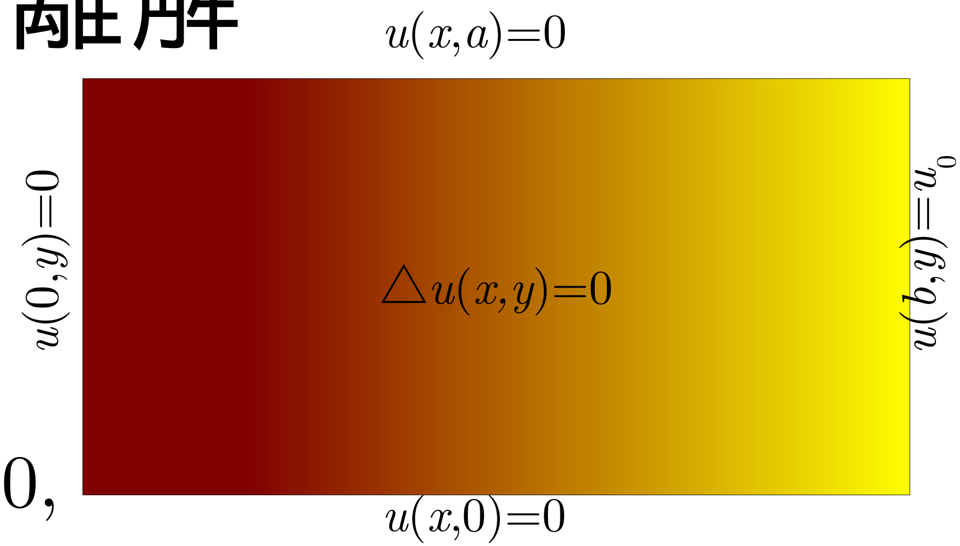
授業スケジュール

第01回(09/30):熱伝導方程式の導出
第02回(10/07):差分法の基礎
　10/14 体育の日
第03回(10/21):差分法の解法
　10/28 休講…………………………………… 岡野出張のため休講
　11/11 学生祭
第04回(11/12):熱伝導方程式の解法…. 火曜日ですが月曜授業です。
第05回(11/18):有限要素法の準備
第06回(11/25):有限要素法の基底関数
第07回(12/02):~~有限要素法とGalerkin法~~
第08回(12/09):有限要素法の連立方程式
第09回(12/16):有限要素法と変分法 ←スペクトル法と代用電荷法2
第10回(12/23):スペクトル法と代用電荷法 ←スペクトル法と代用電荷法2
　01/13 成人の日
第11回(01/20):差分法演習
第12回(01/27):有限要素法演習
第13回(02/03):代用電荷法演習
第14回(02/10):課題演習
第15回(02/13):まとめ…. 木曜日ですが月曜授業です。

計算工学特論 I

有限要素法の準備

変数分離解



- Laplace方程式の境界値問題
（定常状態の熱伝導方程式）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$u(x,0)=u(x,a)=u(0,y)=0,$$
$$u(b,y)=u_0,\ 0\le x\le a, 0\le y\le b.$$

- 変数分離の仮定を置き、1変数の微分方程式を得る、

$$u(x,y)=A(x)B(y)$$
$$\Rightarrow \triangle u=\triangle(AB)=A_{xx}(x)B(y)+A(x)B_{yy}(y)=0.$$

両辺をABで割って

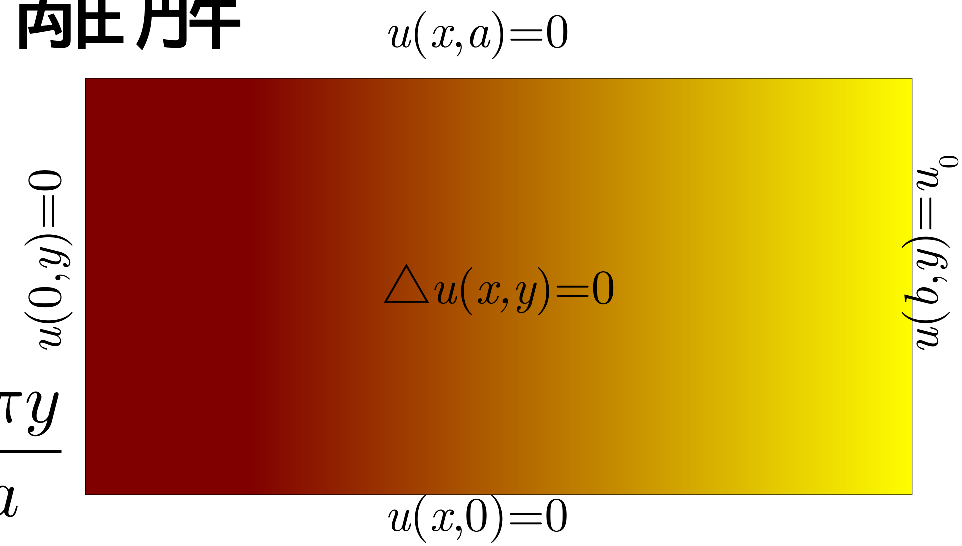
$$A_{xx}/A+B_{yy}/B=0\Rightarrow A_{xx}=\alpha^2 A, B_{yy}=\beta^2 B, \alpha^2+\beta^2=0.$$

- それぞれ解いて一般解を得る

$$u(x,y)=\sum_{\alpha,\beta,\alpha^2+\beta^2=0} u_{\alpha,\beta}(x,y)$$

$$u_{\alpha,\beta}(x,y)=[C_{\alpha+.}\mathrm{e}^{\alpha x}+C_{\alpha-.}\mathrm{e}^{-\alpha x}][C_{\beta+.}\mathrm{e}^{\beta y}+C_{\beta-.}\mathrm{e}^{-\beta y}]$$

変数分離解



- y方向の境界条件
  $u(x,0)=u(x,a)=0$
  を満たす β, $C_{\beta+}$, $C_{\beta-}$は?

$$C_{\beta+}\mathrm{e}^{\beta y}+C_{\beta-}\mathrm{e}^{-\beta y}=C_{\beta_n}\sin\frac{n\pi y}{a}$$

  すなわち $\beta=\mathrm{i}n\pi/a$, $C_{\beta+}=-C_{\beta-}=C_{\beta n}$ さらに $\alpha^2+\beta^2=0$ より
  $\alpha=n\pi/a$ これに $u(0,y)=0$を併せて

- 求めた$u_{\alpha\beta}(x,y)$で一般解を表せば

$$C_{\alpha+}\mathrm{e}^{\alpha x}+C_{\alpha-}\mathrm{e}^{-\alpha x}=C_{\alpha_n}[\mathrm{e}^{\alpha x}-\mathrm{e}^{-\alpha x}]=C_{\alpha_n}\sinh\frac{n\pi x}{a}$$

- 残った条件 $u(b,y)=u_0$ で C_n を決めれば良い

$$u(x,y)=\sum_n C_n\sinh\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{a}$$

スペクトル法

- 一番広い定義
関数の重ね合せによる離散化法
  - 例えばLaplace方程式の境界値問題

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y)=0 \qquad 0<x,y<1,$$

$$u(x,0)=x(1-x),\ u(x,1)\equiv u(0,y)\equiv(1,y)=0.$$

  - 近似解 $u(x,y)\sim U(x,y)=\sum_j c_j u_j(x,y)$
  - 重みを決める方法
    - 選点法　条件を撰点的に満すよう決める
    - 重み付き残差法　重み付き残差を利用して決める
（重み付き残差をどのように定めるかが重要）

スペクトル法

- 一番広い定義
  関数の重ね合せによる離散化法
  $$u(x,y) \sim U(x,y) = \sum_j c_j u_j(x,y)$$
- もう少し狭い定義
  スペクトルを用いたGalerkin法
  スペクトル:三角関数・平面波等
  $$u_1(x), u_2(x), \ldots, w_1(x), w_2(x), \cdots = \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots$$
  1次元なら、
  三角関数で展開、重みを付けた残差で条件を満す
  ⇒Fourier級数展開?
- 初期・境界条件についてはFourier級数展開的
  微分方程式を満す条件も考える必要がある

重み付き残差法(例:Galerkin法)

- 例:Poisson方程式の境界値問題

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y)=v(x,y) \qquad 0<x,y<1,$$

$$u(x,0)=x(1-x),\ u(x,1)\equiv u(0,y)\equiv(1,y)=0.$$

- 近似解: $u(x,y)\sim U(x,y)=\sum_j c_j u_j(x,y)$

※境界条件は満たしていることにする

- 残差: $R(x,y,c_1,c_2,\dots)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)U(x,y)-v(x,y)$

$$=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\sum_j c_j u_j(x,y)-v(x,y)$$

残差がゼロに近づくように近似解を定める

内積が射影であること
有限・無限の関数空間
積分・行列積
デルタ関数の定義

- 重み付残差：

$$\iint w_k(x,y)R(x,y,c_1,\dots)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad k=1,2,\dots$$

$$\sum_j c_j \iint w_k(x,y)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u_j(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint w_k(x,y)v(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad k=1,2,\dots$$

- Galerkin法： $w_1(x,y)=u_1(x,y), w_2(x,y)=u_2(x,y),\dots$

$$\sum_j c_j \iint u_k(x,y)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u_j(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint w_k(x,y)v(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad k=1,2,\dots$$

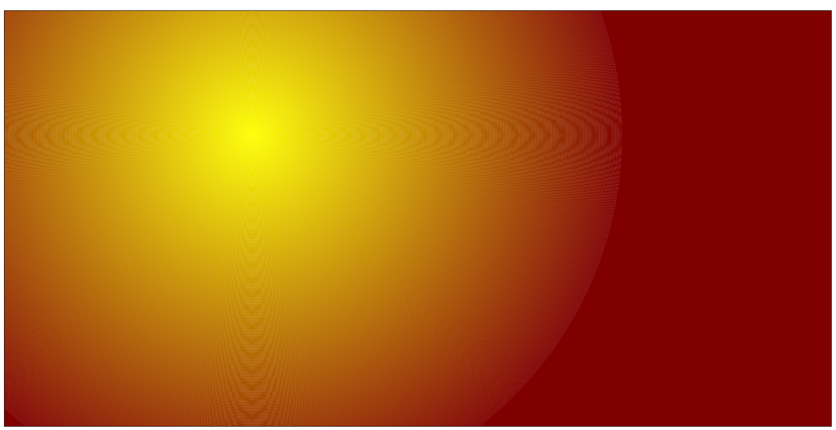
- 連立方程式を満たすように係数を決める

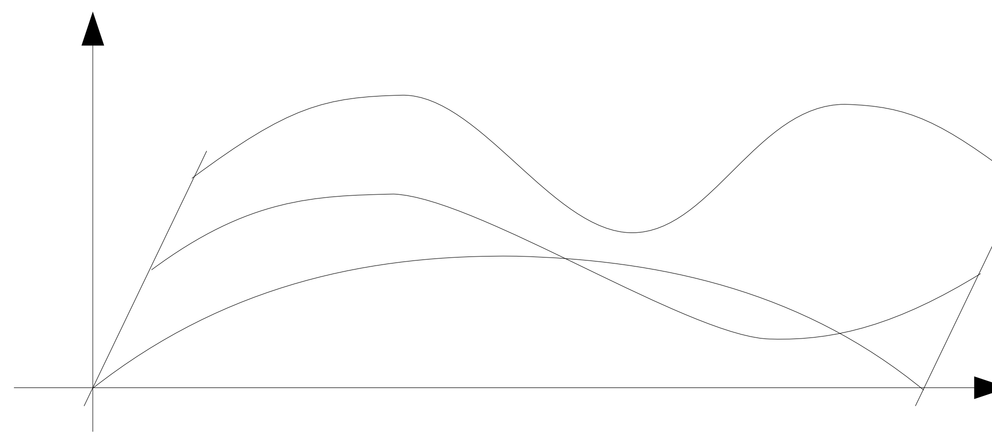
- Galerkin法：

$$\sum_j c_j \iint u_k(x,y)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u_j(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

- 連立方程式を満たすように係数を決める





重み付き残差法(例:代用電荷法)

- 一番広い定義
  関数の重ね合せによる離散化法

$$u(x,y) \sim U(x,y) = \sum_j c_j u_j(x,y)$$

- もう少し狭い定義
  (Laplace方程式に)電荷を用いて近似解を構成
  電荷:logポテンシャル、Coulomb、Newtonポテンシャル
  ⇒Laplace方程式を自動的に満たす
  デルタ関数を用いた重み付き残差法=撰点法
- 微分方程式は自動的に満たされる
  電荷と撰点をどのように定めるか
  =試行関数・試験関数をどのように選ぶかが重要

代用電荷法によるLaplace方程式の解法

- 試行関数には電荷を模した基本解を用いる:
  厳密に調和関数になる

2次元 $$u \sim U(z) = \sum_j c_j \log|z - x_j|$$

3次元 $$u \sim U(z) = \sum_j c_j / |z - x_j|$$

- 試験関数(重み)にはデルタ関数を用いる
  (選点法を用いることと同等)

$$\int \dots \int \delta(z - y_k)(u(z) - \sum_j c_j u_j(z)) = u(y_k) - U(y_k) = 0$$

- 残差の計算に積分等は不要になる

ここまでのまとめ

- 熱伝導方程式、Laplace方程式、波動方程式
- 差分法(FDM: Finite Difference Method)
- 重みつき残差法とGalerkin法
  - 線形結合による近似解：$u \approx U = \Sigma_j c_j u_j$

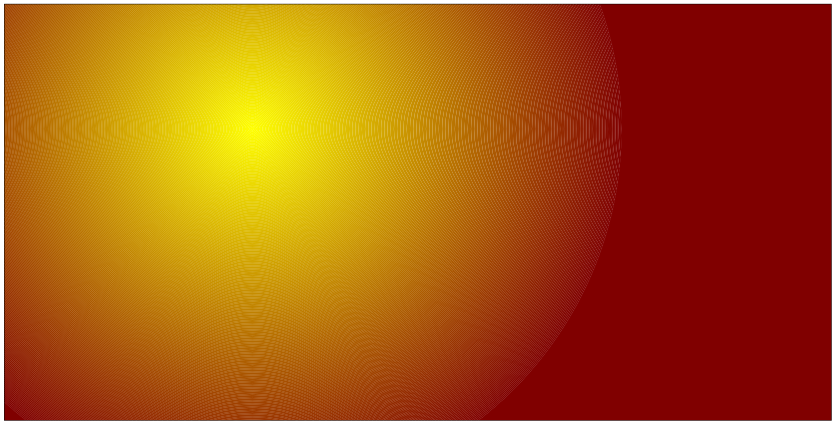
    u:厳密解、U:近似解、c_j:係数、u_j:基底関数
  - 重み付残差にもとづく係数決定

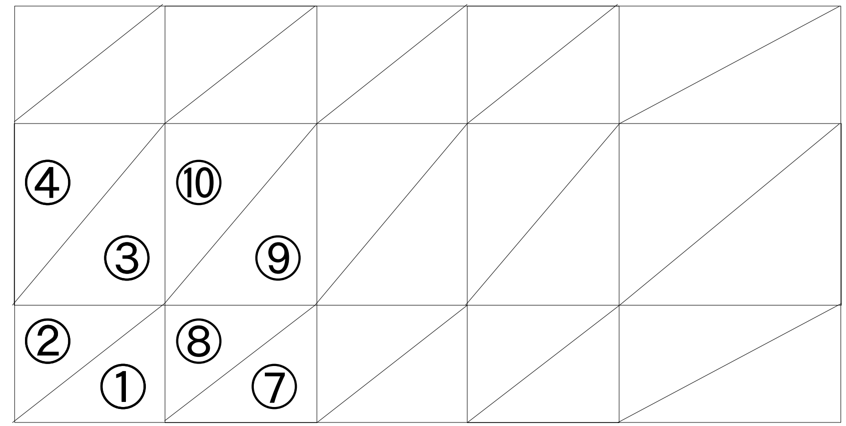
    $\int w_k[\triangle U\text{-}0]dx = 0$/最小化（Laplace方程式$\triangle u=0$の場合）

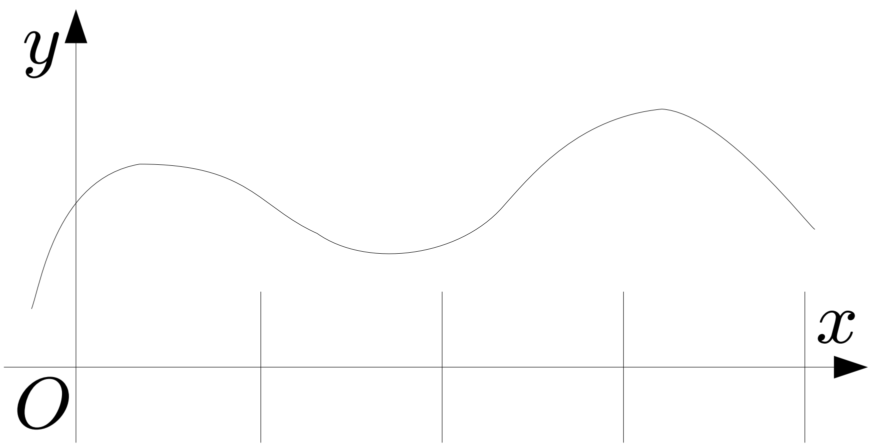
    w_k:重み関数、残差に含む重み関数成分を0/最小にする
  - Galerkin法：重み関数＝基底関数の重み付き残差法
- 有限要素法(FEM: Finite Element Method)

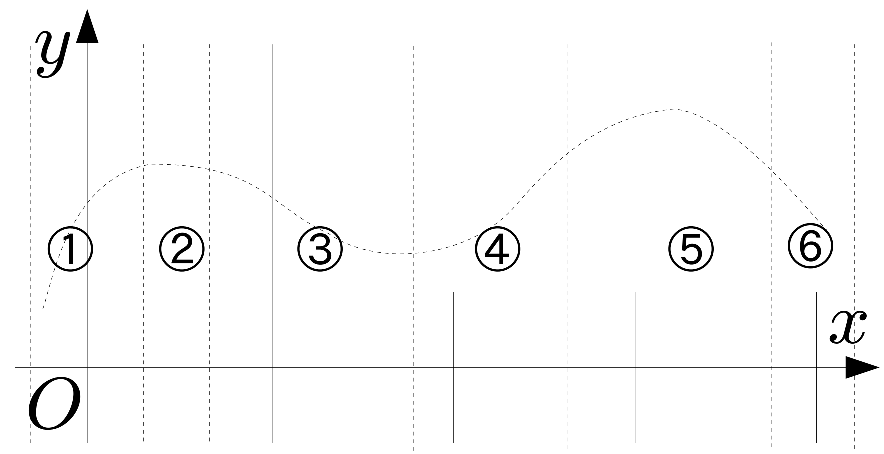
重み付き残差法としての有限要素法

- 有限要素分割（差分法での格子点配置）









- 有限要素毎に関数を割り付け、
  パラメタ決定に重み付き残差法を用いる

有限要素法の位置付け

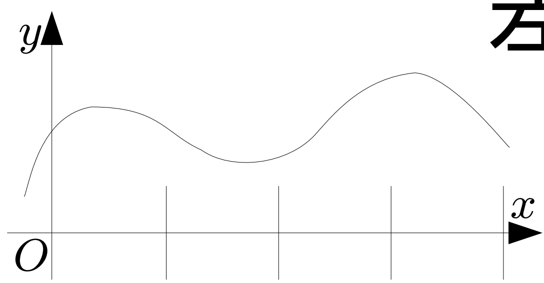
- 熱伝導方程式、Laplace方程式、波動方程式
- 差分法(FDM: Finite Difference Method)
- 重みつき残差法とGalerkin法
  - 線形結合による近似解: $u \approx U = \Sigma_j c_j u_j$

    u:厳密解、U:近似解、c_j:係数、u_j:基底関数
  - 重み付残差にもとづく係数決定

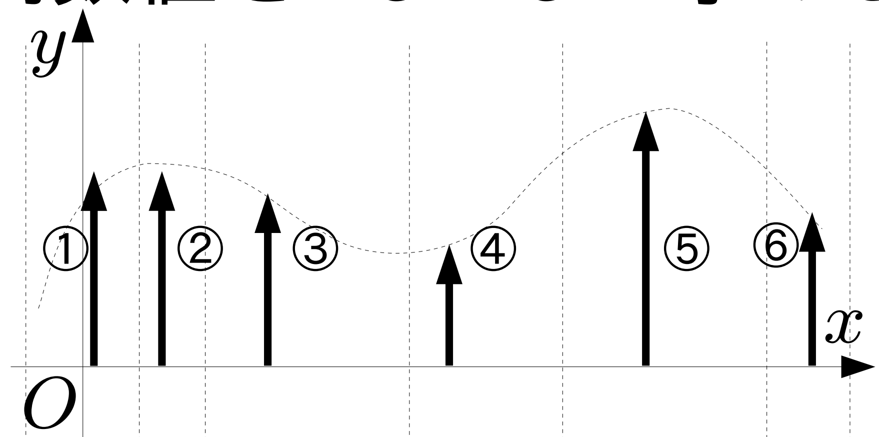
    $\int w_k[\triangle U\text{-}0]d\mathrm{x}$＝0/最小化（Laplace方程式$\triangle u=0$の場合）

    w_k:重み関数、残差に含む重み関数成分を0/最小にする
  - Galerkin法：重み関数＝基底関数の重み付き残差法
- 有限要素法(FEM: Finite Element Method)

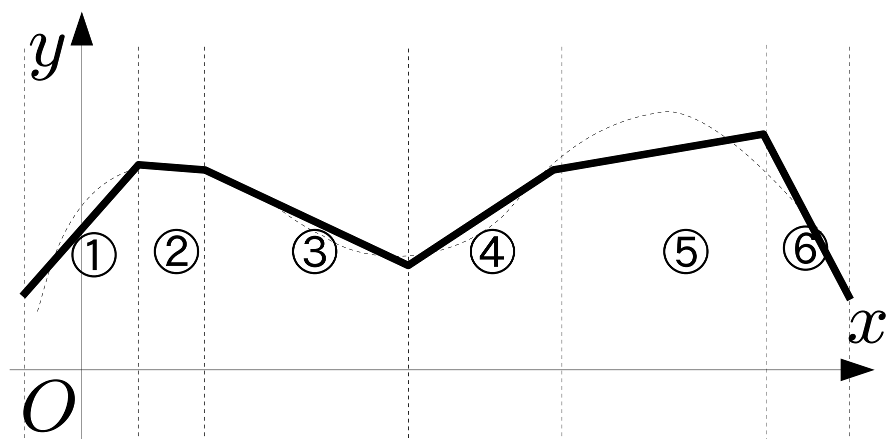
差分法と有限要素法



- 差分法：解の関数値をとびとびに求める



- 有限要素法：解に似た性質を持つ関数を求める

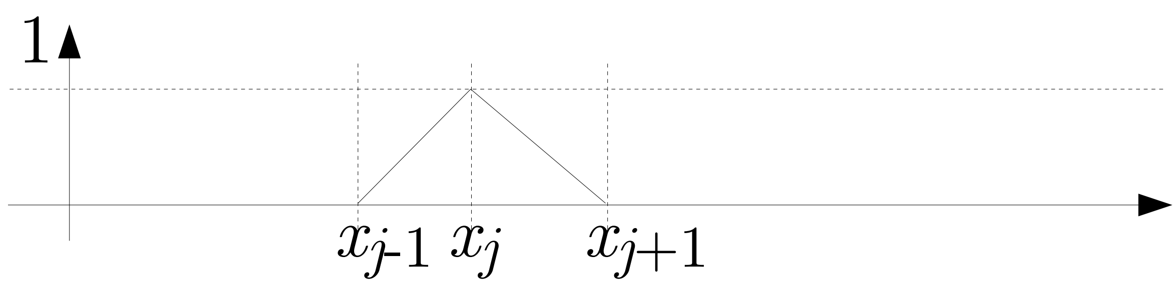


折れ線近似のための基底関数

- 折れ線関数を用いた関数近似のために、どのような基底関数列を用いればよいのか。

- コンパクトな台を持つ1次関数による基底関数 $u_0(x),\ldots,u_N(x)$

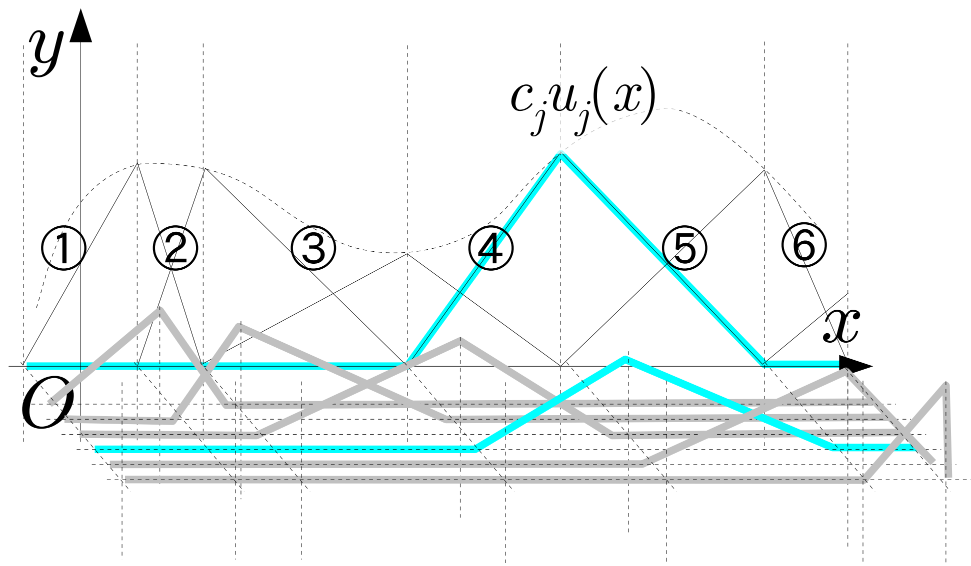
$u_j(x)$



※$x_0,\ldots,x_N$（節点）、$f_0,\ldots,f_N$（節点での関数値）を使う

折れ線近似のための基底関数

- 有限要素分割



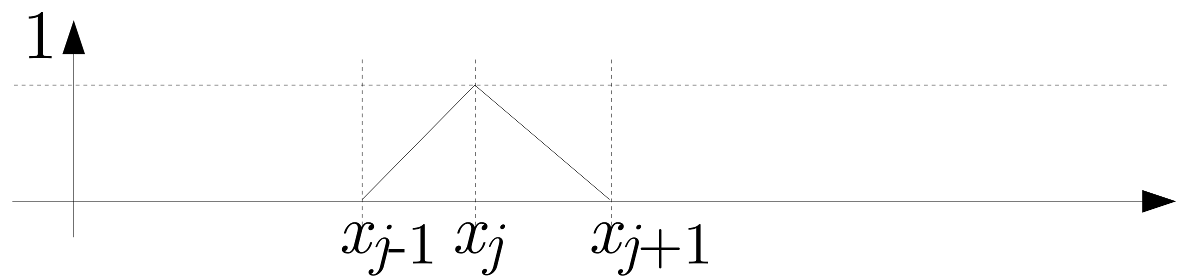
折れ線関数$u_1,\ldots,u_n$に重み$c_1,\ldots,c_n$をかけて近似する

- 有限要素毎に関数を割り付け、
パラメタ決定に重み付き残差法を用いる

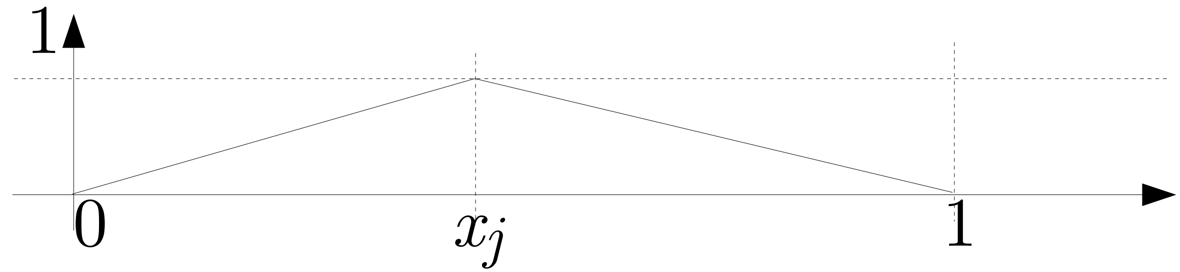
演習問題

- 区間$[0,1]$の任意の折れ線関数を次の関数列の重ね合せで表現できることを示しなさい。

- $u_0(x),\ldots,u_{\mathrm{N}}(x)$



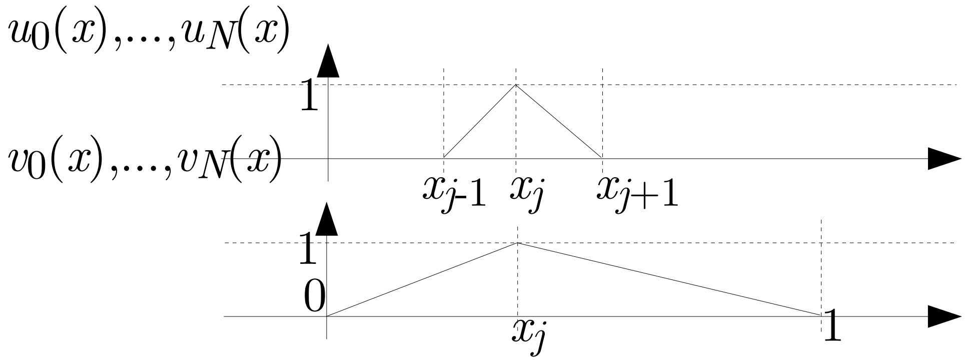
- $v_0(x),\ldots,v_{\mathrm{N}}(x)$



※$x_0,\ldots,x_{\mathrm{N}}$（節点）、$f_0,\ldots,\mathrm{f}_{\mathrm{N}}$（節点での関数値）を使う

授業レポート用紙:氏名(　　　　　　　　　　)学籍番号(　　　　　　)

区間[0,1]の任意の折れ線関数を次の関数列の重ね合せで表現できることを示しなさい。



区間[0,1]で連続で、節点 $x_0=0<x_1<\ldots<x_N=1$ で関数値$f_0,\ldots,f_N$をとり、隣接する節点の間の区間で1次関数となる「折れ線関数」は一意に定まるので、この条件を満す関数を示せばよい。

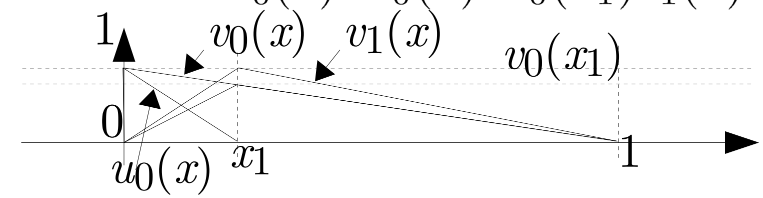
$u_j(x)$ $(j=0,1,2,\ldots)$は小区間$[x_{j\text{-}1}<x_j],[x_j<x_{j+1}]$で$1$次関数となる、区間$[0,1]$の連続関数なので、その重ね合せも、小区間で$1$次関数となる連続関数。

$\Sigma_j\ f_j u_j(x)$とすれば、節点で与えられた関数値を取り、「折れ線関数」の条件を満す。

$u_0(x),\ldots,u_N(x)$を$v_0(x),\ldots,v_N(x)$の重ね合せで表現できれば良い。

$[0,1]$において

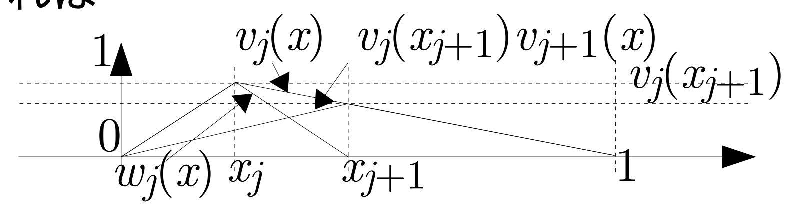
$$u_0(x)=v_0(x)-v_0(x_1)v_1(x)$$



さらに、$j\geq 1$で

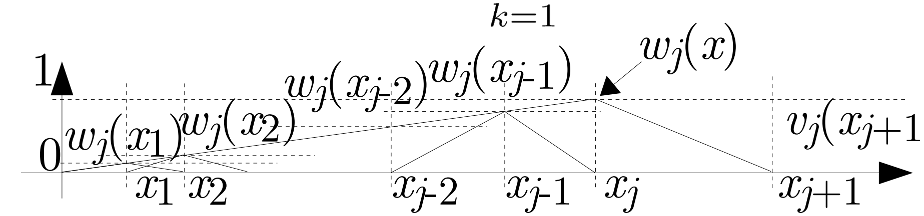
$$w_j(x)=\frac{v_j(x)-v_j(x_{j+1})v_{j+1}(x)}{v_j(x_j)-v_j(x_{j+1})v_{j+1}(x_j)}$$

とすれば



一般にu_jを$w_j,u_1,\ldots,u_{j\text{-}1}$で表現できる

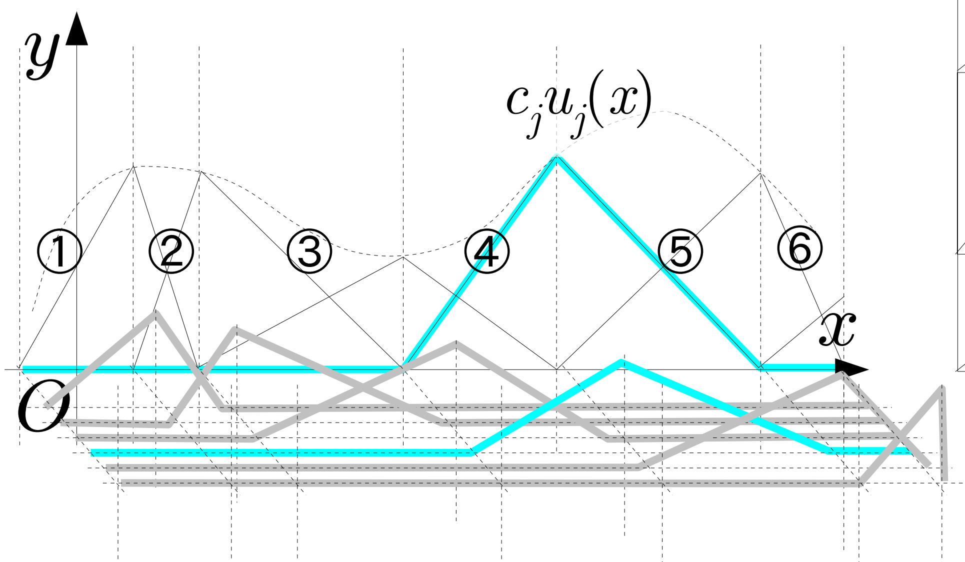
$$u_j(x)=w_j(x)-\sum_{k=1}^{j-1}w_k(x_k)u_k(x)$$

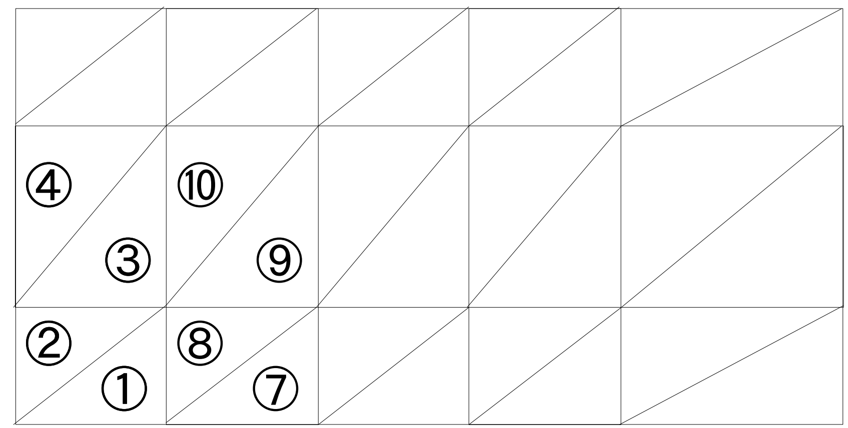


できれば授業の感想も書いてください。

折れ線近似のための基底関数

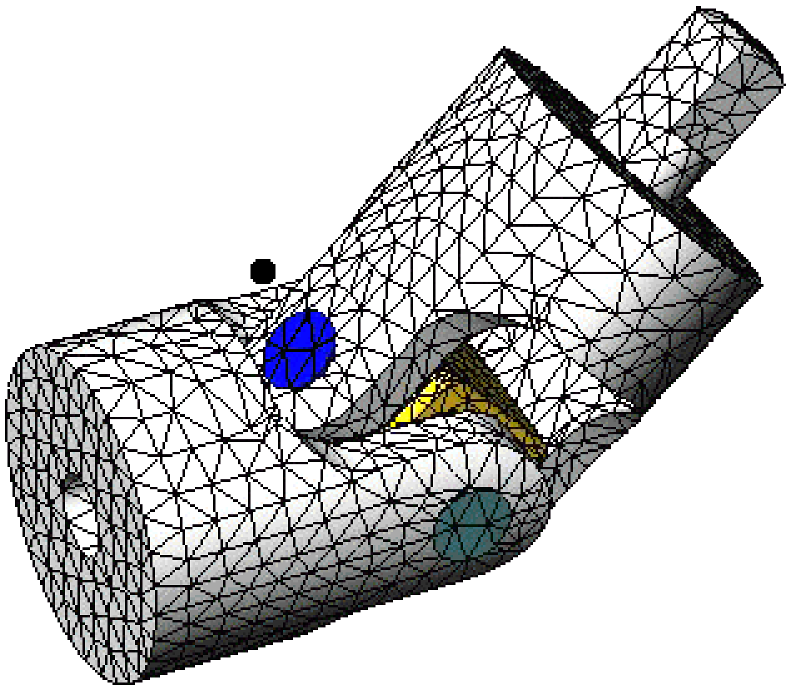
- 有限要素分割

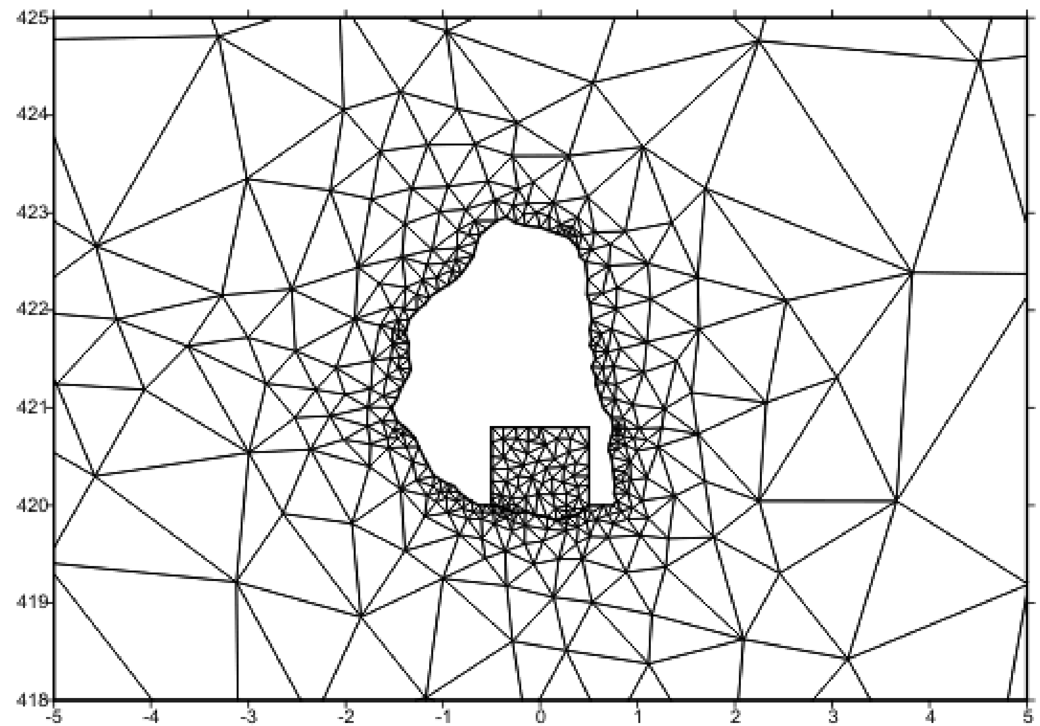




折れ線関数$u_1,\ldots,u_n$に重み$c_1,\ldots,c_n$をかけて近似する

- 有限要素毎に関数を割り付け、パラメタ決定に重み付き残差法を用いる



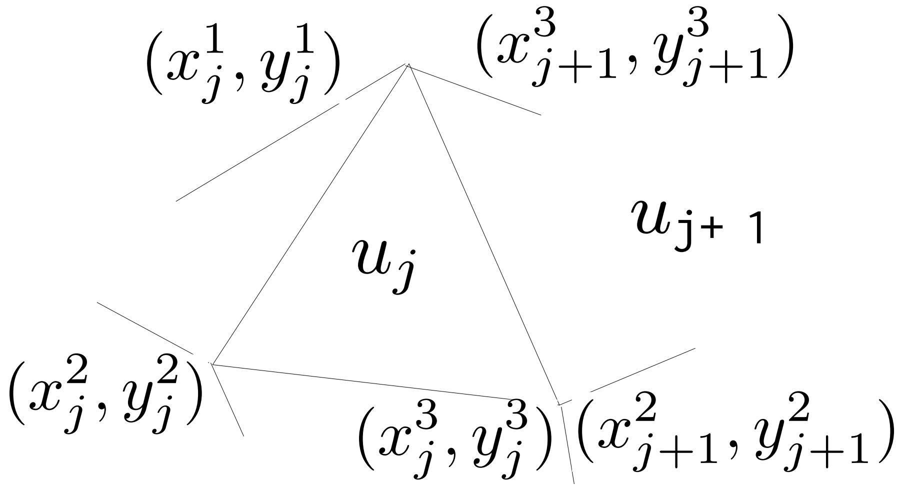


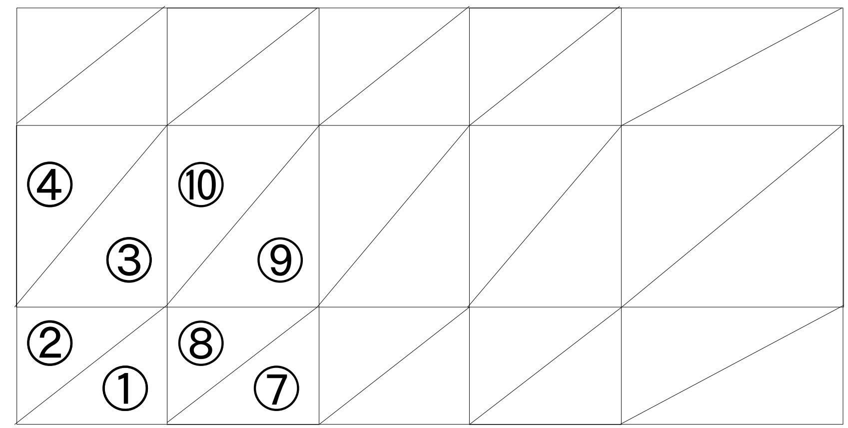
三角形による二次元平面･二次元曲面の有限要素分割

3次元→四面体、$4\ldots$次元→?

Galerkin法と有限要素法

- 有限要素の構成





- 一番簡単な、1次関数を利用する

$$u_j(x, y) = \alpha_j x + \beta_j y + \gamma_j$$

- 隣接有限要素との関係も影響する

$$u_j(x, y) = u_{j+1}(x, y) \qquad (x, y) \in \overline{u_j} \cap \overline{u_{j+1}}$$

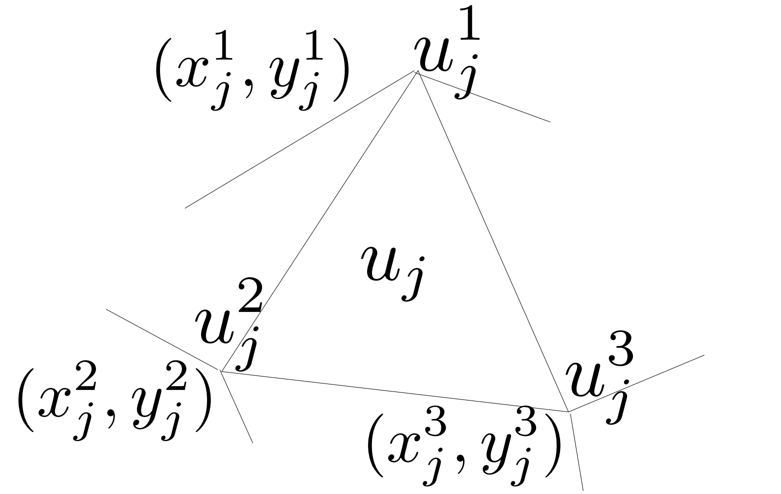
- 1次関数なので 2点で一致すれば良い

例: $u_j(x_j^1, y_j^1) = u_{j+1}(x_{j+1}^3, y_{j+1}^3)$ （上図の場合)

$$u_j(x_j^3, y_j^3) = u_{j+1}(x_{j+1}^2, y_{j+1}^2)$$

Galerkin法と有限要素法

- 端点値とパラメタの関係



$$u_j(x, y) = \alpha_j x + \beta_j y + \gamma_j$$

$$u_j^1 = \alpha_j x_j^1 + \beta_j y_j^1 + \gamma_j$$
$$u_j^2 = \alpha_j x_j^2 + \beta_j y_j^2 + \gamma_j$$
$$u_j^3 = \alpha_j x_j^3 + \beta_j y_j^3 + \gamma_j$$

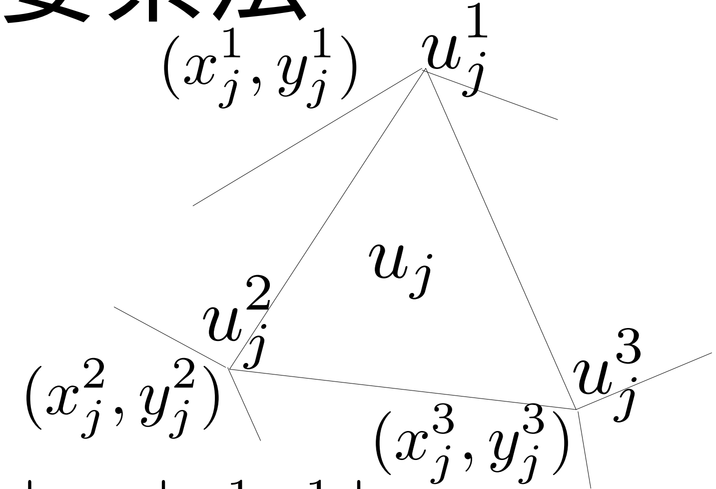
$$\begin{bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_j^1 & y_j^1 & 1 \\ x_j^2 & y_j^2 & 1 \\ x_j^3 & y_j^3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_j^1 \\ u_j^2 \\ u_j^3 \end{bmatrix} = A_j^{-1} U_j$$

クラメールの公式

$$= \frac{1}{|A_j|} \begin{bmatrix} |[U_j \; Y_j \; \mathbf{1}]| \\ |[X_j U_j \; \mathbf{1}]| \\ |[X_j Y_j U_j]| \end{bmatrix}, \quad X_j = \begin{bmatrix} x_j^1 \\ x_j^2 \\ x_j^3 \end{bmatrix}, \; Y_j = \begin{bmatrix} y_j^1 \\ y_j^2 \\ y_j^3 \end{bmatrix}, \; \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Galerkin法と有限要素法

- 端点値とパラメタの関係



$$\begin{bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \end{bmatrix} = \frac{1}{|A_j|} \begin{bmatrix} |[U_j\ Y_j\ \mathbf{1}]| \\ |[X_j U_j\ \mathbf{1}]| \\ |[X_j Y_j U_j]| \end{bmatrix}$$

$$|A_j| = \det \begin{bmatrix} x_j^1 & y_j^1 & 1 \\ x_j^2 & y_j^2 & 1 \\ x_j^3 & y_j^3 & 1 \end{bmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} x_j^2 & y_j^2 \\ x_j^3 & y_j^3 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} x_j^1 & y_j^1 \\ x_j^3 & y_j^3 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} x_j^1 & y_j^1 \\ x_j^2 & y_j^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_j^2 & y_j^2 \\ x_j^3 & y_j^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_j^3 & y_j^3 \\ x_j^1 & y_j^1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_j^1 & y_j^1 \\ x_j^2 & y_j^2 \end{vmatrix}$$

パラメタを求めて、

$$u_j(x,y) = u_j^1(\alpha_j^1 x + \beta_j^1 y + \gamma_j^1) + u_j^2(\alpha_j^2 x + \beta_j^2 y + \gamma_j^2) + u_j^3(\alpha_j^3 x + \beta_j^3 y + \gamma_j^3)$$

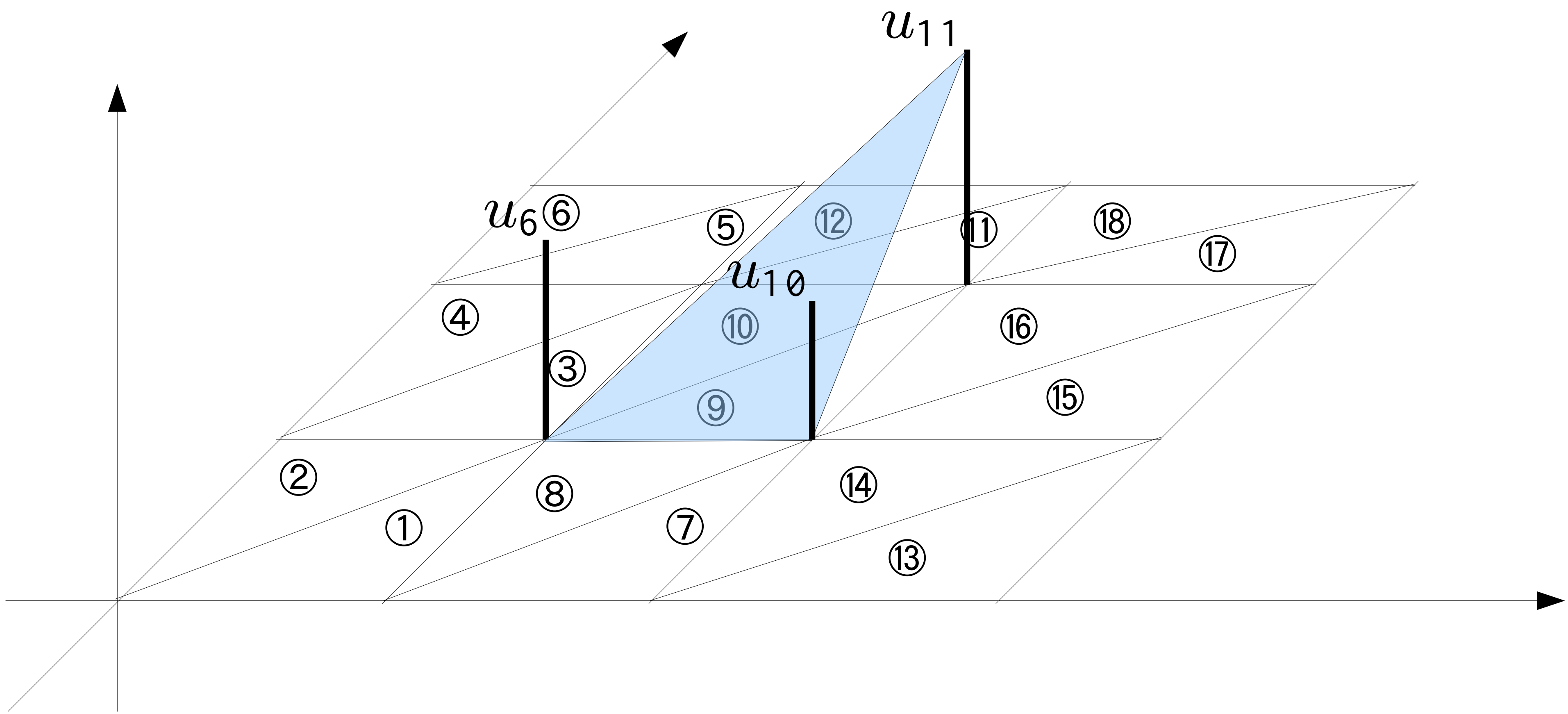
$$\alpha_j^k = \begin{vmatrix} y_j^{k+1} & 1 \\ y_j^{k+2} & 1 \end{vmatrix} / |A_j|, \beta_j^k = \begin{vmatrix} x_j^{k-1} & 1 \\ x_j^{k-2} & 1 \end{vmatrix} / |A_j|, \gamma_j^k = \begin{vmatrix} x_j^{k+1} & y_j^{k+1} \\ x_j^{k+2} & y_j^{k+2} \end{vmatrix} / |A_j|,$$

$$x_j^4 = x_j^1, x_j^5 = x_j^2, x_j^0 = x_j^3, x_j^{-1} = x_j^2.$$

- 端点値＝重みとした3つの関数の重ね合せと考える

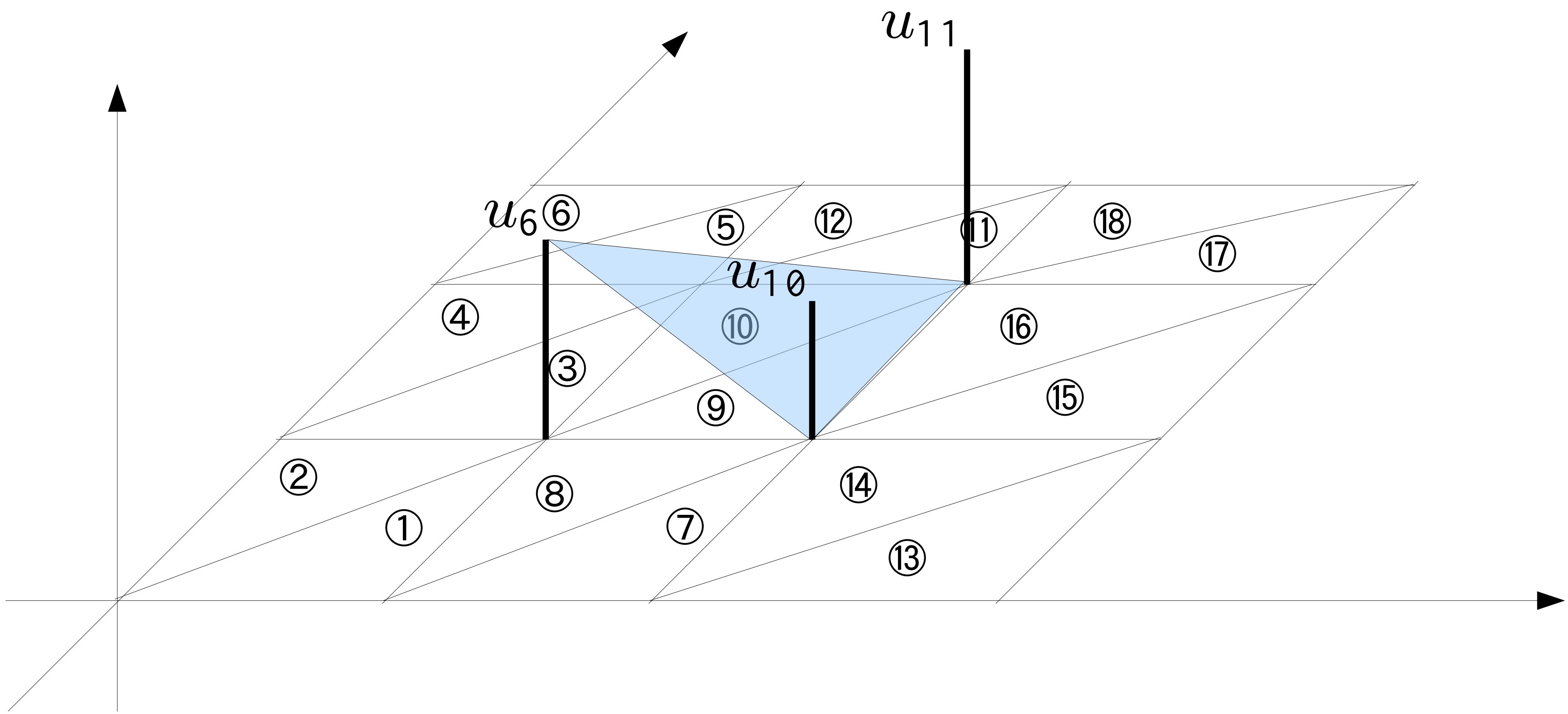
基底関数の重ね合せ

$$u_j^1(\alpha_j^1 x+\beta_j^1 y+\gamma_j^1)=u_j^1\left(\begin{vmatrix} y_j^2 & 1 \\ y_j^3 & 1 \end{vmatrix} x+\begin{vmatrix} x_j^3 & 1 \\ x_j^2 & 1 \end{vmatrix} y+\begin{vmatrix} x_j^2 & y_j^2 \\ x_j^3 & y_j^3 \end{vmatrix}\right)/|A_j|.$$



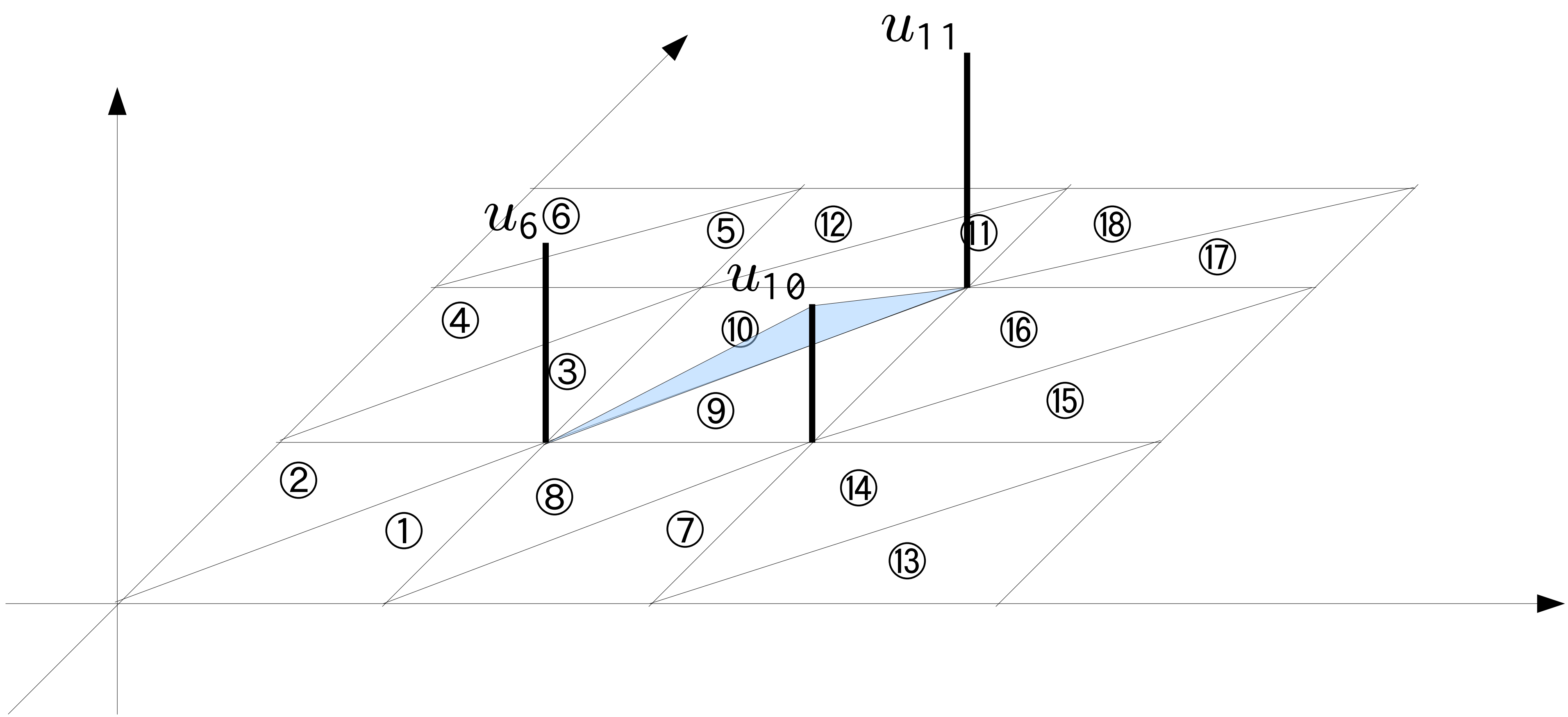
基底関数の重ね合せ

$$u_j^2(\alpha_j^2 x+\beta_j^2 y+\gamma_j^2) = u_j^2 \left(\begin{vmatrix} y_j^3 & 1 \\ y_j^1 & 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x_j^1 & 1 \\ x_j^3 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_j^3 & y_j^3 \\ x_j^1 & y_j^1 \end{vmatrix} \right) / |A_j|.$$



基底関数の重ね合せ

$$u_j^3(\alpha_j^3 x+\beta_j^3 y+\gamma_j^3) = u_j^3 \left(\begin{vmatrix} y_j^1 & 1 \\ y_j^2 & 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x_j^2 & 1 \\ x_j^1 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_j^1 & y_j^1 \\ x_j^2 & y_j^2 \end{vmatrix} \right) / |A_j|.$$

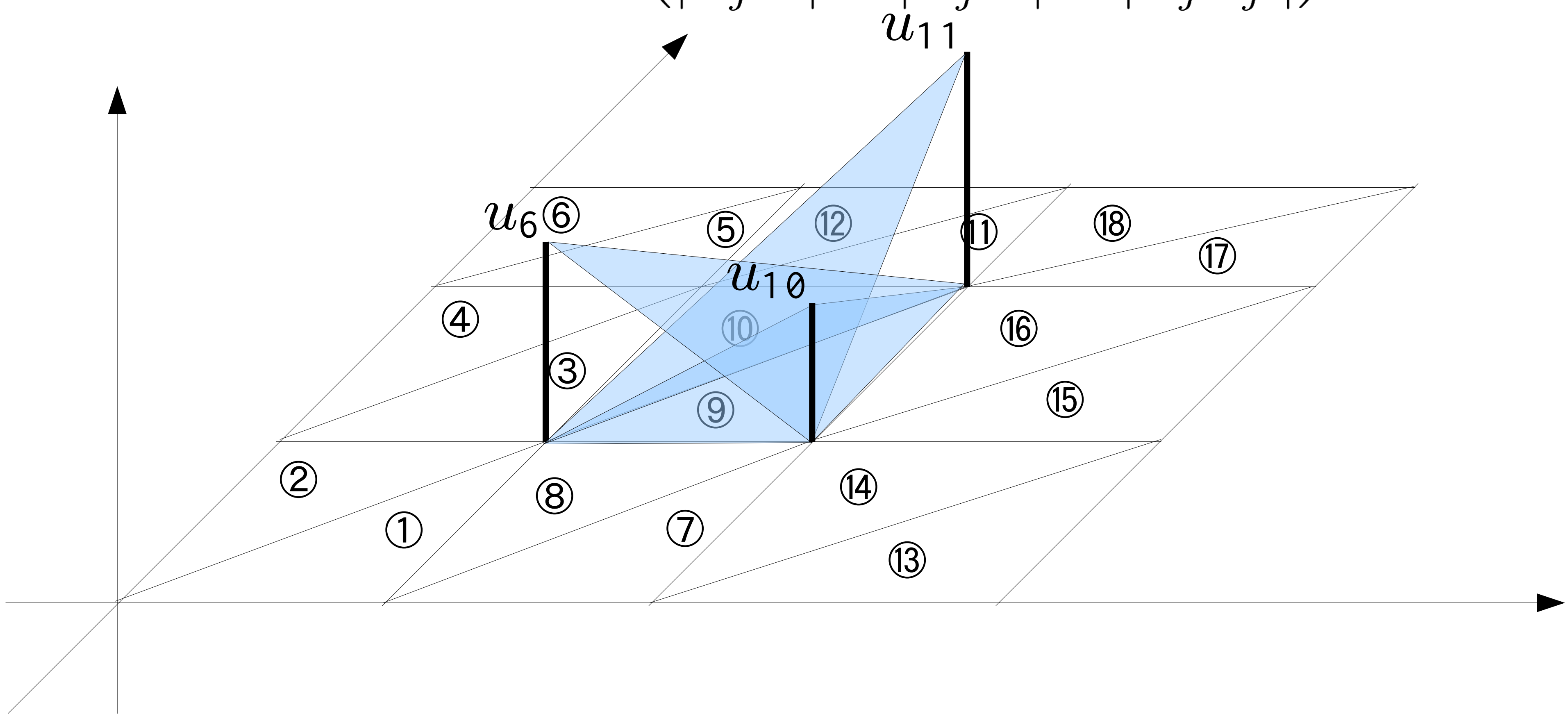


基底関数の重ね合せ

$$u_j^1(\alpha_j^1 x+\beta_j^1 y+\gamma_j^1) = u_j^1\left(\begin{vmatrix} y_j^2 & 1 \\ y_j^3 & 1\end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x_j^3 & 1 \\ x_j^2 & 1\end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_j^2 & y_j^2 \\ x_j^3 & y_j^3\end{vmatrix}\right)/|A_j|.$$

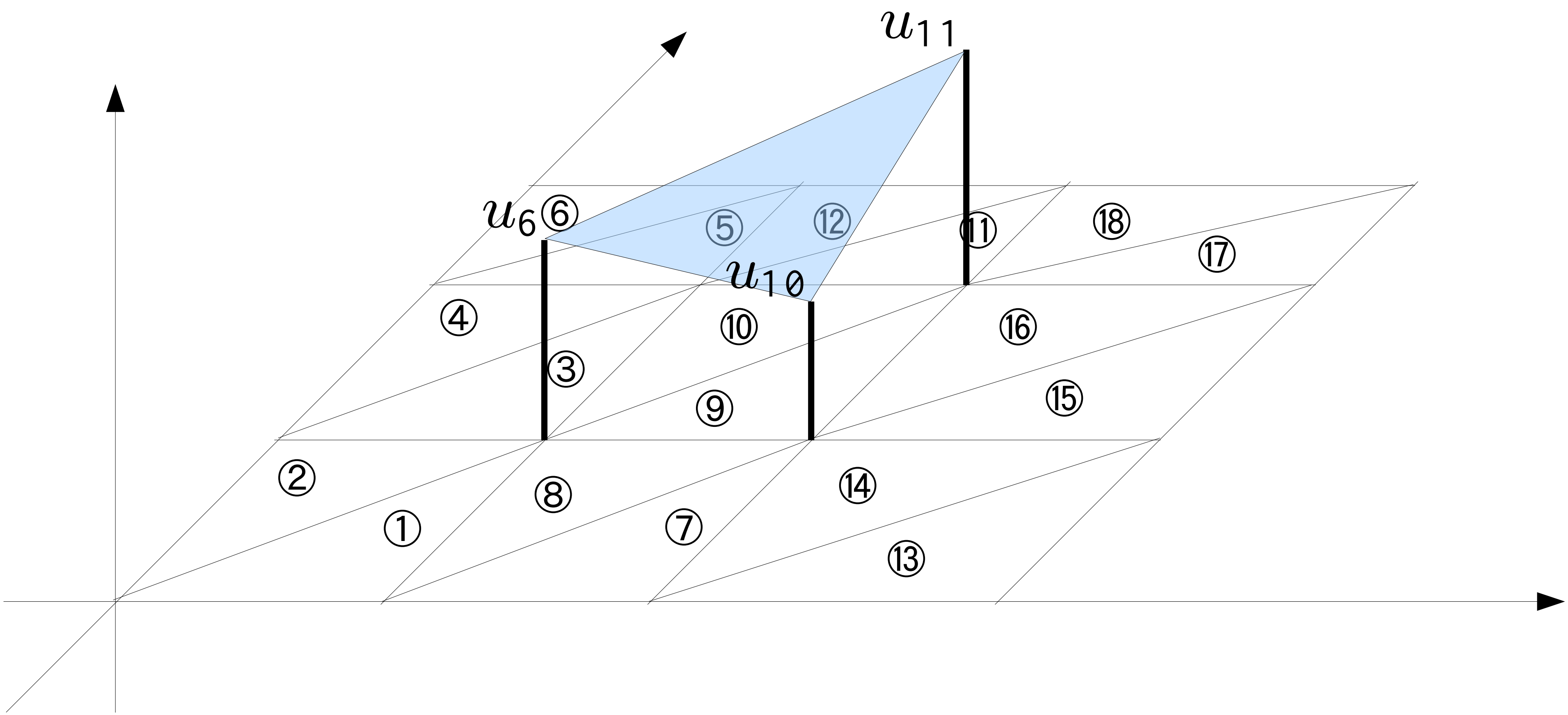
$$u_j^2(\alpha_j^2 x+\beta_j^2 y+\gamma_j^2) = u_j^2\left(\begin{vmatrix} y_j^3 & 1 \\ y_j^1 & 1\end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x_j^1 & 1 \\ x_j^3 & 1\end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_j^3 & y_j^3 \\ x_j^1 & y_j^1\end{vmatrix}\right)/|A_j|.$$

$$u_j^3(\alpha_j^3 x+\beta_j^3 y+\gamma_j^3) = u_j^3\left(\begin{vmatrix} y_j^1 & 1 \\ y_j^2 & 1\end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x_j^2 & 1 \\ x_j^1 & 1\end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_j^1 & y_j^1 \\ x_j^2 & y_j^2\end{vmatrix}\right)/|A_j|.$$

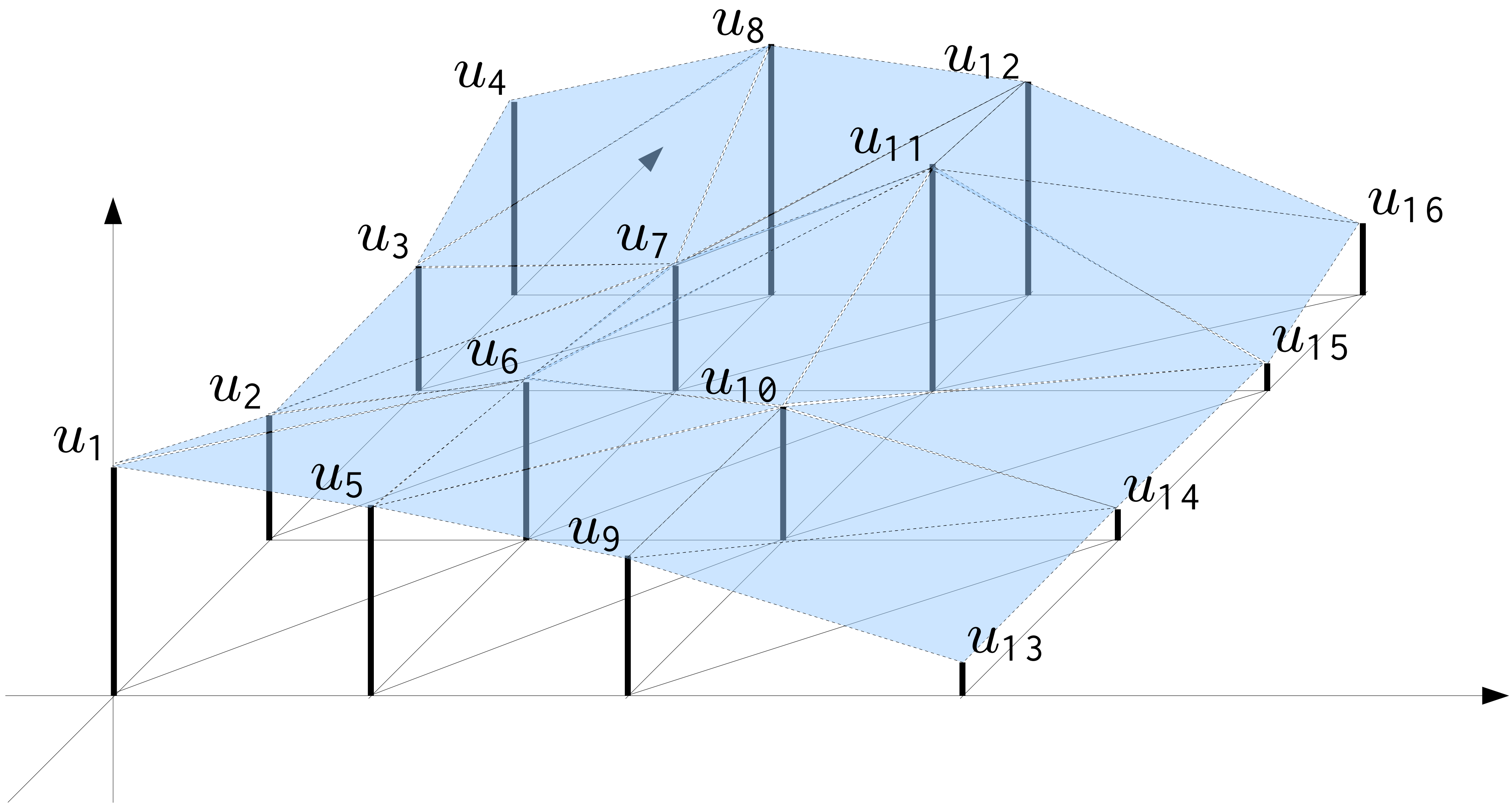


基底関数の重ね合せ

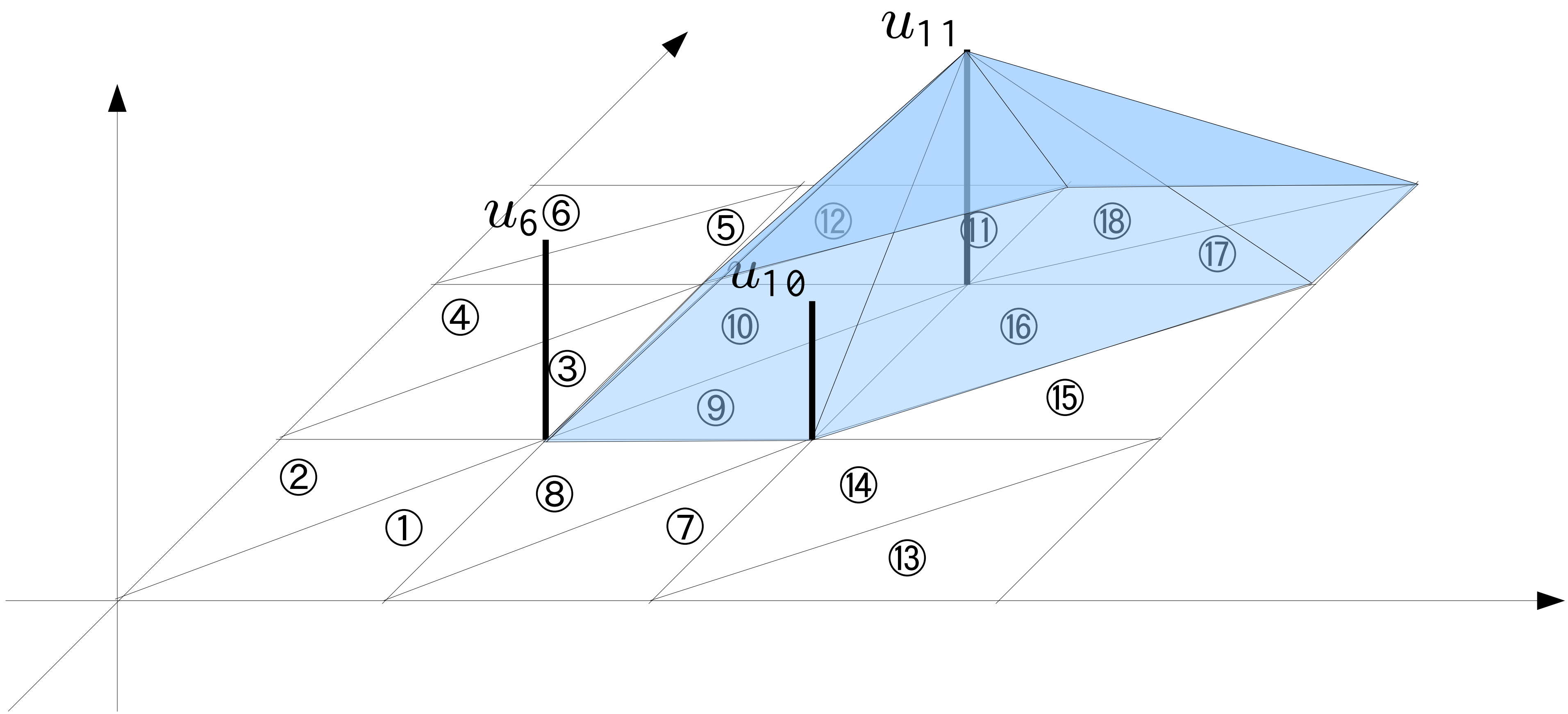
$$u_j^1(\alpha_j^1 x+\beta_j^1 y+\gamma_j^1)+u_j^2(\alpha_j^2 x+\beta_j^2 y+\gamma_j^2)+u_j^3(\alpha_j^3 x+\beta_j^3 y+\gamma_j^3)$$



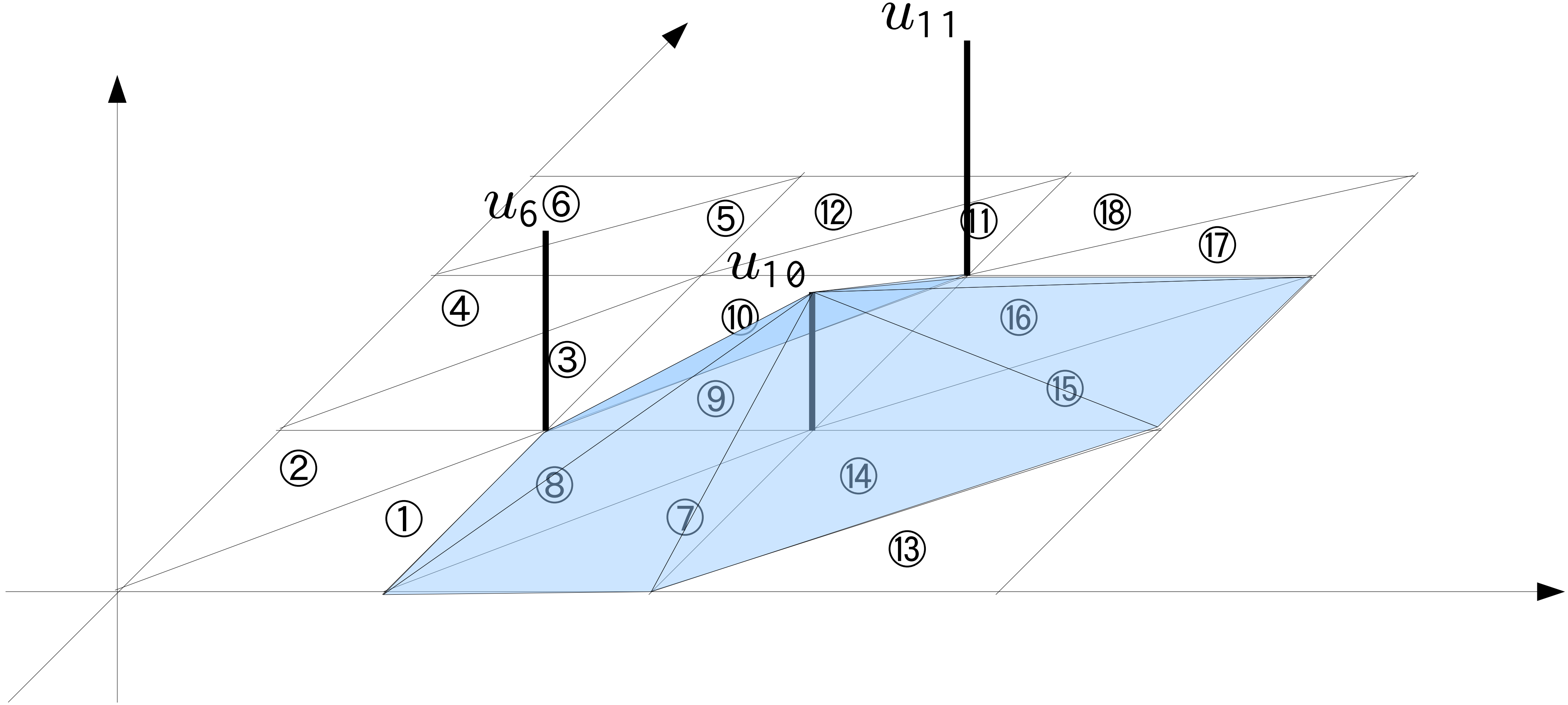
基底関数の重ね合せ



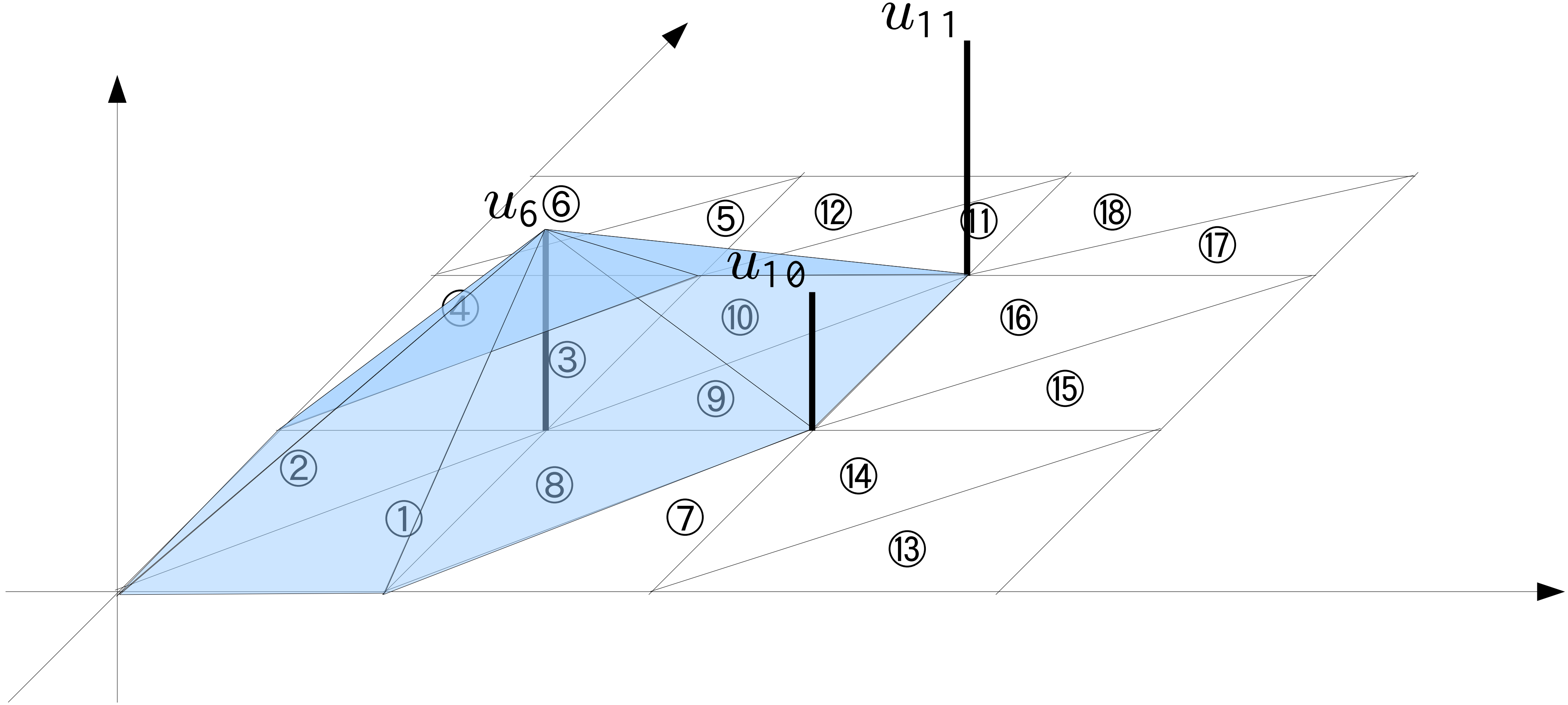
基底関数の重ね合せ



基底関数の重ね合せ



基底関数の重ね合せ



レポート(5)

学籍番号･氏名を記し提出してください。

- 3次元の問題にGalerkin法による有限要素法を適用する。1次関数を用いた基底関数のパラメタと4面体要素上の端点値とを変換する式を示してください
- 2次元の3つの基底関数に対応する１次元の基底関数は何ですか？

授業レポート用紙：氏名（　　　　　　　　）学籍番号(　　　　　　　)

2019年11月18日（月）

できれば授業の感想も書いてください。

授業レポート用紙：氏名(　　　　　　　)学籍番号(　　　　　)

②2次元の3つの基底関数に対応する
1次元の基底関数は何ですか？
点$x=x_1,x_2$で値 $y(x_1)=y_1, y(x_2)=y_2$をとる
折れ線関数を考えれば良いので、
$y(x)=ax+b$
と置いて$x=x_1,x_2$での値を条件にした
変数をa,bとした連立方程式を考える。

$$ax_1+b=y_1 \qquad ax_2+b=y_2 \qquad \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

クラメールの公式より$y(x)$は、

$$y(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}}x + \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}$$

これをy_1とy_2を係数として整理して、

$$y(x) = y_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}x + y_2 \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}$$

2つの基底関数を得る。

①3次元の問題にGalerkin法による有限要素法を適用する。1次関数を用いた基底関数のパラメタと4面体要素上の端点値とを変換する式を示してください
$u(x,y,z)=ax+by+cz+d$
と置き端点${}^t[x_j,y_j,z_j]$(j=1,...,4)の関数値u_1,u_2,u_3,u_4から
折れ線関数を得る。

$$u = \frac{\begin{vmatrix} u_1 y_1 z_1 1 \\ u_2 y_2 z_2 1 \\ u_3 y_3 z_3 1 \\ u_4 y_4 z_4 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x_1 u_1 z_1 1 \\ x_2 u_2 z_2 1 \\ x_3 u_3 z_3 1 \\ x_4 u_4 z_4 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_1 y_1 u_1 1 \\ x_2 y_2 u_2 1 \\ x_3 y_3 u_3 1 \\ x_4 y_4 u_4 1 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} x_1 y_1 z_1 u_1 \\ x_2 y_2 z_2 u_2 \\ x_3 y_3 z_3 u_3 \\ x_4 y_4 z_4 u_4 \end{vmatrix}}{\det A}$$

これを整理して基底関数を得る。

$$= u_1 \left[\begin{vmatrix} y_2 z_2 1 \\ y_3 z_3 1 \\ y_4 z_4 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} x_2 z_2 1 \\ x_3 z_3 1 \\ x_4 z_4 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_2 y_2 1 \\ x_3 y_3 1 \\ x_4 y_4 1 \end{vmatrix} z \right] / \det A$$

$$+ u_2 \left[- \begin{vmatrix} y_1 z_1 1 \\ y_3 z_3 1 \\ y_4 z_4 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x_1 z_1 1 \\ x_3 z_3 1 \\ x_4 z_4 1 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} x_1 y_1 1 \\ x_3 y_3 1 \\ x_4 y_4 1 \end{vmatrix} z \right] / \det A$$

$$+ u_3 \left[\begin{vmatrix} y_1 z_1 1 \\ y_2 z_2 1 \\ y_4 z_4 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} x_1 z_1 1 \\ x_2 z_2 1 \\ x_4 z_4 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_1 y_1 1 \\ x_2 y_2 1 \\ x_4 y_4 1 \end{vmatrix} z \right] / \det A$$

$$+ u_4 \left[- \begin{vmatrix} y_1 z_1 1 \\ y_2 z_2 1 \\ y_3 z_3 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x_1 z_1 1 \\ x_2 z_2 1 \\ x_3 z_3 1 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} x_1 y_1 1 \\ x_2 y_2 1 \\ x_3 y_3 1 \end{vmatrix} z \right] / \det A$$

$$\det A = \begin{vmatrix} x_1 y_1 z_1 1 \\ x_2 y_2 z_2 1 \\ x_3 y_3 z_3 1 \\ x_4 y_4 z_4 1 \end{vmatrix}$$

2019年11月18日(月)

できれば授業の感想も書いてください。