1}+(0\cdots0)\boldsymbol{F}_n=b_{0n-1}\\
(0\cdots0)\boldsymbol{F}_0+\cdots+(0\cdots01)\boldsymbol{F}_{n-1}+(0\cdots0)\boldsymbol{F}_n=b_{mn-1}\\
(0\cdots0)\boldsymbol{F}_0+(0\cdots0)\boldsymbol{F}_1+\cdots+(10\cdots0)\boldsymbol{F}_n=b_{0n}\\
(0\cdots0)\boldsymbol{F}_0+(0\cdots0)\boldsymbol{F}_1+\cdots+(01\cdots0)\boldsymbol{F}_n=b_{1n}\\
\vdots\\
(0\cdots0)\boldsymbol{F}_0+(0\cdots0)\boldsymbol{F}_1+\cdots+(0\cdots01)\boldsymbol{F}_n=b_{mn}
\end{array}
$$



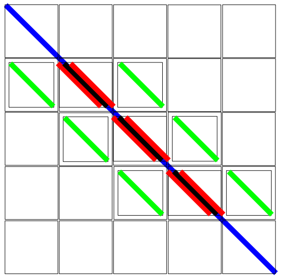




ただし、

$$\boldsymbol{F}_k\equiv\begin{pmatrix}f_{0k}\\ \vdots\\ f_{mk}\end{pmatrix}$$

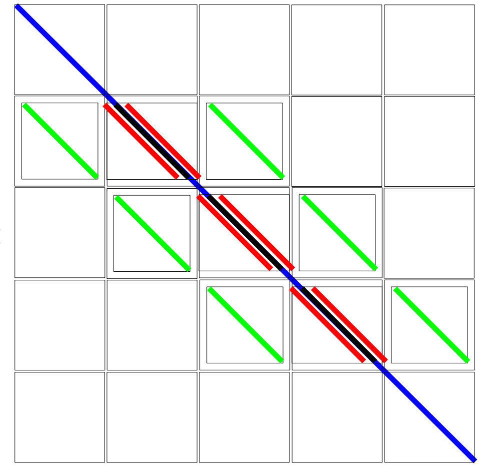
- 全部まとめると



$\Leftrightarrow \boldsymbol{AF} = \boldsymbol{b}$

$$
\begin{aligned}
&(10\cdots00)\boldsymbol{F}_0 + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_1 + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_2 + \cdots = b_{00}\\
&\qquad\ddots\\
&(00\cdots01)\boldsymbol{F}_0 + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_1 + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_2 + \cdots = b_{m0}\\
&(00\cdots00)\boldsymbol{F}_0 + (10\cdots00)\boldsymbol{F}_1 + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_2 + \cdots = b_{01}\\
&(0\gamma\cdots00)\boldsymbol{F}_0 + (\beta\alpha\beta\cdots0)\boldsymbol{F}_1 + (0\gamma\cdots00)\boldsymbol{F}_2 + \cdots = 0\\
&\qquad\ddots \qquad\qquad \ddots\ \ddots\ \ddots\\
&(00\cdots\gamma0)\boldsymbol{F}_0 + (0\cdots\beta\alpha\beta)\boldsymbol{F}_1 + (00\cdots\gamma0)\boldsymbol{F}_2 + \cdots = 0\\
&(00\cdots00)\boldsymbol{F}_0 + (00\cdots01)\boldsymbol{F}_1 + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_2 + \cdots = b_{m1}\\
&\qquad\vdots\\
&\cdots + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_{n-2} + (10\cdots00)\boldsymbol{F}_{n-1} + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_n = b_{0n-1}\\
&\cdots + (0\gamma\cdots00)\boldsymbol{F}_{n-2} + (\beta\alpha\beta\cdots0)\boldsymbol{F}_{n-1} + (0\gamma\cdots00)\boldsymbol{F}_n = 0\\
&\qquad\qquad\ddots\\
&\cdots + (00\cdots\gamma0)\boldsymbol{F}_{n-2} + (0\cdots\beta\alpha\beta)\boldsymbol{F}_{n-1} + (00\cdots\gamma0)\boldsymbol{F}_n = 0\\
&\cdots + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_{n-2} + (00\cdots01)\boldsymbol{F}_{n-1} + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_n = b_{mn-1}\\
&\cdots + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_{n-2} + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_{n-1} + (10\cdots00)\boldsymbol{F}_n = b_{0n}\\
&\qquad\qquad\ddots\\
&\cdots + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_{n-2} + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_{n-1} + (00\cdots01)\boldsymbol{F}_n = b_{mn}
\end{aligned}
$$

- 行列で表現すれば、　$\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{b}$

ただし、 $$\boldsymbol{A}\equiv\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \cdots & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{\mathcal{A}} & \boldsymbol{\Gamma} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{\mathcal{A}} & \boldsymbol{\Gamma} \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} =$$  $$\boldsymbol{F}\equiv\begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_0 \\ \boldsymbol{F}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}_{n-1} \\ \boldsymbol{F}_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}\equiv\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_0 \\ \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{n-1} \\ \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{F}_k\equiv\begin{pmatrix} f_{0k} \\ \vdots \\ f_{mk} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_0\equiv\begin{pmatrix} b_{00} \\ \vdots \\ b_{m0} \end{pmatrix},\boldsymbol{b}_n\equiv\begin{pmatrix} b_{0n} \\ \vdots \\ b_{mn} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_k\equiv\begin{pmatrix} b_{0k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{mk} \end{pmatrix},$$

$$k=,1,\ldots,n-1.$$

$$\alpha\equiv-2(h^{\text{¡}\ 2}+\ell^{\text{¡}\ 2}),\beta\equiv\ell^{\text{¡}\ 2},\gamma\equiv h^{\text{¡}\ 2}.$$

レポート(2)

学籍番号･氏名を記し提出してください。

- 平衡状態でない場合の熱伝導方程式を差分法で解く方法について考えてください
解くべき連立方程式と反復法の手順はどのようになりますか？

授業レポート用紙：氏名（　　　　　　　　　　）学籍番号(　　　　　　　　)

2019年10月7日(月)

できれば授業の感想も書いてください。

授業レポート用紙:氏名(　　　　　　　)学籍番号(　　　　　　)

平衡状態でない場合の熱伝導方程式を差分法で解く方法について考えてください

時間変化を扱うので時間 t を変数に加え、離散化する; $f^q{}_{jk}=f(t=q\tau,x=jh,y=k\ell)$

熱伝導方程式: $$\frac{\partial f}{\partial t}(x,y)=\chi[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}]f(x,y)$$

差分近似: $$\frac{f_{jk}^{q+1}-f_{jk}^{q}}{\tau}=\frac{f_{j+1k}^{q}-2f_{jk}^{q}+f_{j-1k}^{q}}{h^2}+\frac{f_{jk+1}^{q}-2f_{jk}^{q}+f_{jk-1}^{q}}{\ell^2}$$

差分近似を用いて微小時間経過後の関数値を求めれば

陽解法: $$f_{jk}^{q+1}=\left[1-\frac{2\tau}{h^2}-\frac{2\tau}{\ell^2}\right]f_{jk}^{q}+\tau\left[\frac{f_{j+1k}^{q}+f_{j-1k}^{q}}{h^2}+\frac{f_{jk+1}^{q}+f_{jk-1}^{q}}{\ell^2}\right]$$

ただし、$j=1,\ldots,n-1,\ k=1,\ldots,m-1$ が得られる。

右辺は全て$t=q\tau$ 時点での値なので、計算することができ、$q=0$すなわち$t=0$の値から順に更新すれば時間経過に沿った関数値の変化を求めることができる。

$f_{0k}^{q+1},f_{mk}^{q+1},f_{j0}^{q+1},f_{jn}^{q+1}$ は境界条件から定める

2019年10月7日(月)　　　できれば授業の感想も書いてください。