授業スケジュール

第01回(09/30):熱伝導方程式の導出
第02回(10/07):差分法の基礎
10/14 体育の日
第03回(10/21):差分法の解法
10/28 休講...................................... 岡野出張のため休講
11/11 学生祭
第04回(11/12):熱伝導方程式の解法.... 火曜日ですが月曜授業です。
第05回(11/18):有限要素法の準備
第06回(11/25):有限要素法の基底関数
第07回(12/02):有限要素法とGalerkin法
第08回(12/09):有限要素法の連立方程式
第09回(12/16):有限要素法と変分法
第10回(12/23):スペクトル法と代用電荷法
01/13 成人の日
第11回(01/20):差分法演習
第12回(01/27):有限要素法演習
第13回(02/03):代用電荷法演習
第14回(02/10):課題演習
第15回(02/13):まとめ.... 木曜日ですが月曜授業です。

計算科学特論

熱伝導方程式の解法

前回までのまとめ、今日の予定

- 熱伝導方程式の導出
  比熱・熱流(フーリエ則)からの導出
- 差分法の基礎（差分格子と差分近似）
  Taylor展開に基づく差分近似の導出
- 差分法の解法1（連立方程式の導出）
  Laplace方程式の差分近似

- 差分法の解法2（反復法、時間発展）
  反復解法(ガウス・ザイデル法、SOR法)
  熱伝導方程式の時間発展

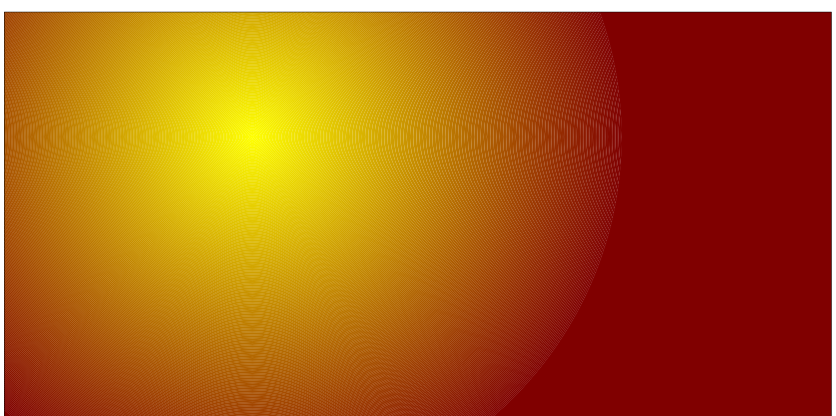
Laplace方程式

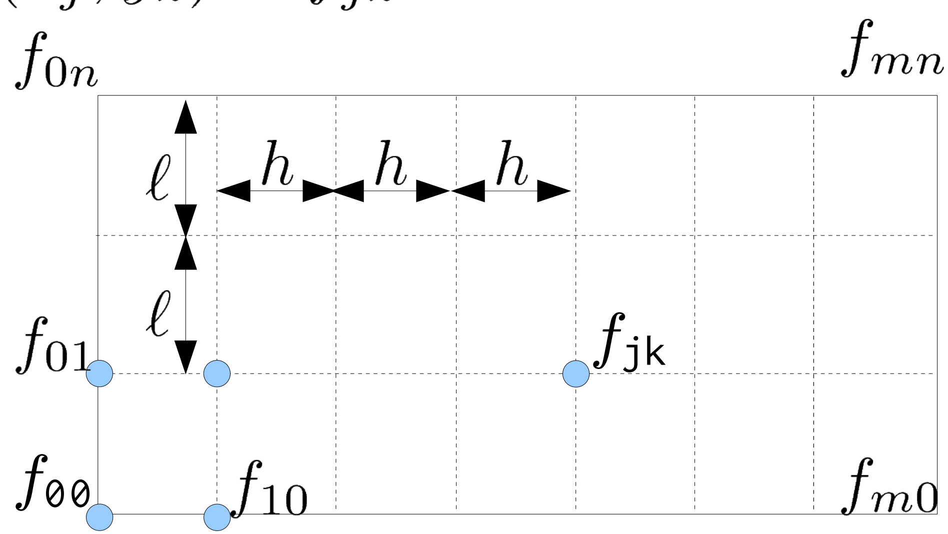
- 熱伝導方程式＋平衡状態→Laplace方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = c\lambda \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] f \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

境界条件: $f(x, y) = b(x, y) \quad (x, y) \in${境界}

- 問題領域と差分格子
  - 2次元長方形領域で等間隔格子を用います
    - 格子点座標: $(x_j, y_k) = (jh, k\ell)$
    - 格子点での関数値: $f(x_j, y_k) = f_{jk}$

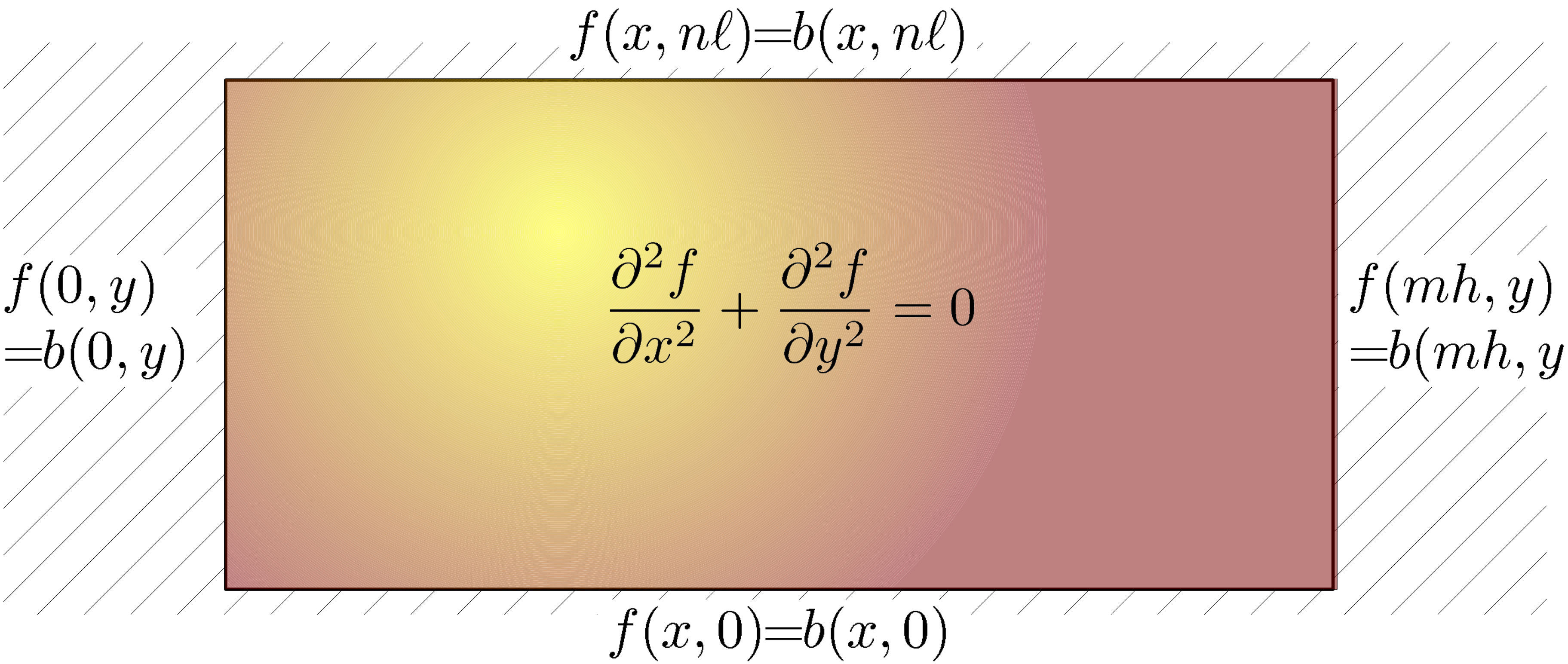




Laplace方程式の差分法

- 微分方程式： $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

  境界条件： $f(x, y) = b(x, y) \quad (x, y) \in$ {境界}

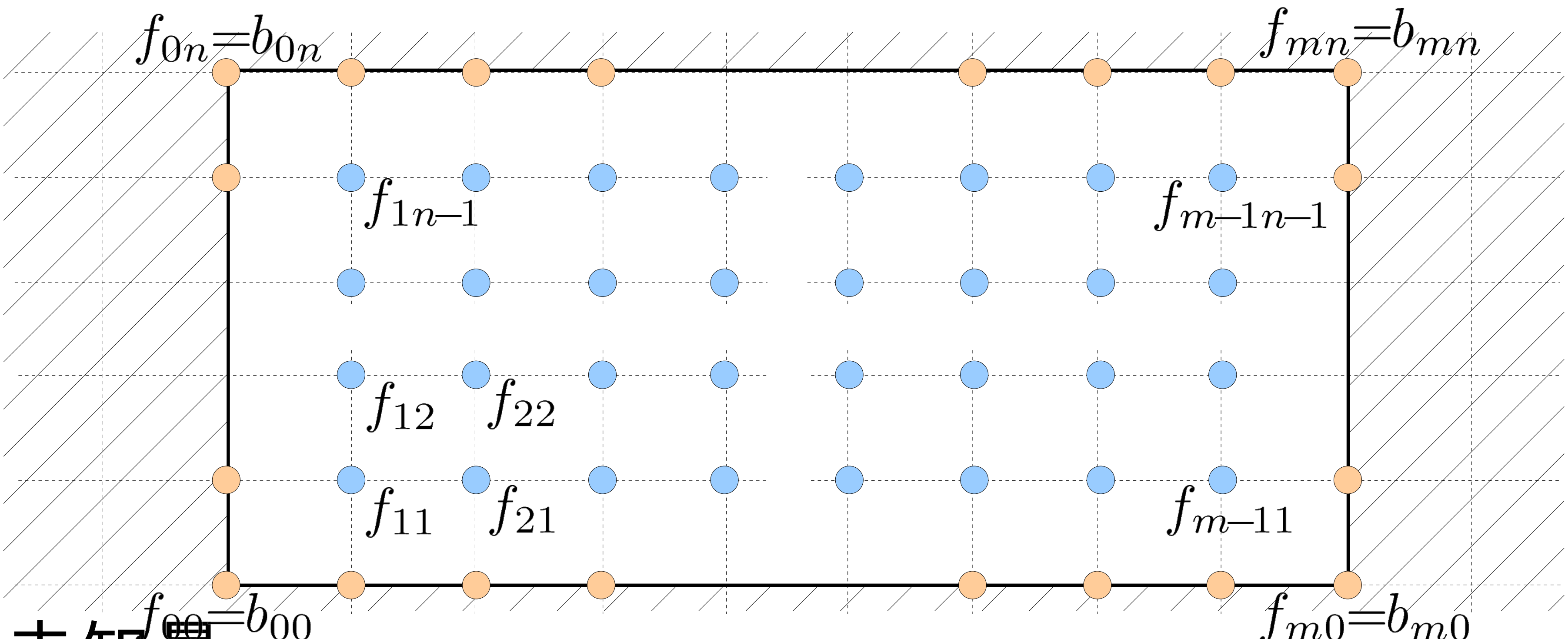


Laplace方程式の差分法

- 差分方程式: $\dfrac{f_{j+1k}-f_{jk}+f_{j-1k}}{h^2}+\dfrac{f_{jk+1}-f_{jk}+f_{jk-1}}{\ell^2}.$

  境界条件: $f_{j0}{=}b_{j0}{=}b(jh,0),\ f_{jm}{=}b_{jm}{=}b(jh,m\ell),$

  $f_{0k}{=}b_{0k}{=}b(0,k\ell),\ f_{nk}{=}b_{nk}{=}b(nh,k\ell).$



- 未知量:

  $f(jh,k\ell)\sim f_{jk}\quad j{=}1,\ldots,n{-}1,\ k{=}1,\ldots,m{-}1.$

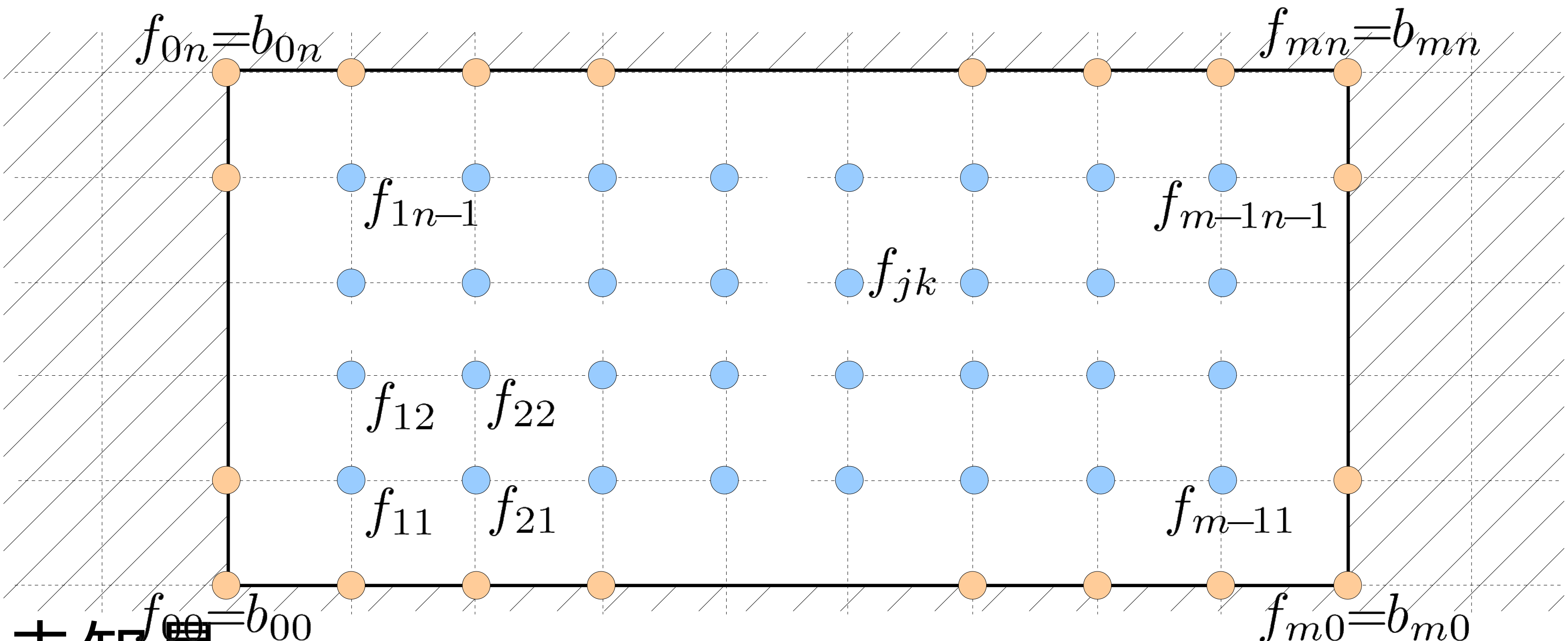
Laplace方程式の差分法

$(n\text{-}1)\times(m\text{-}1)$個

- 差分方程式: $\alpha f_{jk}+\beta(f_{j+1k}+f_{j-1k})+\gamma(f_{jk+1}+f_{jk-1})=0$

$2n+2m$ 個

境界条件: $f_{j0}=b_{j0}=b(jh,0)$, $f_{jm}=b_{jm}=b(jh,m\ell)$,
$f_{0k}=b_{0k}=b(0,k\ell)$, $f_{nk}=b_{nk}=b(nh,k\ell)$.



- 未知量: $f(jh,k\ell)\sim f_{jk}\quad j=1,\ldots,n-1, k=1,\ldots,m-1.$

「f_{jk} の関係式」$(j=1,\ldots,m$ -1, $k=1,\ldots,n$ -1$)$:

$$\alpha f_{jk}+\beta(f_{j+1k}+f_{j\text{ -}1k})+\gamma(f_{jk+1}+f_{jk\text{ -}1})=0$$

各項を$f_{00},f_{10},\ldots,f_{m0},f_{01},f_{11},\ldots,f_{m1},\ldots,f_{0n},\ldots,f_{mn},$の順に並べると

$$0f_{00}+0f_{10}+\ldots+\gamma f_{jk\text{-}1}+\ldots+\beta f_{j\text{-}1k}+\alpha f_{jk}+\beta f_{j+1k1}+\ldots+\gamma f_{jk+1}+\ldots 0f_{mn}$$

$$=(0\cdots0)\begin{pmatrix} f_{00} \\ \vdots \\ f_{m0} \end{pmatrix}+\cdots+(0\cdots0\overset{j}{\gamma}0\cdots0)\begin{pmatrix} f_{0k-1} \\ \vdots \\ f_{mk-1} \end{pmatrix}+$$

$$(0\cdots0\overset{j-1}{\beta}\ \overset{j}{\alpha}\ \overset{j+1}{\beta}0\cdots0)\begin{pmatrix} f_{0k} \\ \vdots \\ f_{mk} \end{pmatrix}+(0\cdots0\overset{j}{\gamma}0\cdots0)\begin{pmatrix} f_{0k+1} \\ \vdots \\ f_{mk+1} \end{pmatrix}+(0\cdots0)\begin{pmatrix} f_{0k+2} \\ \vdots \\ f_{mk+2} \end{pmatrix}+\cdots=0$$

$$\mathbf{0}\boldsymbol{F}_0+\cdots+\boldsymbol{\gamma}_j\boldsymbol{F}_{k-1}+\boldsymbol{\alpha}_j\boldsymbol{F}_k+\boldsymbol{\gamma}_j\boldsymbol{F}_{k+1}+\cdots+\mathbf{0}\boldsymbol{F}_n=0$$

$$[\mathbf{0},\ldots,\boldsymbol{\gamma}_j,\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\gamma}_j,\ldots,\mathbf{0}][\boldsymbol{F}_0,\ldots,\boldsymbol{F}_{k-1},\boldsymbol{F}_k,\boldsymbol{F}_{k+1},\ldots,\boldsymbol{F}_n]^{\mathrm{T}}=0$$

「f_{jk} の関係式」($j=0,\ m$ または $k=0,\ n$):

$$f_{jk}=b_{jk}$$

各項を$f_{00},f_{10},\ldots,f_{m0},f_{01},f_{11},\ldots,f_{m1},\ldots,f_{0n},\ldots,f_{mn},$の順に並べると

$0f_{00}+0f_{10}+\ldots+1f_{jk}+\ldots0f_{mn}$

($j=0,\ m$ または $k=0,\ n$)なので

$$=(0\cdots0)\begin{pmatrix} f_{00} \\ \vdots \\ f_{m0} \end{pmatrix}+\cdots+\begin{array}{c} \qquad\quad\ \ j \\ (0\cdots0\,1\,0\cdots0) \end{array}\begin{pmatrix} f_{0k} \\ \vdots \\ f_{mk} \end{pmatrix}+\cdots+(0\cdots0)\begin{pmatrix} f_{0n} \\ \vdots \\ f_{mn} \end{pmatrix}=b_{jk}$$

$$\mathbf{0}\boldsymbol{F}_0+\cdots+\mathbf{1}_j\boldsymbol{F}_k+\cdots+\mathbf{0}\boldsymbol{F}_n=0$$

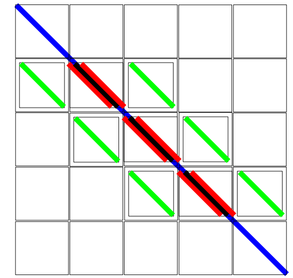
$$\mathbf{1}_j\boldsymbol{F}_0+\cdots+\mathbf{0}\boldsymbol{F}_1+\cdots+\mathbf{0}\boldsymbol{F}_n=0 \quad j=0,\ldots,m,$$

$$\mathbf{0}\boldsymbol{F}_0+\cdots+\mathbf{1}_0\boldsymbol{F}_k+\cdots+\mathbf{0}\boldsymbol{F}_n=0 \quad k=1,\ldots,n-1$$

$$\mathbf{0}\boldsymbol{F}_0+\cdots+\mathbf{1}_m\boldsymbol{F}_k+\cdots+\mathbf{0}\boldsymbol{F}_n=0 \quad k=1,\ldots,n-1$$

$$\mathbf{0}\boldsymbol{F}_0+\cdots+\mathbf{0}\boldsymbol{F}_1+\cdots+\mathbf{1}_j\boldsymbol{F}_n=0 \quad j=0,\ldots,m,$$

- 全部まとめると

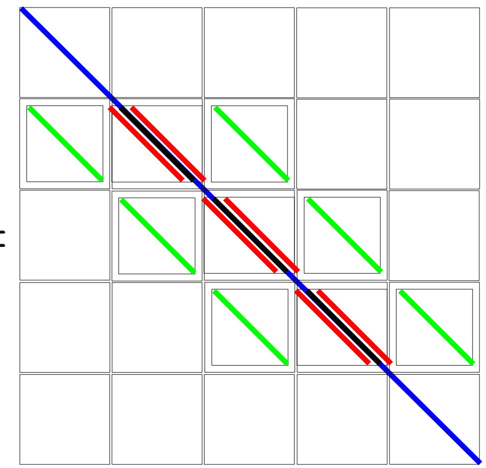


$$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{b}$$

$$
\begin{array}{l}
(10\cdots00)\boldsymbol{F}_0 + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_1 + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_2 + \cdots = b_{00} \\
\quad\ddots \\
(00\cdots01)\boldsymbol{F}_0 + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_1 + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_2 + \cdots = b_{m0} \\
(00\cdots00)\boldsymbol{F}_0 + (10\cdots00)\boldsymbol{F}_1 + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_2 + \cdots = b_{01} \\
(0\gamma\cdots00)\boldsymbol{F}_0 + (\beta\alpha\beta\cdots0)\boldsymbol{F}_1 + (0\gamma\cdots00)\boldsymbol{F}_2 + \cdots = 0 \\
\quad\ddots \qquad\qquad\quad \ddots\ddots\ddots \\
(00\cdots\gamma0)\boldsymbol{F}_0 + (0\cdots\beta\alpha\beta)\boldsymbol{F}_1 + (00\cdots\gamma0)\boldsymbol{F}_2 + \cdots = 0 \\
(00\cdots00)\boldsymbol{F}_0 + (00\cdots01)\boldsymbol{F}_1 + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_2 + \cdots = b_{m1} \\
\quad\vdots \\
\cdots + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_{n-2} + (10\cdots00)\boldsymbol{F}_{n-1} + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_n = b_{0n-1} \\
\cdots + (0\gamma\cdots00)\boldsymbol{F}_{n-2} + (\beta\alpha\beta\cdots0)\boldsymbol{F}_{n-1} + (0\gamma\cdots00)\boldsymbol{F}_n = 0 \\
\qquad\qquad\ddots \\
\cdots + (00\cdots\gamma0)\boldsymbol{F}_{n-2} + (0\cdots\beta\alpha\beta)\boldsymbol{F}_{n-1} + (00\cdots\gamma0)\boldsymbol{F}_n = 0 \\
\cdots + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_{n-2} + (00\cdots01)\boldsymbol{F}_{n-1} + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_n = b_{mn-1} \\
\cdots + (10\cdots00)\boldsymbol{F}_{n-2} + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_{n-1} + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_n = b_{0n} \\
\qquad\qquad\ddots \\
\cdots + (00\cdots01)\boldsymbol{F}_{n-2} + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_{n-1} + (00\cdots00)\boldsymbol{F}_n = b_{mn}
\end{array}
$$

- 行列で表現すれば、 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{b}$

ただし、 $$\boldsymbol{A} \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \cdots & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{\mathcal{A}} & \boldsymbol{\Gamma} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{\mathcal{A}} & \boldsymbol{\Gamma} \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} =$$



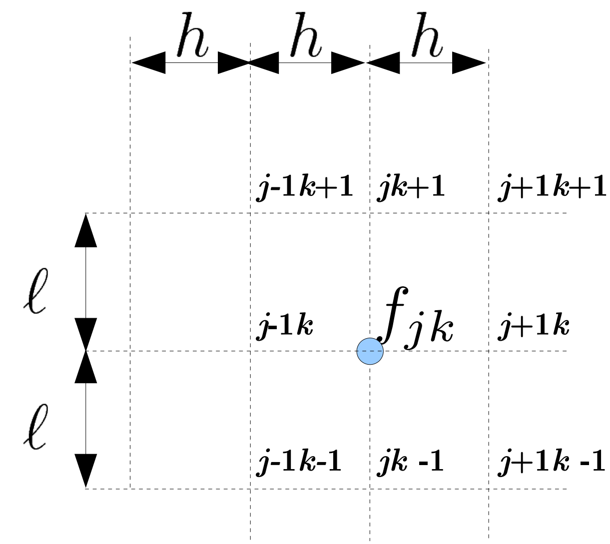
$$\boldsymbol{F} \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_0 \\ \boldsymbol{F}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}_{n-1} \\ \boldsymbol{F}_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b} \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_0 \\ \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{n-1} \\ \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{F}_k \equiv \begin{pmatrix} f_{0k} \\ \vdots \\ f_{mk} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_0 \equiv \begin{pmatrix} b_{00} \\ \vdots \\ b_{m0} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_k \equiv \begin{pmatrix} b_{0k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{mk} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_n \equiv \begin{pmatrix} b_{0n} \\ \vdots \\ b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$k =, 1, \ldots, m-1.$$

$$\alpha \equiv -2(h^{-2} + \ell^{-2}), \beta \equiv \ell^{-2}, \gamma \equiv h^{-2}.$$

反復解法



- Laplace方程式の差分近似:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{f_{jk+1}-2f_{jk}+f_{jk-1}}{h^2}+\frac{f_{j+1k}-2f_{jk}+f_{j-1k}}{\ell^2}=0$$

f_{jk} に注目すれば、

$$\left(\frac{2}{h^2}+\frac{2}{\ell^2}\right)f_{jk}=\frac{f_{jk+1}+f_{jk-1}}{h^2}+\frac{f_{j+1k}+f_{j-1k}}{\ell^2}$$

$$f_{jk}^{(p+1)}=\left(\frac{f_{jk+1}^{(p)}+f_{jk-1}^{(p)}}{h^2}+\frac{f_{j+1k}^{(p)}+f_{j-1k}^{(p)}}{\ell^2}\right)\left(\frac{2}{h^2}+\frac{2}{\ell^2}\right)^{-1}$$

Laplace方程式の反復解法

- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{b}$　を解けばLaplace方程式が解ける
- $\boldsymbol{A}$ は対角成分以外はゼロがほとんど
- $\boldsymbol{A}$ の対角成分を $\boldsymbol{D} \equiv \mathrm{diag}\left(d_{00}, \ldots, d_{nm}\right)$ として、

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{F}$$

より

$$\boldsymbol{F}^{(p+1)} = \boldsymbol{D}^{-1}[\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{F}^{(p)}]$$

を繰り返して

$$\boldsymbol{F}^{(p)} \to \boldsymbol{F} \quad (p \to \infty)$$

となることを期待するのが反復法

Laplace方程式の反復解法

- 例示された方法をJacobi法と呼ぶ
- Jacobi法の更新式

$$\boldsymbol{F}^{(p+1)} = \boldsymbol{D}^{-1}[\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{F}^{(p)}]$$

中の$\boldsymbol{b}$を$\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}(=\boldsymbol{b})$に置き換えると

$$\boldsymbol{F}^{(p+1)} = \boldsymbol{D}^{-1}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{F} + (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{F}^{(p)}]$$

$$= \boldsymbol{D}^{-1}[(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{A} - \boldsymbol{D})\boldsymbol{F} + (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{F}^{(p)}]$$

$$= \cancel{\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{D}}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{D})(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}^{(p)})$$

右辺第1項の$\boldsymbol{F}$を移項すれば

$$\boldsymbol{F}^{(p+1)} - \boldsymbol{F} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A})(\boldsymbol{F}^{(p)} - \boldsymbol{F})$$

$\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A})$は$\boldsymbol{F}$に依らないので$\boldsymbol{F}^{(\mathrm{p})}\rightarrow\boldsymbol{F}$のためには

$$\lim_{n\to\infty} ||[\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A})]^n|| = 0$$

Laplace方程式の反復解法

- Jacobi法の更新式を成分毎に示せば

$$F_j^{(p+1)} = \frac{1}{a_{jj}}\left[b_j + a_{jj}F_j^{(p)} - \sum_{l=1}^{N} a_{jl}F_l^{(p)}\right] = \frac{1}{a_{jj}}\left[b_j - \sum_{l\neq j} a_{jl}F_l^{(p)}\right]$$

$$= \frac{1}{a_{jj}}\left[b_j - \sum_{l=1}^{j-1} a_{jl}F_l^{(p)} - \sum_{l=j+1}^{N} a_{jl}F_l^{(p)}\right]$$

- j=1,2,…の順に計算するなら、$F_j^{(p+1)}$の計算時には、$F_1{}^{(p+1)},\ldots,F_{j-1}{}^{(p+1)}$の計算は済んでいるはず

$$F_j^{(p+1)} = \frac{1}{a_{jj}}\left[b_j - \sum_{l=1}^{j-1} a_{jl}F_l^{(p+1)} - \sum_{l=j+1}^{N} a_{jl}F_l^{(p)}\right]$$

と先取りする方法をGauss-Seidel法と呼ぶ。

Laplace方程式の反復解法

- 連立方程式$AF=b$において$A=L+D+U$とすれば（但しLはAの下三角、Dは対角、Uは上三角成分）

Jacobi法の更新式は

$$F^{(p+1)} = D^{-1}[b - (L+U)F^{(p)}]$$

Gauss-Seidel法の更新式は

$$F^{(p+1)} = D^{-1}[b - LF^{(p+1)} - UF^{(p)}]$$

- 反復法の収束のためにJacobi法では

$$F - F^{(p+1)} = -D^{-1}(L+U)(F - F^{(p)})$$

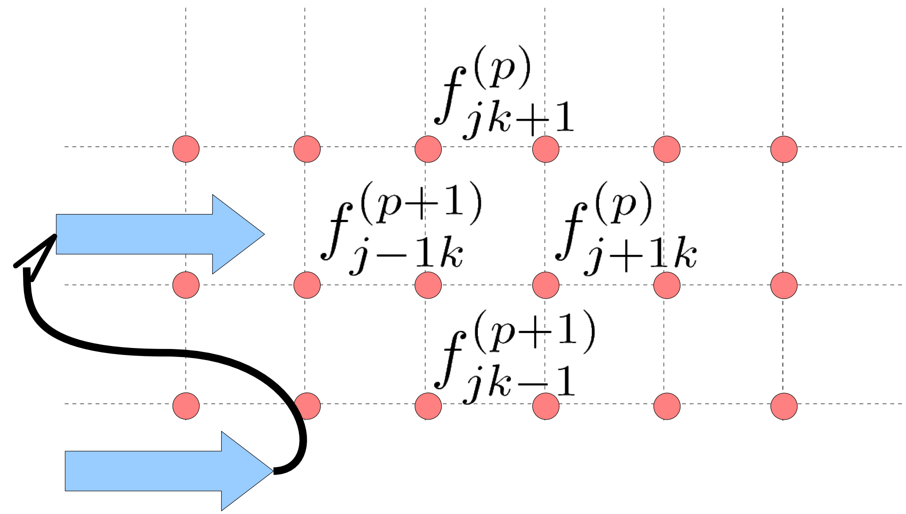
Gauss-Seidel法では

$$F - F^{(p+1)} = -(I + D^{-1}L)^{-1}D^{-1}U(F - F^{(p)})$$

が、それぞれ0に収束する必要がある。
（但しIは単位行列）

反復解法

- 順番に更新するなら、f_{jk} の更新時には、f_{j-1k}, f_{jk-1} は新しくなっている
- ガウス･ザイデル法



$$f^{(p+1)}_{jk} = \left(\frac{f^{(p)}_{j+1k} + f^{(p+1)}_{j-1k}}{h^2} + \frac{f^{(p)}_{jk+1} + f^{(p+1)}_{jk-1}}{\ell^2} \right) \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{\ell^2} \right)^{-1}$$

※単に順序通りに更新すれば良い
方程式や境界条件に合せて更新順序を決めることも考えられる

反復解法

- ガウス･ザイデル法の更新量:
  $\delta f_{jk} = {f_{jk}}^{(p+1)} - {f_{jk}}^{(p)}$

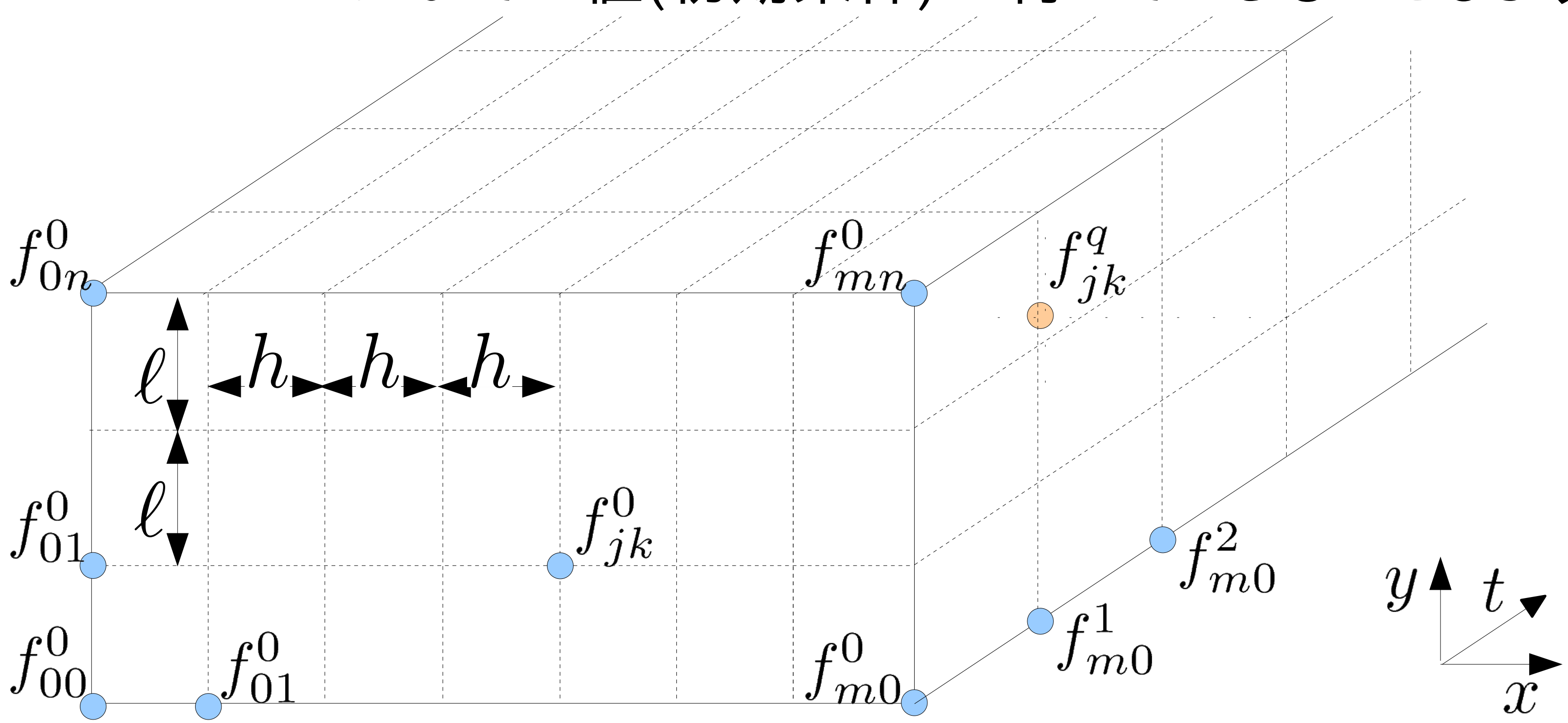
$$= \left(\frac{f_{j+1k}^{(p)} + f_{j-1k}^{(p+1)}}{h^2} + \frac{f_{jk+1}^{(p)} + f_{jk-1}^{(p+1)}}{\ell^2} \right) \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{\ell^2} \right)^{-1} - f_{jk}^{(p)}$$

- ガウス･ザイデル法: ${f_{jk}}^{(p+1)} = {f_{jk}}^{(p)} + \delta f_{jk}$

- SOR法: ${f_{jk}}^{(p+1)} = {f_{jk}}^{(p)} + \omega \delta f_{jk}$
  $\omega > 1$ は問題に応じて適当に決める $(1.2,\ 1.5 \ldots)$

熱伝導方程式の初期値問題

- 問題領域と差分格子
  - Laplace方程式と同じ領域と空間格子を用います
    - 座標: $(t_q, x_j, y_k) = (q\tau, jh, k\ell)$
      時間刻み: τ
    - 関数値: $f(t_q, x_j, y_k) = f_{jk}^q$
      あらかじめ x=0, mh, y=0, $n\ell$での値(境界条件)
      t=0 での値(初期条件)が判っているものとします。



熱伝導方程式の差分近似

- 熱伝導方程式: $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,y) = \chi[\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}]f(x,y)$

近似: $\dfrac{f_{jk}^{q+1} - f_{jk}^{q}}{\tau} = \dfrac{f_{j+1k}^{q} - 2f_{jk}^{q} + f_{j-1k}^{q}}{h^2} + \dfrac{f_{jk+1}^{q} - 2f_{jk}^{q} + f_{jk-1}^{q}}{\ell^2}$

陽解法: $f_{jk}^{q+1} = \left[1 - \dfrac{2\tau}{h^2} - \dfrac{2\tau}{\ell^2}\right] f_{jk}^{q} + \tau \left[\dfrac{f_{j+1k}^{q} + f_{j-1k}^{q}}{h^2} + \dfrac{f_{jk+1}^{q} + f_{jk-1}^{q}}{\ell^2}\right]$

ただし、$j = 1, \ldots, n-1, k = 1, \ldots, m-1,$
$f_{0k}^{q+1}, f_{mk}^{q+1}, f_{j0}^{q+1}, f_{jn}^{q+1}$ は境界条件から定める

※時間方向の差分は前進差分なので　$O(\tau)$

授業レポート用紙:氏名(　　　　　　　　　)学籍番号(　　　　　　　)

平衡状態でない場合の熱伝導方程式を差分法で解く方法について考えてください

時間変化を扱うので時間 t を変数に加え、離散化する; $f^q{}_{jk}=f(t=q\tau,x=jh,y=k\ell)$

熱伝導方程式: $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,y)=\chi[\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}]f(x,y)$

差分近似: $$\frac{f_{jk}^{q+1}-f_{jk}^q}{\tau}=\frac{f_{j+1k}^q-2f_{jk}^q+f_{j-1k}^q}{h^2}+\frac{f_{jk+1}^q-2f_{jk}^q+f_{jk-1}^q}{\ell^2}$$

差分近似を用いて微小時間経過後の関数値を求めれば

陽解法: $$f_{jk}^{q+1}=\left[1-\frac{2\tau}{h^2}-\frac{2\tau}{\ell^2}\right]f_{jk}^q+\tau\left[\frac{f_{j+1k}^q+f_{j-1k}^q}{h^2}+\frac{f_{jk+1}^q+f_{jk-1}^q}{\ell^2}\right]$$

ただし、$j=1,\ldots,n-1,\ k=1,\ldots,m-1$ が得られる。

右辺は全て$t=q\tau$ 時点での値なので、計算することができ、$q=0$すなわち$t=0$の値から順に更新すれば時間経過に沿った関数値の変化を求めることができる。

$f_{0k}^{q+1},f_{mk}^{q+1},f_{j0}^{q+1},f_{jn}^{q+1}$ は境界条件から定める

2019年10月7日(月)　　できれば授業の感想も書いてください。

クランク･ニコルソン法

- 時間方向に中心差分を用いる、

$$\frac{f_{jk}^{q+1}-f_{jk}^{q-1}}{2\tau}=\frac{f_{j+1k}^{q}-2f_{jk}^{q}+f_{j-1k}^{q}}{h^2}+\frac{f_{jk+1}^{q}-2f_{jk}^{q}+f_{jk-1}^{q}}{\ell^2}$$

※全ての差分近似が2次精度、$O(\tau^2,h^2,\ell^2)$

$$f_{jk}^{q+1}=f_{jk}^{q-1}+2\tau\left(\frac{f_{j+1k}^{q}-2f_{jk}^{q}+f_{j-1k}^{q}}{h^2}+\frac{f_{jk+1}^{q}-2f_{jk}^{q}+f_{jk-1}^{q}}{\ell^2}\right)$$

陽解法↑で更新するには f_{jk}^{q} をどうやって定める？

- $f(t\pm\tau,x,y)=f\pm\tau f'+\frac{\tau^2}{2}f''+\dots$ を用いれば、

$$\frac{f_{jk}^{q+1}+f_{jk}^{q-1}}{2}=f_{jk}^{q}+O(\tau^2)$$

- 2次精度の差分近似、

$$\frac{f_{jk}^{q+1}-f_{jk}^{q-1}}{2\tau}=\frac{f_{j+1k}^{q+1}-2f_{jk}^{q+1}+f_{j-1k}^{q+1}}{2h^2}+\frac{f_{jk+1}^{q+1}-2f_{jk}^{q+1}+f_{jk-1}^{q+1}}{2\ell^2}$$
$$+\frac{f_{j+1k}^{q-1}-2f_{jk}^{q-1}+f_{j-1k}^{q-1}}{2h^2}+\frac{f_{jk+1}^{q-1}-2f_{jk}^{q-1}+f_{jk-1}^{q-1}}{2\ell^2}$$

- 更新式、

$$\left(\frac{1}{\tau}+\frac{2}{h^2}+\frac{2}{\ell^2}\right)f_{jk}^{q+1}-\frac{f_{j+1k}^{q+1}+f_{j-1k}^{q+1}}{h^2}-\frac{f_{jk+1}^{q+1}+f_{jk-1}^{q+1}}{\ell^2}$$
$$=\left(\frac{1}{\tau}-\frac{2}{h^2}-\frac{2}{\ell^2}\right)f_{jk}^{q-1}+\frac{f_{j+1k}^{q-1}+f_{j-1k}^{q-1}}{h^2}+\frac{f_{jk+1}^{q-1}+f_{jk-1}^{q-1}}{\ell^2}$$

- 右辺はあらかじめ計算することができる、
→更新式を連立方程式と見做して解けば良い

※ 2τ毎にしか関数値が求まらない

- あらかじめ $\tau/2$ の時間刻みを用いる、

$$\frac{f_{jk}^{q+1}-f_{jk}^{q}}{2(\tau/2)}=\frac{f_{j+1k}^{q+1/2}-2f_{jk}^{q+1/2}+f_{j-1k}^{q+1/2}}{h^2}+\frac{f_{jk+1}^{q+1/2}-2f_{jk}^{q+1/2}+f_{jk-1}^{q+1/2}}{\ell^2}$$

$$\frac{f_{jk}^{q+1}-f_{jk}^{q}}{\tau}=\frac{f_{j+1k}^{q+1}-2f_{jk}^{q+1}+f_{j-1k}^{q+1}}{2h^2}+\frac{f_{jk+1}^{q+1}-2f_{jk}^{q+1}+f_{jk-1}^{q+1}}{2\ell^2}$$
$$+\frac{f_{j+1k}^{q}-2f_{jk}^{q}+f_{j-1k}^{q}}{2h^2}+\frac{f_{jk+1}^{q}-2f_{jk}^{q}+f_{jk-1}^{q}}{2\ell^2}$$

- 更新式、

$$\left(\frac{2}{\tau}+\frac{2}{h^2}+\frac{2}{\ell^2}\right)f_{jk}^{q+1}-\frac{f_{j+1k}^{q+1}+f_{j-1k}^{q+1}}{h^2}-\frac{f_{jk+1}^{q+1}+f_{jk-1}^{q+1}}{\ell^2}$$
$$=\left(\frac{2}{\tau}-\frac{2}{h^2}-\frac{2}{\ell^2}\right)f_{jk}^{q}+\frac{f_{j+1k}^{q}+f_{j-1k}^{q}}{h^2}+\frac{f_{jk+1}^{q}+f_{jk-1}^{q}}{\ell^2}$$

レポート(3)

学籍番号･氏名を記し提出してください。

- 熱伝導方程式の解法にクランク･ニコルソン法を用いた場合に解くことになる連立方程式の係数行列を具体的に示してください

※授業で示したLaplace方程式の解法の場合のような成分がゼロの箇所とそれ以外とで分布の様子が判るような表現を用いてください

格子点データの更新(CN法)

差分近似

$$\frac{f_{jk}^{q+1}-f_{jk}^{q}}{\tau}=\frac{1}{2}\left[\frac{f_{j+1k}^{q+1}-2f_{jk}^{q+1}+f_{j-1k}^{q+1}}{h^2}+\frac{f_{j+1k}^{q}-2f_{jk}^{q}+f_{j-1k}^{q}}{h^2}\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{f_{jk+1}^{q+1}-2f_{jk}^{q+1}+f_{jk-1}^{q+1}}{\ell^2}+\frac{f_{jk+1}^{q}-2f_{jk}^{q}+f_{jk-1}^{q}}{\ell^2}\right]$$

更新式

$$\left[1+\frac{\tau}{h^2}+\frac{\tau}{\ell^2}\right]f_{jk}^{q+1}-\frac{f_{j+1k}^{q+1}+f_{j-1k}^{q+1}}{2h^2}-\frac{f_{jk+1}^{q+1}+f_{jk-1}^{q+1}}{2\ell^2}$$
$$=\left[1-\frac{\tau}{h^2}-\frac{\tau}{\ell^2}\right]f_{jk}^{q}+\frac{f_{j+1k}^{q}+f_{j-1k}^{q}}{2h^2}+\frac{f_{jk+1}^{q}+f_{jk-1}^{q}}{2\ell^2}$$

- 行列表現 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}^{q+1}\boldsymbol{F}^{q+1}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{R}}^{q}\boldsymbol{F}^{q}$
- 右辺は既知なので計算できる
- 左辺は連立方程式を解いて求める
CN法は**陰解法**

格子点データの更新(CN法)

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}^{q+1}\boldsymbol{F}^{q+1}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{R}}^{q}\boldsymbol{F}^{q}$$

陽解法 $\boldsymbol{F}^{q+1}=\boldsymbol{A}^{q}\boldsymbol{F}^{q}$ と比較して、

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{R}}^{q}\equiv\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_0^q & \boldsymbol{0} & \cdots & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\Gamma}' & {}^{\mathrm{R}}\!\boldsymbol{\mathcal{A}}_1^q & \boldsymbol{\Gamma}' & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{\Gamma}' & {}^{\mathrm{R}}\!\boldsymbol{\mathcal{A}}_{n-1}^q & \boldsymbol{\Gamma}' \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_n^q \end{pmatrix}, {}^{\mathrm{R}}\!\boldsymbol{\mathcal{A}}_k^q=\begin{pmatrix} b_{0k}^q & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \beta' & \alpha_- & \beta' & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \beta' & \alpha_- & \beta' \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{mk}^q \end{pmatrix}, \begin{aligned} \boldsymbol{B}_0^q &= \mathrm{diag}\,(b_{00}^q,\ldots,b_{m0}^q), \\ \boldsymbol{B}_n^q &= \mathrm{diag}(b_{0n}^q,\ldots,b_{mn}^q), \\ \boldsymbol{\Gamma}' &= \mathrm{diag}(0,\frac{1}{2\ell^2},\ldots,0), \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}^{q}\equiv\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_0^q & \boldsymbol{0} & \cdots & \cdots & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{\Gamma}' & {}^{\mathrm{L}}\!\boldsymbol{\mathcal{A}}_1^q & -\boldsymbol{\Gamma}' & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & & -\boldsymbol{\Gamma}' & {}^{\mathrm{L}}\!\boldsymbol{\mathcal{A}}_{n-1}^q & -\boldsymbol{\Gamma}' \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_n^q \end{pmatrix}, {}^{\mathrm{L}}\!\boldsymbol{\mathcal{A}}_k^q=\begin{pmatrix} b_{0k}^q & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\beta' & \alpha_+ & -\beta' & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & -\beta' & \alpha_+ & -\beta' \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{mk}^q \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \alpha_\pm &= \left[1\pm\frac{2\tau}{h^2}\pm\frac{2\tau}{\ell^2}\right], \\ \beta' &= \frac{1}{2h^2}. \end{aligned}$$

$$b_{jk}^q=f_{jk}^{q+1}/f_{jk}^q \quad (j=0,n\,\mathrm{or}\,k=0,m),$$

授業レポート用紙:氏名(　　　　　　　　　　　　　　)学生証番号(　　　　　　　　　　　　　　)

2019年10月21日(月)

できれば授業の感想も書いてください。

授業レポート用紙:氏名(　　　　　　　　　)学籍番号(　　　　　　　)

熱伝導方程式の解法にクランク・ニコルソン法を用いた場合の係数行列を示す

差分方程式：$\dfrac{f_{jk}^{q+1}-f_{jk}^{q}}{\tau}=$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{f_{j+1k}^{q+1}-2f_{jk}^{q+1}+f_{j-1k}^{q+1}}{h^2}+\frac{f_{j+1k}^{q}-2f_{jk}^{q}+f_{j-1k}^{q}}{h^2}\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{f_{jk+1}^{q+1}-2f_{jk}^{q+1}+f_{jk-1}^{q+1}}{\ell^2}+\frac{f_{jk+1}^{q}-2f_{jk}^{q}+f_{jk-1}^{q}}{\ell^2}\right]$$

を整理、左辺に時刻q+1、右辺にqの項を置いて更新式：

$$\left[1+\frac{\tau}{h^2}+\frac{\tau}{\ell^2}\right]f_{jk}^{q+1}-\frac{f_{j+1k}^{q+1}+f_{j-1k}^{q+1}}{2h^2}-\frac{f_{jk+1}^{q+1}+f_{jk-1}^{q+1}}{2\ell^2}$$

$$=\left[1-\frac{\tau}{h^2}-\frac{\tau}{\ell^2}\right]f_{jk}^{q}+\frac{f_{j+1k}^{q}+f_{j-1k}^{q}}{2h^2}+\frac{f_{jk+1}^{q}+f_{jk-1}^{q}}{2\ell^2}$$

を得る。

これを行列で表現すると $\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}^{q+1}\boldsymbol{F}^{q+1}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{R}}^{q}\boldsymbol{F}^{q}$

各行列の成分は、次の通り、

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{R}}^{q}\equiv\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_0^q & \boldsymbol{0} & \cdots & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{\Gamma}' & {}^{\mathrm{R}}\!\boldsymbol{\mathcal{A}}_1^q & \boldsymbol{\Gamma}' & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{\Gamma}' & {}^{\mathrm{R}}\!\boldsymbol{\mathcal{A}}_{n-1}^q & \boldsymbol{\Gamma}'\\ \boldsymbol{0} & \cdots & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_n^q\end{pmatrix},\quad {}^{\mathrm{R}}\!\boldsymbol{\mathcal{A}}_k^q=\begin{pmatrix}b_{0k}^q & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ \beta' & \alpha_- & \beta' & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & & \beta' & \alpha_- & \beta'\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{mk}^q\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}^{q}\equiv\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_0^q & \boldsymbol{0} & \cdots & \cdots & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{\Gamma}' & {}^{\mathrm{L}}\!\boldsymbol{\mathcal{A}}_1^q & -\boldsymbol{\Gamma}' & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{0} & & -\boldsymbol{\Gamma}' & {}^{\mathrm{L}}\!\boldsymbol{\mathcal{A}}_{n-1}^q & -\boldsymbol{\Gamma}'\\ \boldsymbol{0} & \cdots & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_n^q\end{pmatrix},\quad {}^{\mathrm{L}}\!\boldsymbol{\mathcal{A}}_k^q=\begin{pmatrix}b_{0k}^q & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ -\beta' & \alpha_+ & -\beta' & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & & -\beta' & \alpha_+ & -\beta'\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{mk}^q\end{pmatrix},$$

ただし、diag()を引数を成分とする対角行列として、

$$\boldsymbol{B}_0^q=\mathrm{diag}\,(b_{00}^q,\ldots,b_{m0}^q)\boldsymbol{B}_n^q=\mathrm{diag}(b_{0n}^q,\ldots,b_{mn}^q),$$

$$\boldsymbol{\Gamma}'=\mathrm{diag}(0,\frac{1}{2\ell^2},\ldots,0),$$

$$\alpha_\pm=\left[1\pm\frac{2\tau}{h^2}\pm\frac{2\tau}{\ell^2}\right],\ \beta'=\frac{1}{2h^2}.$$

$$b_{jk}^q=f_{jk}^{q+1}/f_{jk}^q\quad(j=0,n\,\mathrm{or}\,k=0,m),$$

初期条件・境界条件次第の$\boldsymbol{B}_0^q,\boldsymbol{B}_n^q$　を除けば、ほとんどが対角行列になる。

2019年10月21日(月)　　　　できれば授業の感想も書いてください。