計算科学特論

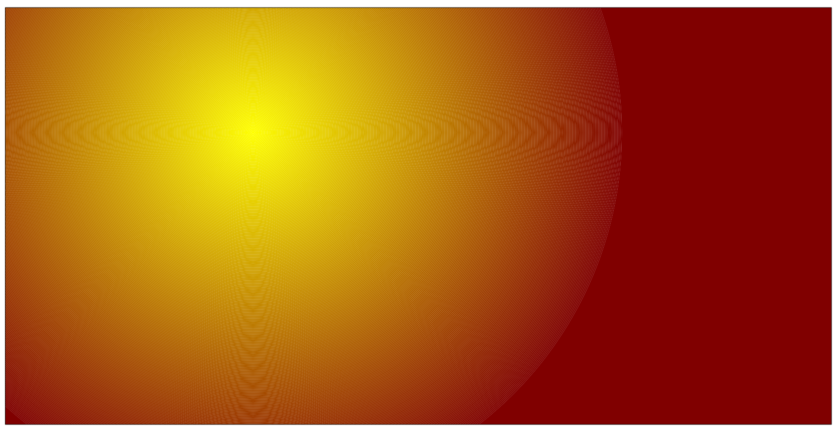
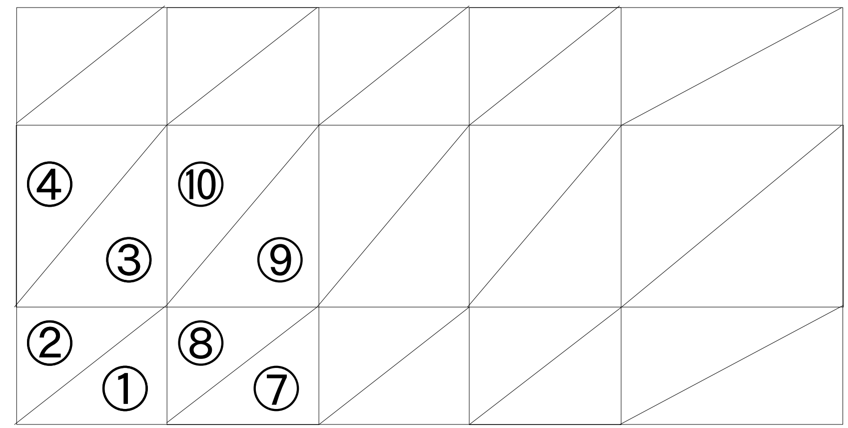
有限要素法の基底関数

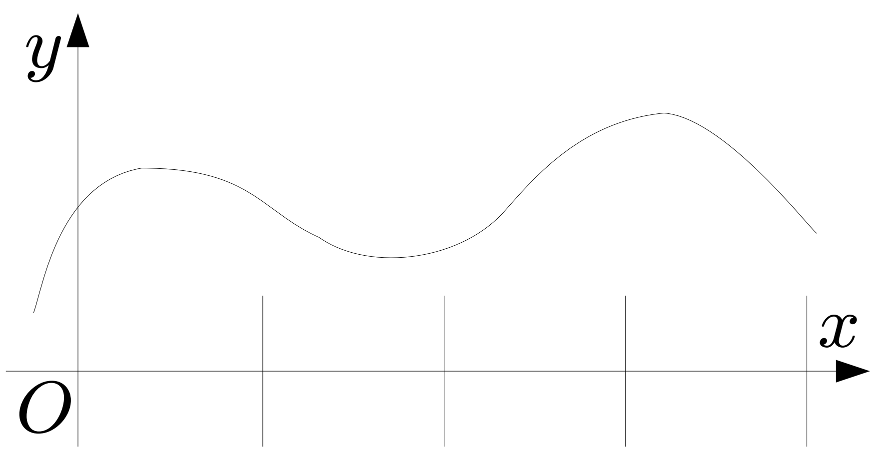
前回までのまとめ、今日の予定

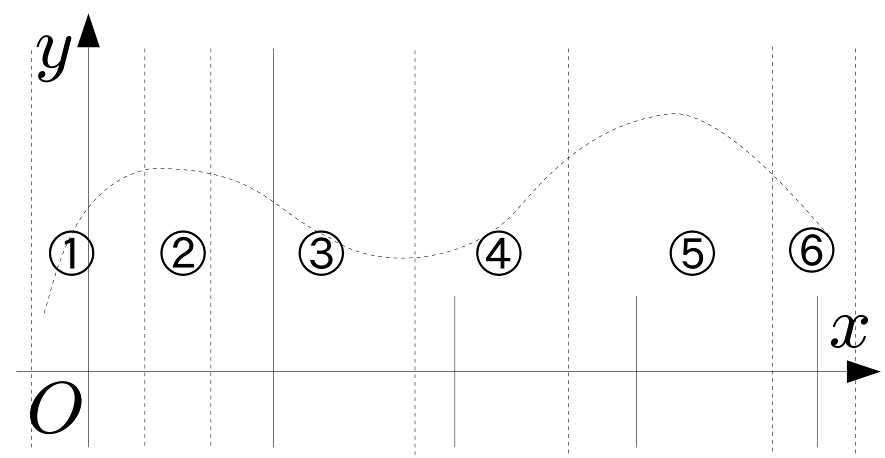
- 熱伝導方程式(Laplace方程式)
- 差分法(差分近似･反復解法･陽解法･陰解法）
- 有限要素法
  - 重み付き残差法とGalerkin法
  - 有限要素法の基底関数
  - **有限要素のGalerkin法**

復習:有限要素法のアイディア

- 有限要素分割(差分法での格子点配置)

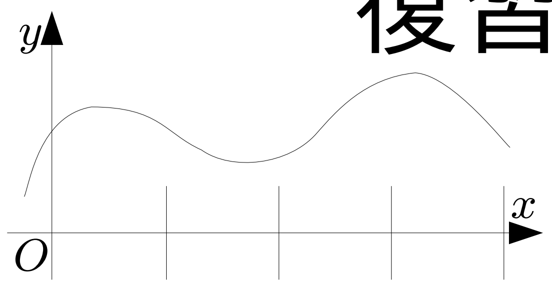





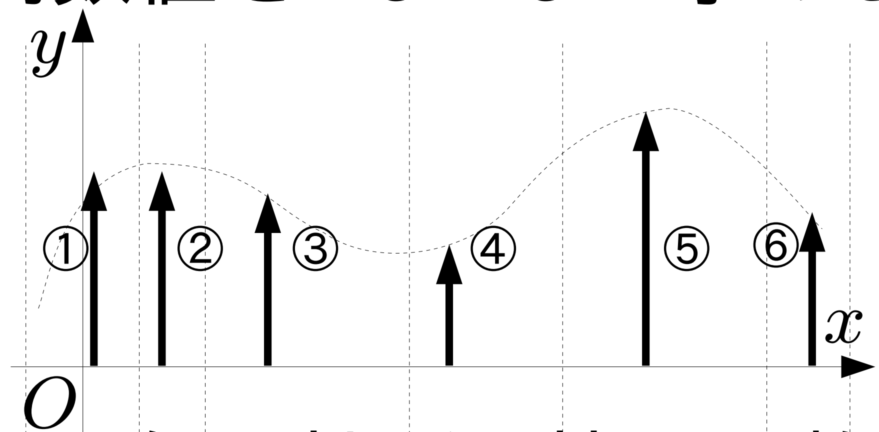


- 有限要素毎に関数を割り付け、
  パラメタ決定に重み付き残差法を用いる

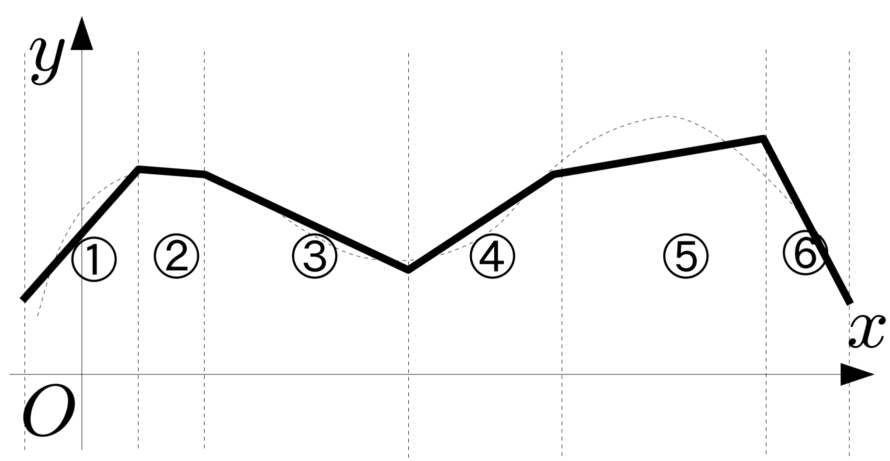
復習:差分法と有限要素法



- 差分法:解の関数値をとびとびに求める



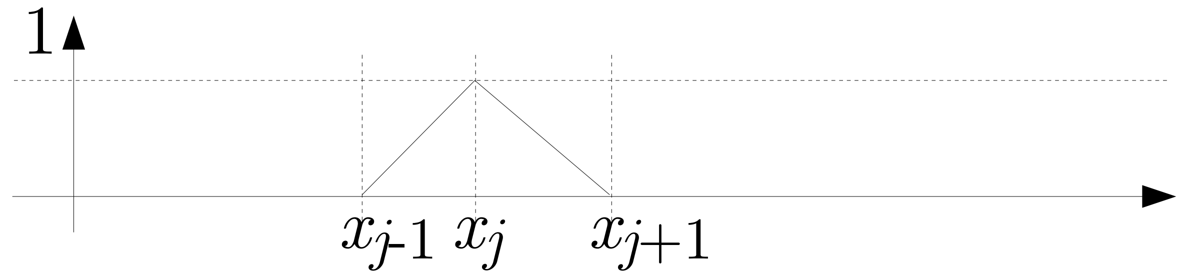
- 有限要素法:解に似た性質を持つ関数を求める



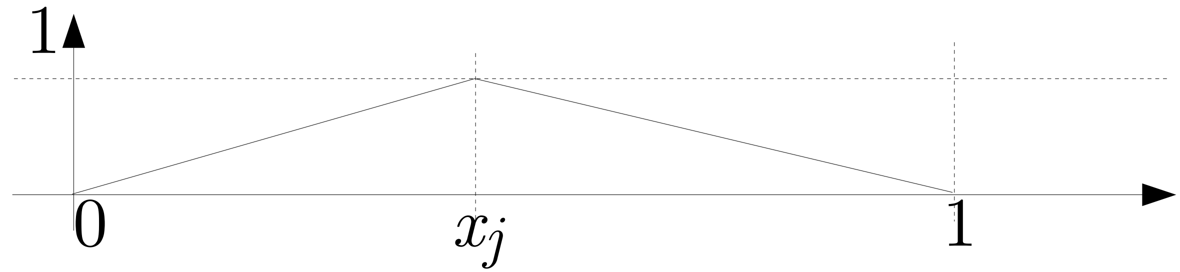
復習：折れ線近似のための基底関数

- 区間$[0,1]$の任意の折れ線関数を次の関数列の重ね合せで表現できることを示しなさい。

- $u_0(x),\ldots,u_N(x)$



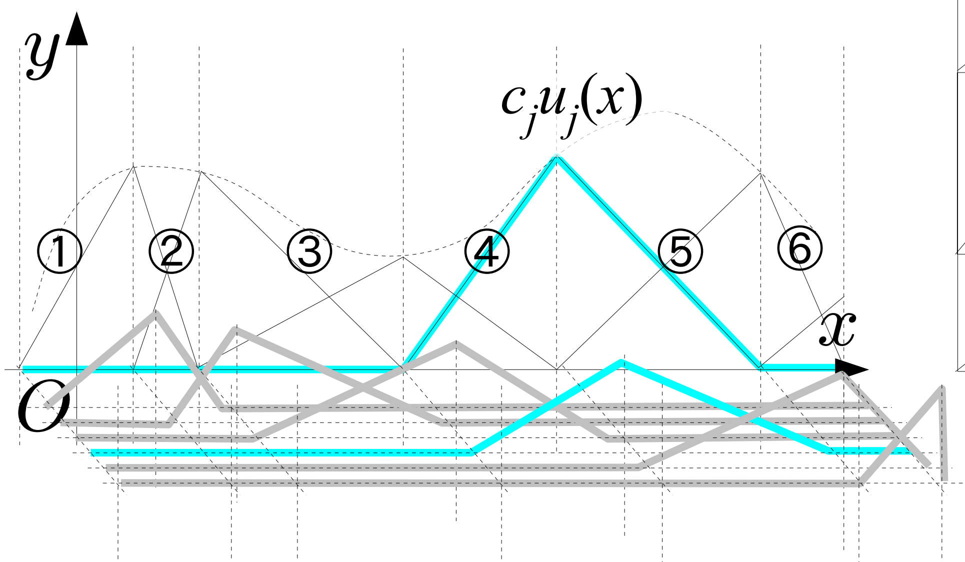
- $v_0(x),\ldots,v_N(x)$

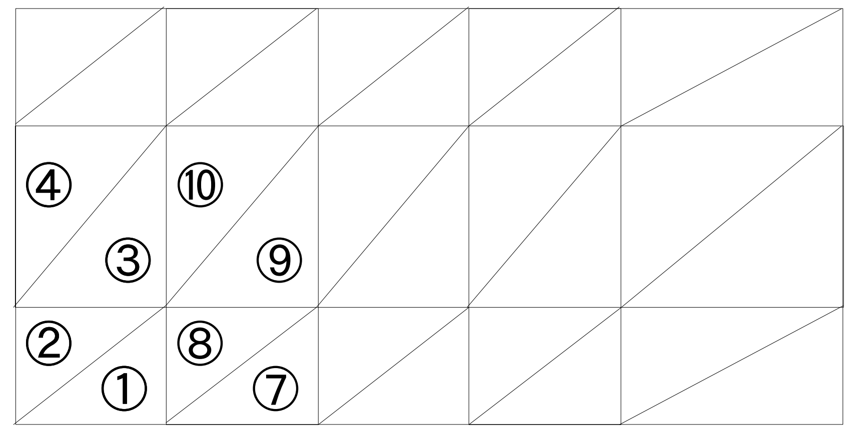


※$x_0,\ldots,x_N$（節点）、$f_0,\ldots,f_N$（節点での関数値）を使う

復習：折れ線近似のための基底関数

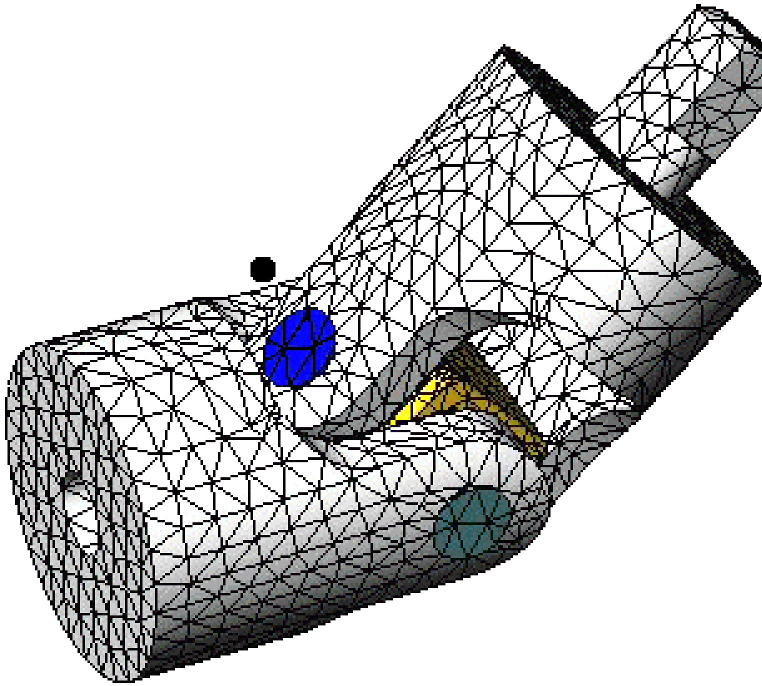
- 有限要素分割

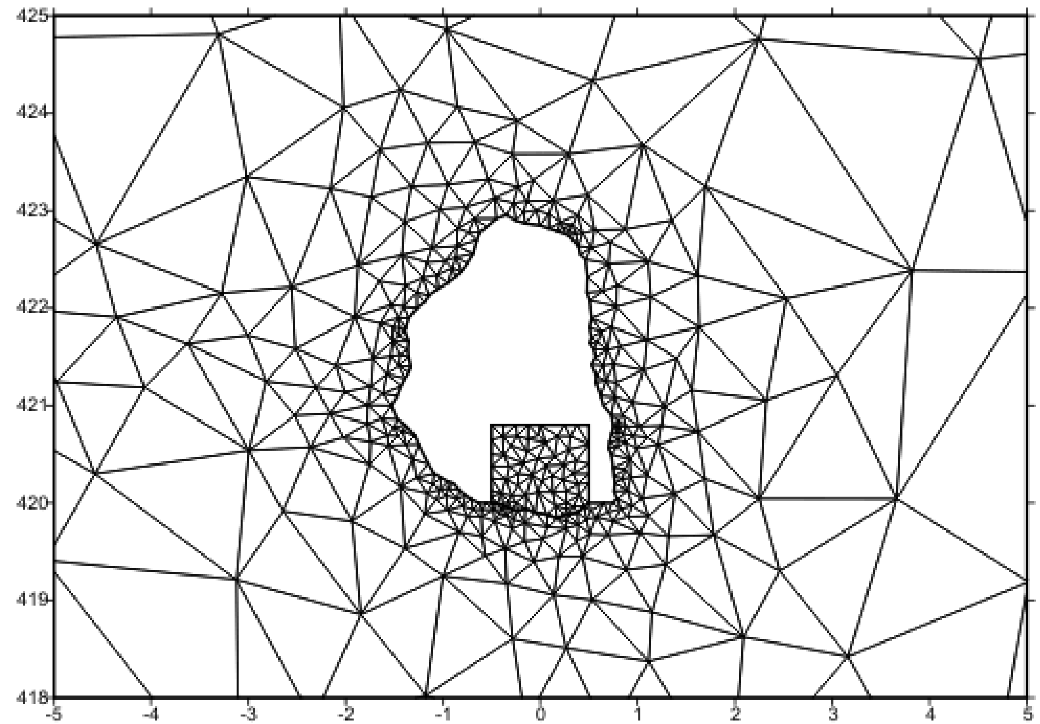




折れ線関数$u_1,\ldots,u_n$に重み$c_1,\ldots,c_n$をかけて近似する

- 有限要素毎に関数を割り付け、
パラメタ決定に重み付き残差法を用いる



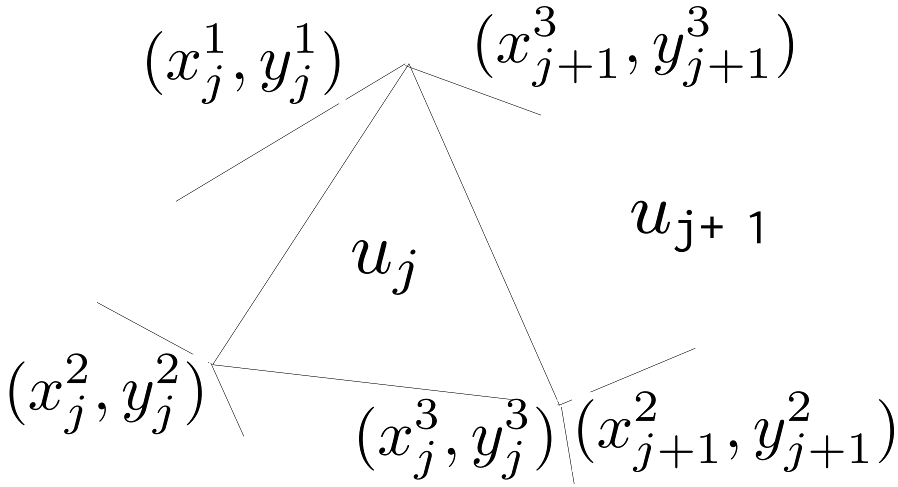


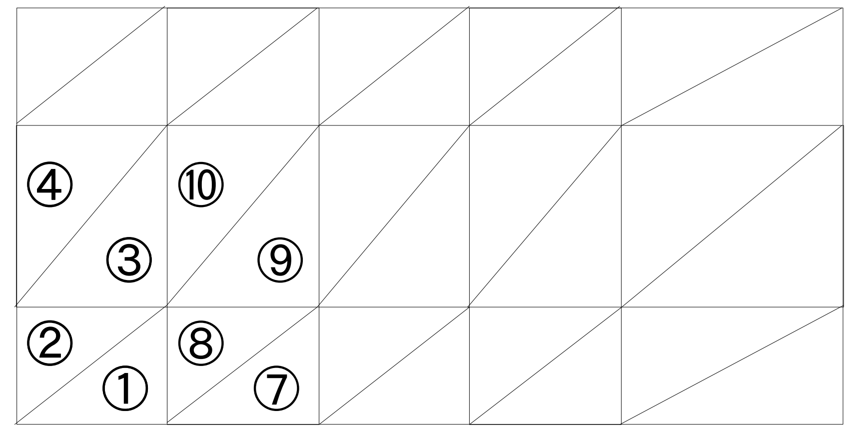
三角形による二次元平面･二次元曲面の有限要素分割

3次元→四面体、4…次元→?

2次元有限要素の基底関数

- 有限要素の構成





- 一番簡単な、1次関数を利用する

$$u_j(x,y) = \alpha_j x + \beta_j y + \gamma_j$$

- 隣接有限要素との関係も影響する

$$u_j(x,y) = u_{j+1}(x,y) \qquad (x,y) \in \overline{u_j} \cap \overline{u_{j+1}}$$

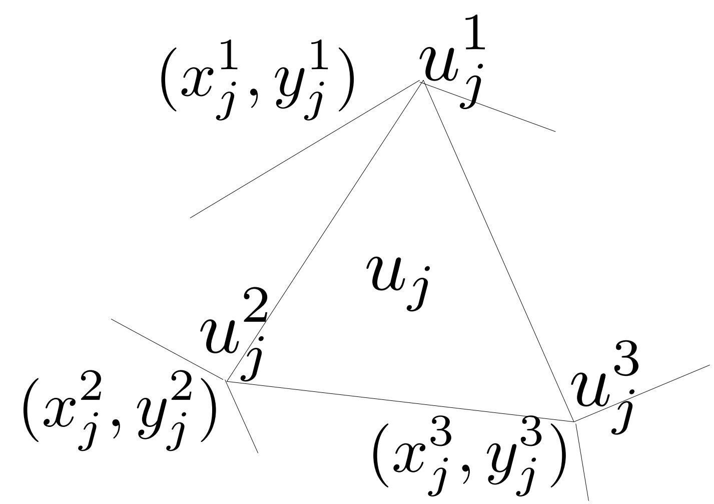
- 1次関数なので 2点で一致すれば良い

例： $u_j(x_j^1, y_j^1) = u_{j+1}(x_{j+1}^3, y_{j+1}^3)$ （上図の場合)

$$u_j(x_j^3, y_j^3) = u_{j+1}(x_{j+1}^2, y_{j+1}^2)$$

2次元有限要素の基底関数

- 端点値とパラメタの関係



$$u_j(x,y) = \alpha_j x + \beta_j y + \gamma_j$$

$$\begin{aligned} u_j^1 &= \alpha_j x_j^1 + \beta_j y_j^1 + \gamma_j \\ u_j^2 &= \alpha_j x_j^2 + \beta_j y_j^2 + \gamma_j \\ u_j^3 &= \alpha_j x_j^3 + \beta_j y_j^3 + \gamma_j \end{aligned}$$

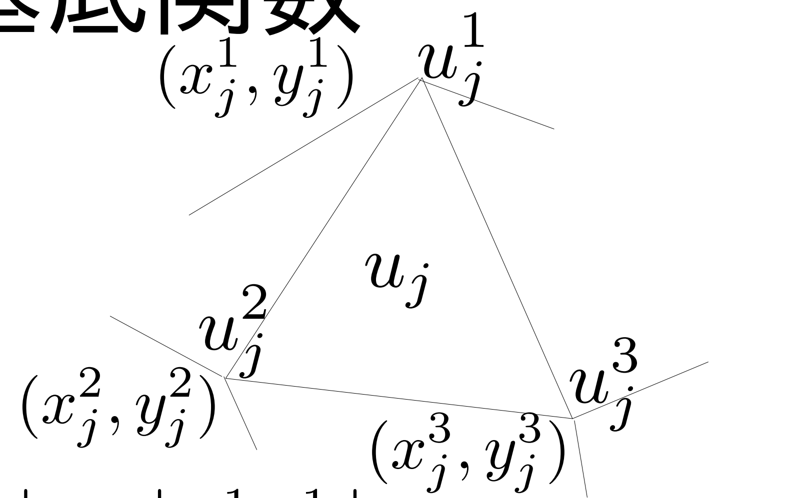
$$\begin{bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_j^1 & y_j^1 & 1 \\ x_j^2 & y_j^2 & 1 \\ x_j^3 & y_j^3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_j^1 \\ u_j^2 \\ u_j^3 \end{bmatrix} = A_j^{-1} U_j$$

クラメールの公式

$$= \frac{1}{|A_j|} \begin{bmatrix} |[U_j \; Y_j \; \mathbf{1}]| \\ |[X_j U_j \; \mathbf{1}]| \\ |[X_j Y_j U_j]| \end{bmatrix}, \quad X_j = \begin{bmatrix} x_j^1 \\ x_j^2 \\ x_j^3 \end{bmatrix}, \; Y_j = \begin{bmatrix} y_j^1 \\ y_j^2 \\ y_j^3 \end{bmatrix}, \; \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2次元有限要素の基底関数

- 端点値とパラメタの関係



$$\begin{bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \end{bmatrix} = \frac{1}{|A_j|} \begin{bmatrix} |[U_j\ Y_j\ \ \mathbf{1}]| \\ |[X_j U_j\ \ \mathbf{1}]| \\ |[X_j Y_j U_j]| \end{bmatrix}$$

$$|A_j| = \det \begin{bmatrix} x_j^1 & y_j^1 & 1 \\ x_j^2 & y_j^2 & 1 \\ x_j^3 & y_j^3 & 1 \end{bmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} x_j^2 & y_j^2 \\ x_j^3 & y_j^3 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} x_j^1 & y_j^1 \\ x_j^3 & y_j^3 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} x_j^1 & y_j^1 \\ x_j^2 & y_j^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_j^2 & y_j^2 \\ x_j^3 & y_j^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_j^3 & y_j^3 \\ x_j^1 & y_j^1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_j^1 & y_j^1 \\ x_j^2 & y_j^2 \end{vmatrix}$$

パラメタを求めて、

$$u_j(x,y) = u_j^1(\alpha_j^1 x + \beta_j^1 y + \gamma_j^1) + u_j^2(\alpha_j^2 x + \beta_j^2 y + \gamma_j^2) + u_j^3(\alpha_j^3 x + \beta_j^3 y + \gamma_j^3)$$

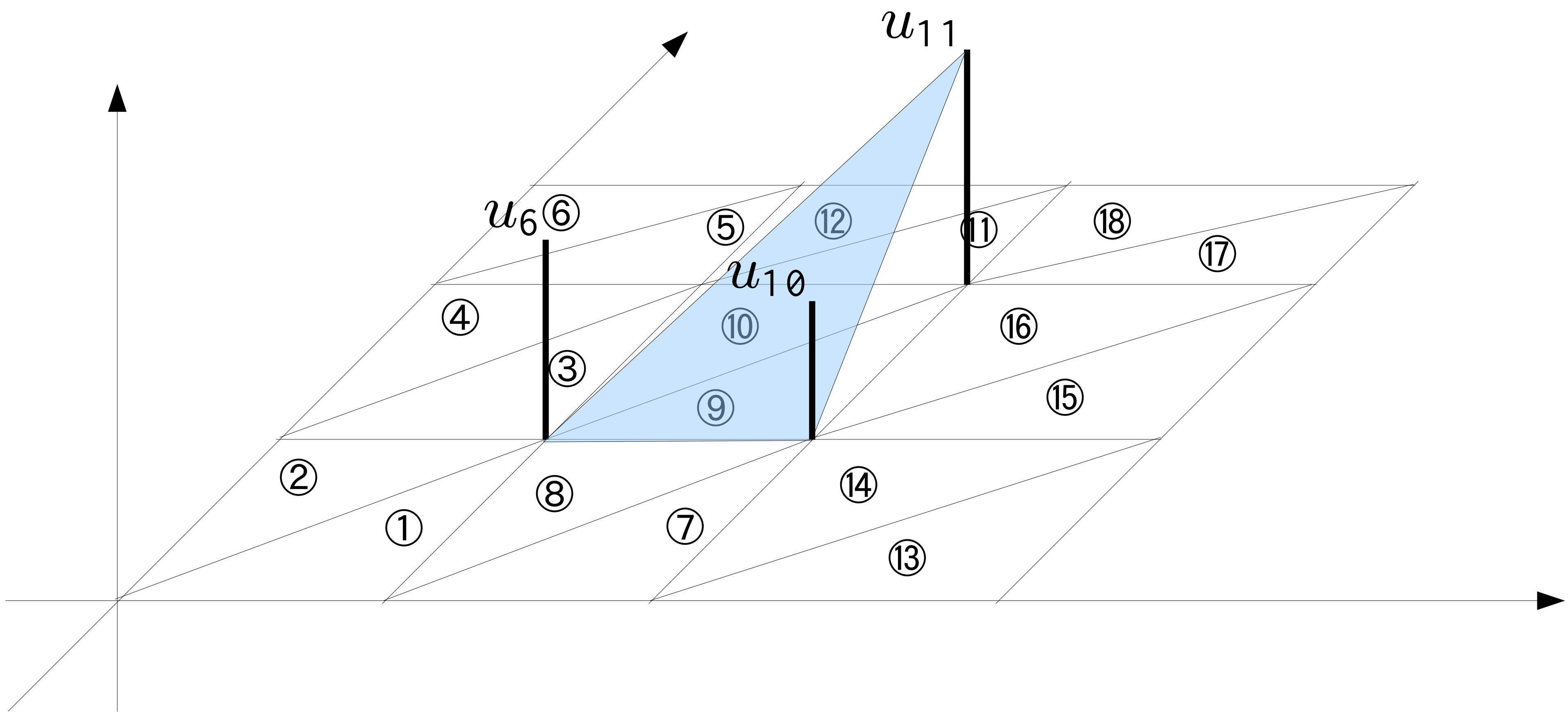
$$\alpha_j^k = \begin{vmatrix} y_j^{k+1} & 1 \\ y_j^{k+2} & 1 \end{vmatrix} / |A_j|, \beta_j^k = \begin{vmatrix} x_j^{k-1} & 1 \\ x_j^{k-2} & 1 \end{vmatrix} / |A_j|, \gamma_j^k = \begin{vmatrix} x_j^{k+1} & y_j^{k+1} \\ x_j^{k+2} & y_j^{k+2} \end{vmatrix} / |A_j|,$$

$$x_j^4 = x_j^1, x_j^5 = x_j^2, x_j^0 = x_j^3, x_j^{-1} = x_j^2.$$

- 端点値=重みとした3つの関数の重ね合せと考える

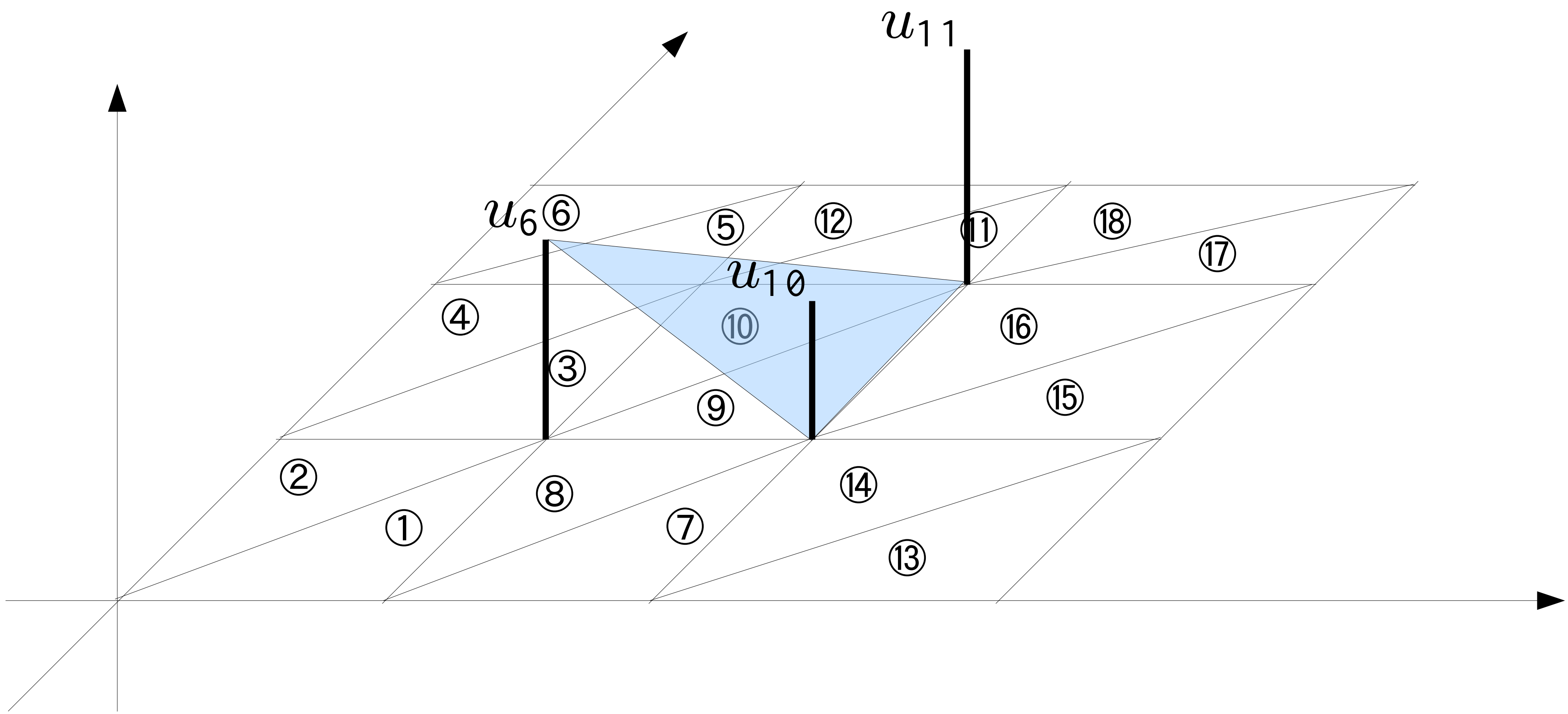
基底関数の重ね合せ

$$u_j^1(\alpha_j^1 x+\beta_j^1 y+\gamma_j^1) = u_j^1\left(\begin{vmatrix} y_j^2 & 1 \\ y_j^3 & 1\end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x_j^3 & 1 \\ x_j^2 & 1\end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_j^2 & y_j^2 \\ x_j^3 & y_j^3\end{vmatrix}\right)/|A_j|.$$



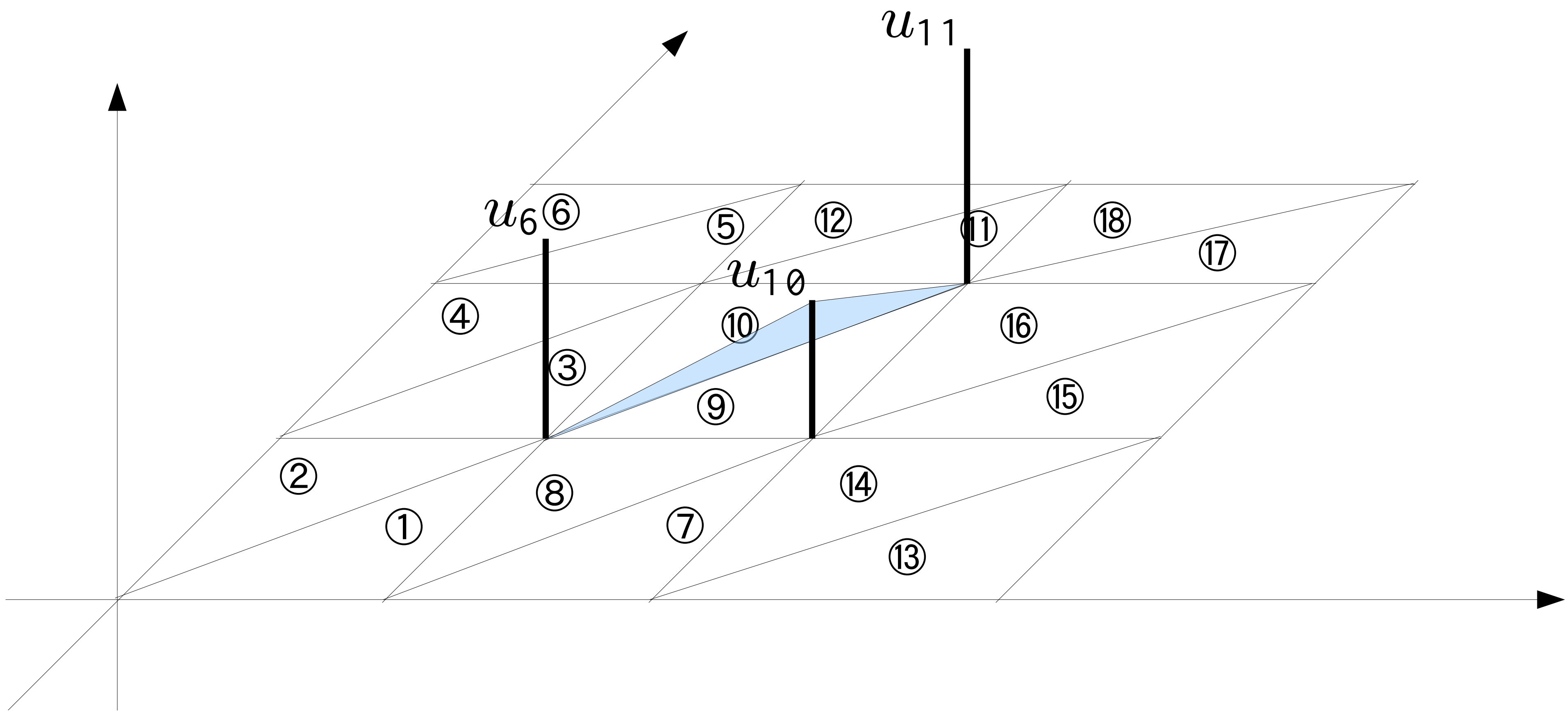
基底関数の重ね合せ

$$u_j^2(\alpha_j^2 x+\beta_j^2 y+\gamma_j^2) = u_j^2 \left(\begin{vmatrix} y_j^3 & 1 \\ y_j^1 & 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x_j^1 & 1 \\ x_j^3 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_j^3 & y_j^3 \\ x_j^1 & y_j^1 \end{vmatrix} \right) / |A_j|.$$



基底関数の重ね合せ

$$u_j^3(\alpha_j^3 x+\beta_j^3 y+\gamma_j^3) = u_j^3 \left(\begin{vmatrix} y_j^1 & 1 \\ y_j^2 & 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x_j^2 & 1 \\ x_j^1 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_j^1 & y_j^1 \\ x_j^2 & y_j^2 \end{vmatrix} \right) / |A_j|.$$

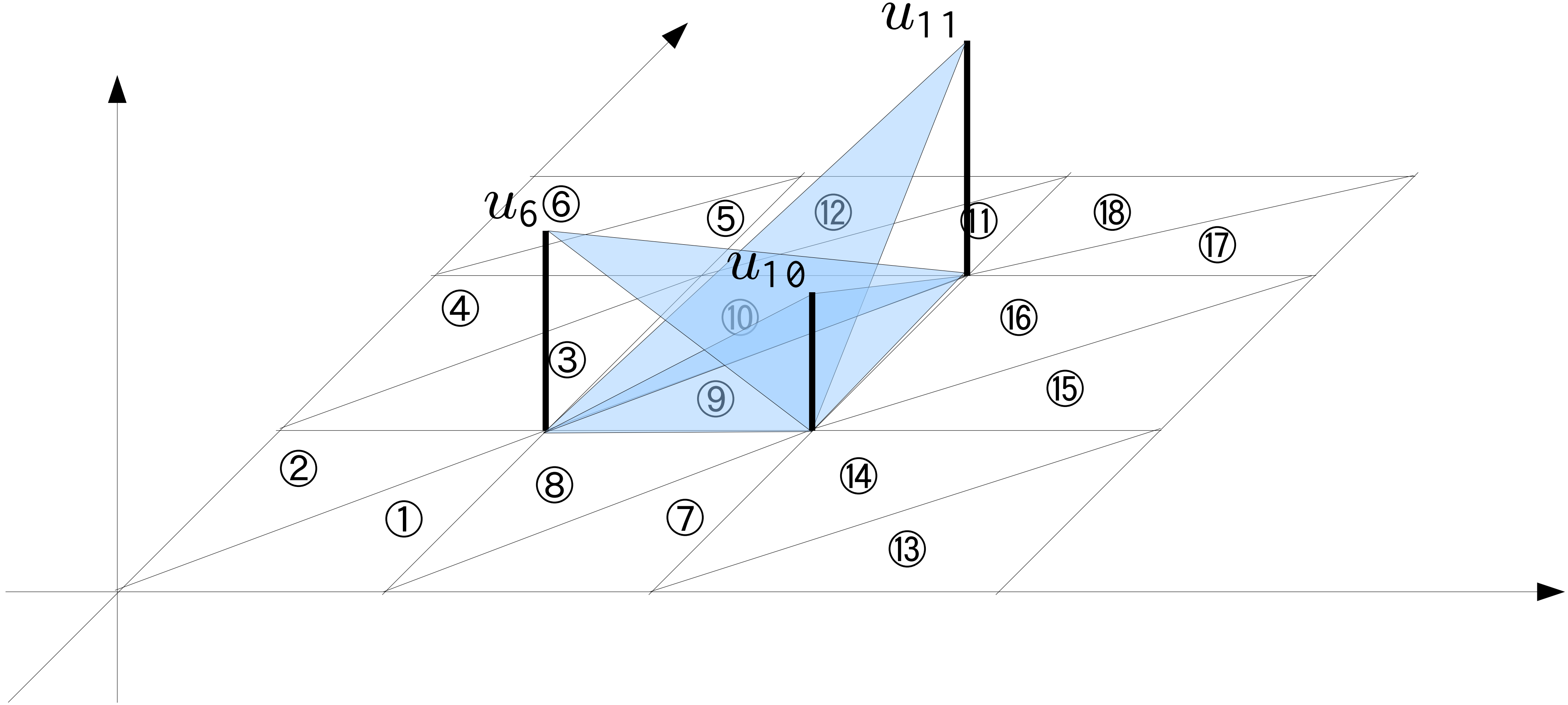


基底関数の重ね合せ

$$u_j^1(\alpha_j^1 x+\beta_j^1 y+\gamma_j^1) = u_j^1 \left(\begin{vmatrix} y_j^2 & 1 \\ y_j^3 & 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x_j^3 & 1 \\ x_j^2 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_j^2 & y_j^2 \\ x_j^3 & y_j^3 \end{vmatrix} \right) / |A_j|.$$

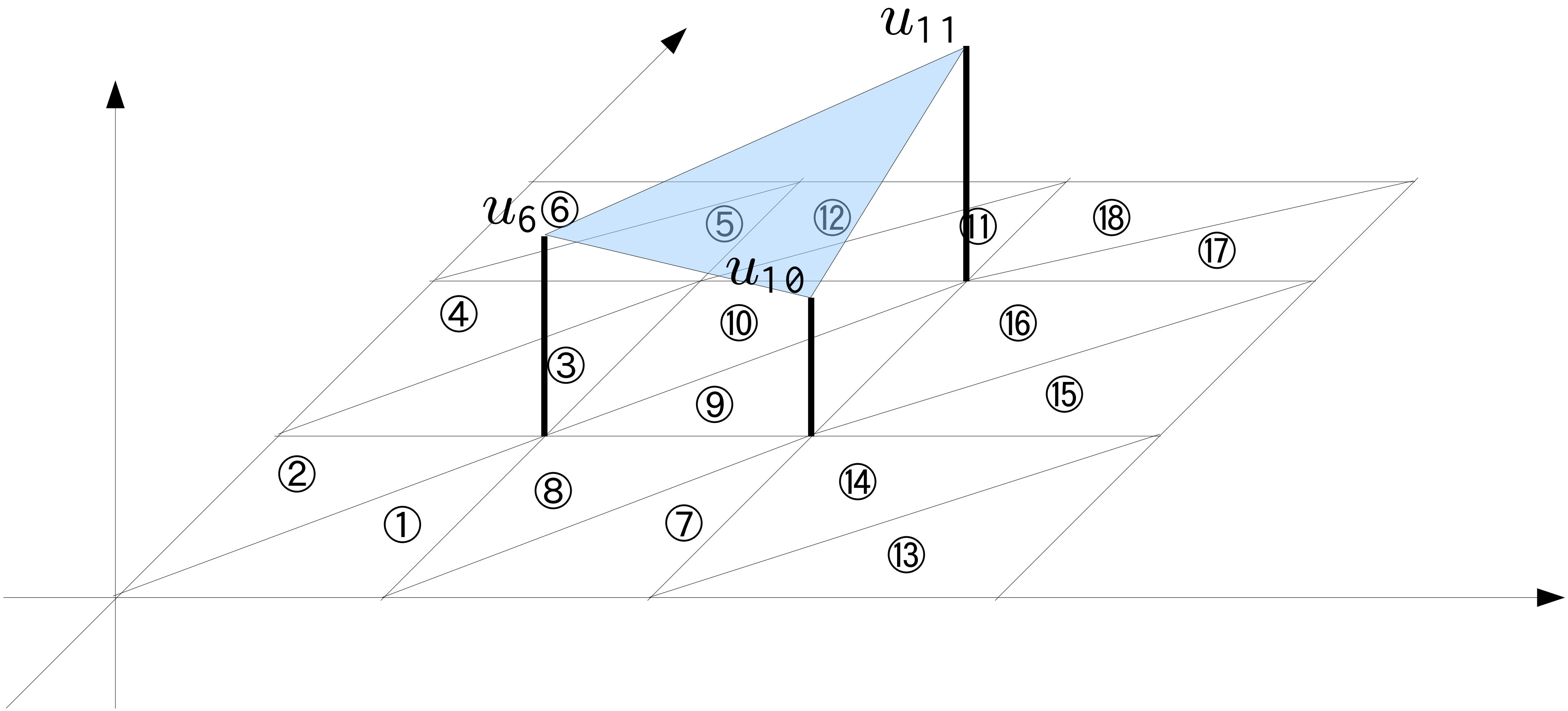
$$u_j^2(\alpha_j^2 x+\beta_j^2 y+\gamma_j^2) = u_j^2 \left(\begin{vmatrix} y_j^3 & 1 \\ y_j^1 & 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x_j^1 & 1 \\ x_j^3 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_j^3 & y_j^3 \\ x_j^1 & y_j^1 \end{vmatrix} \right) / |A_j|.$$

$$u_j^3(\alpha_j^3 x+\beta_j^3 y+\gamma_j^3) = u_j^3 \left(\begin{vmatrix} y_j^1 & 1 \\ y_j^2 & 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x_j^2 & 1 \\ x_j^1 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_j^1 & y_j^1 \\ x_j^2 & y_j^2 \end{vmatrix} \right) / |A_j|.$$

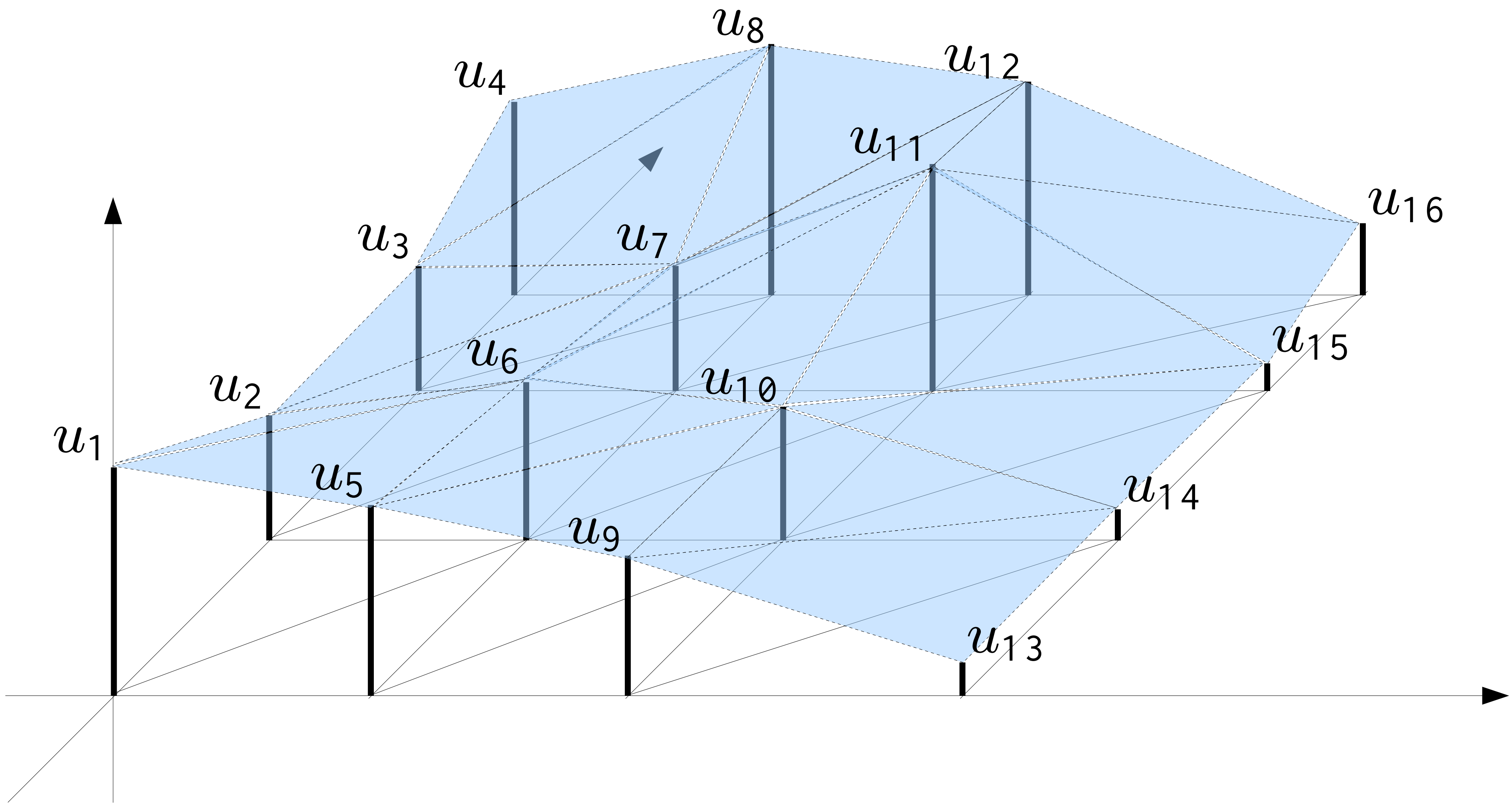


基底関数の重ね合せ

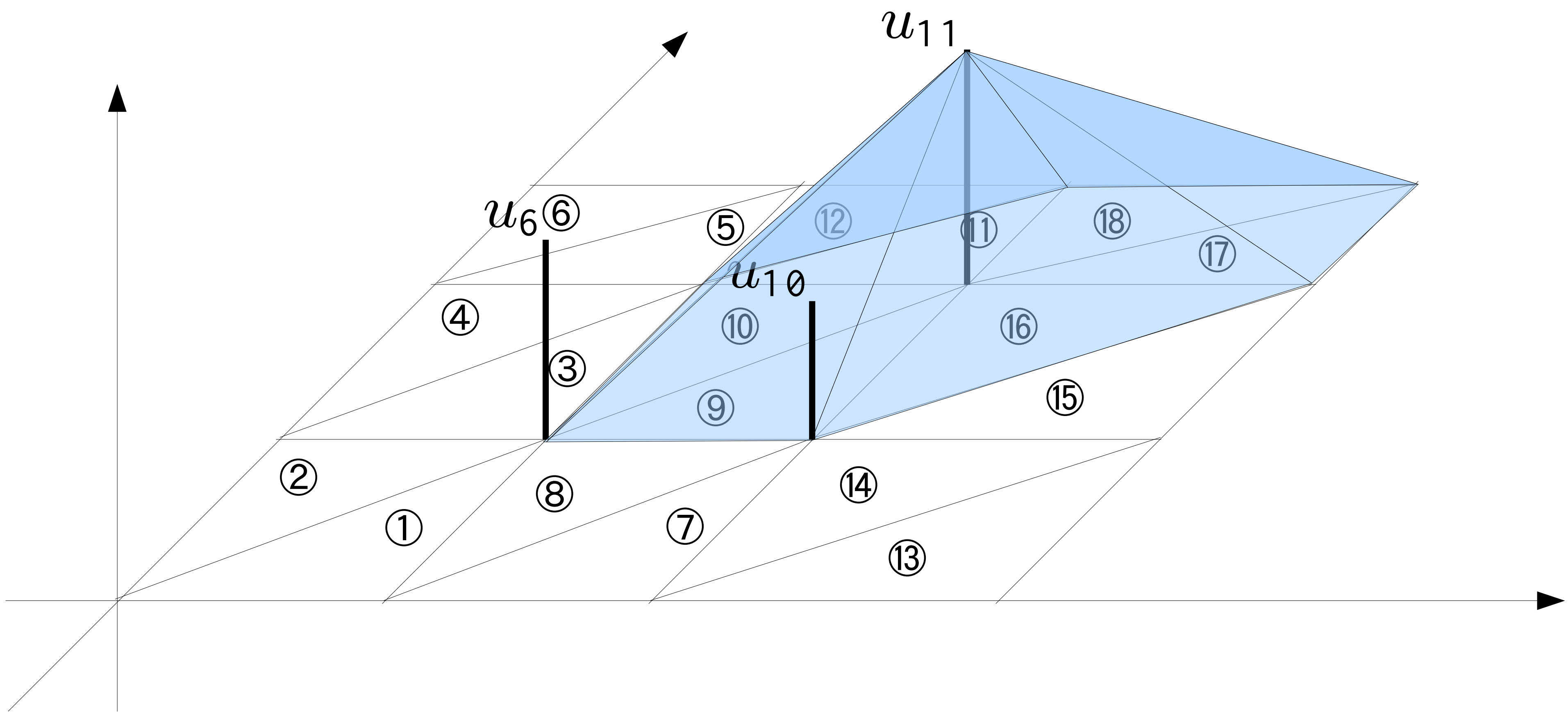
$$u_j^1(\alpha_j^1 x+\beta_j^1 y+\gamma_j^1)+u_j^2(\alpha_j^2 x+\beta_j^2 y+\gamma_j^2)+u_j^3(\alpha_j^3 x+\beta_j^3 y+\gamma_j^3)$$



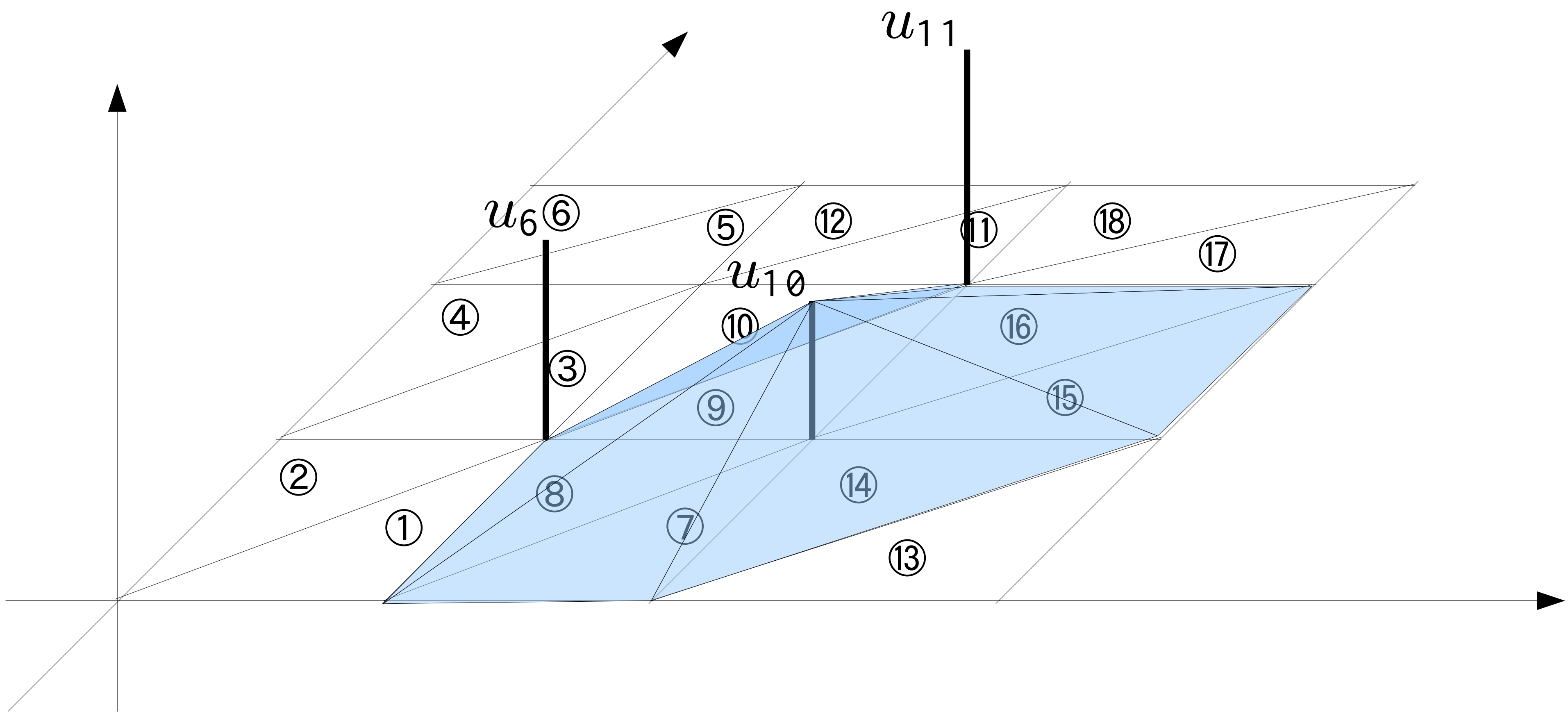
基底関数の重ね合せ



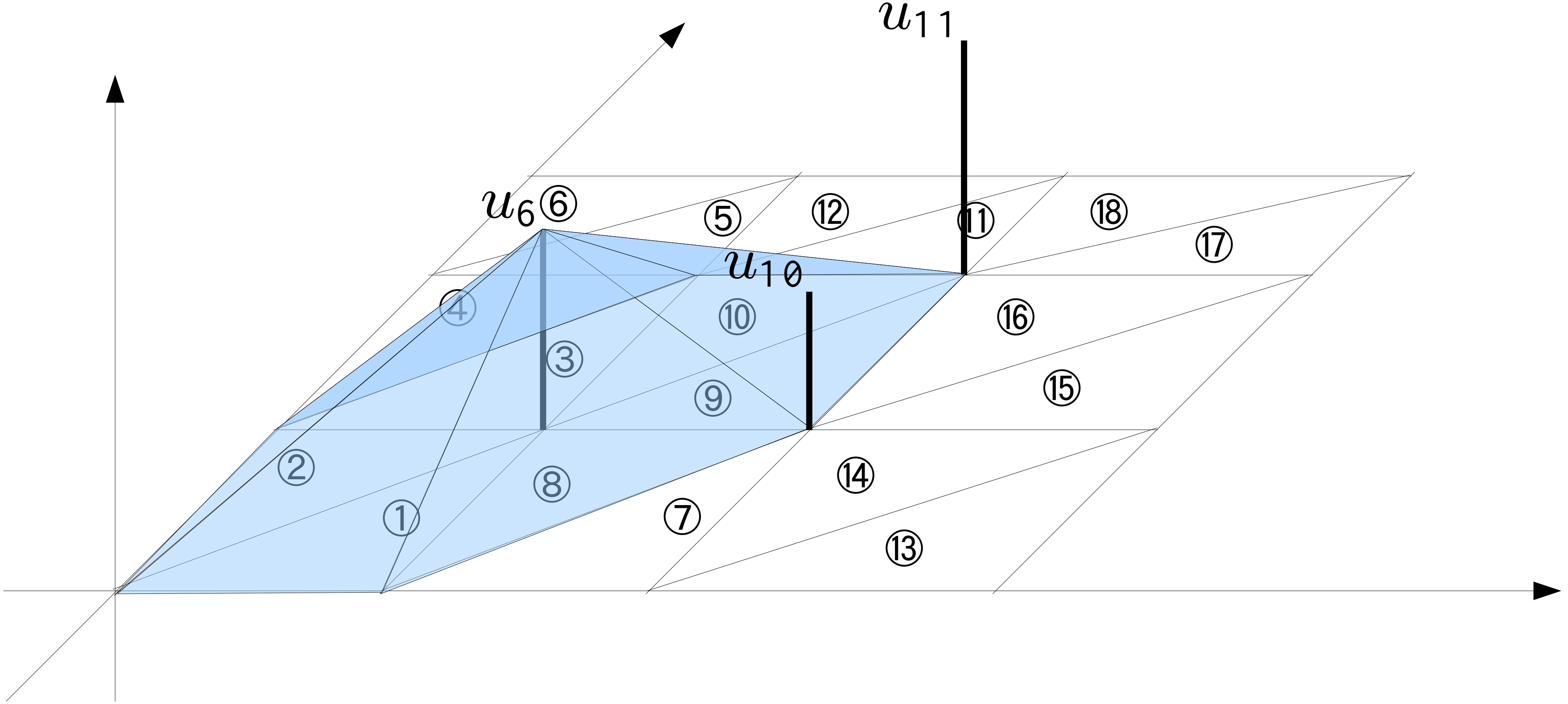
基底関数の重ね合せ



基底関数の重ね合せ



基底関数の重ね合せ



レポート(5)
復習

学籍番号・氏名を記し提出してください。

- 3次元の問題にGalerkin法による有限要素法を適用する。1次関数を用いた基底関数のパラメタと4面体要素上の端点値とを変換する式を示してください
- 2次元の3つの基底関数に対応する 1次元の基底関数は何ですか?

授業レポート用紙：氏名（　　　　　　　　　　　）学籍番号(　　　　　　　　)

②2次元の3つの基底関数に対応する
1次元の基底関数は何ですか？

点$x=x_1,x_2$で値 $y(x_1)=y_1, y(x_2)=y_2$をとる
折れ線関数を考えれば良いので、

$y(x)=ax+b$

と置いて$x=x_1,x_2$での値を条件にした
変数をa,bとした連立方程式を考える。

$ax_1+b=y_1$
$ax_2+b=y_2$

$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

クラメールの公式より$y(x)$は、

$$y(x)=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}}x+\frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}}$$
$$=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}x+\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}$$

これをy_1とy_2を係数として整理して、

$$y(x)=y_1\frac{x-x_2}{x_1-x_2}x+y_2\frac{x_1-x}{x_1-x_2}$$

2つの基底関数を得る。

①3次元の問題にGalerkin法による有限要素法を適用する。1次関数を用いた基底関数のパラメタと4面体要素上の端点値とを変換する式を示してください

$u(x,y,z)=ax+by+cx+d$

と置き端点${}^t[x_j,y_j,z_j]$（$j=1,\ldots,4$)の関数値u_1,u_2,u_3,u_4から
折れ線関数を得る。

$$u=\frac{\begin{vmatrix} u_1y_1z_1 1 \\ u_2y_2z_2 1 \\ u_3y_3z_3 1 \\ u_4y_4z_4 1 \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} x_1u_1z_1 1 \\ x_2u_2z_2 1 \\ x_3u_3z_3 1 \\ x_4u_4z_4 1 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} x_1y_1u_1 1 \\ x_2y_2u_2 1 \\ x_3y_3u_3 1 \\ x_4y_4u_4 1 \end{vmatrix}z+\begin{vmatrix} x_1y_1z_1u_1 \\ x_2y_2z_2u_2 \\ x_3y_3z_3u_3 \\ x_4y_4z_4u_4 \end{vmatrix}}{\det A}$$

これを整理して基底関数を得る。

$$\begin{aligned}
&=u_1\left[\begin{vmatrix} y_2z_2 1 \\ y_3z_3 1 \\ y_4z_4 1 \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} x_2z_2 1 \\ x_3z_3 1 \\ x_4z_4 1 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} x_2y_2 1 \\ x_3y_3 1 \\ x_4y_4 1 \end{vmatrix}z\right]/\det A \\
&+u_2\left[-\begin{vmatrix} y_1z_1 1 \\ y_3z_3 1 \\ y_4z_4 1 \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} x_1z_1 1 \\ x_3z_3 1 \\ x_4z_4 1 \end{vmatrix}y-\begin{vmatrix} x_1y_1 1 \\ x_3y_3 1 \\ x_4y_4 1 \end{vmatrix}z\right]/\det A \\
&+u_3\left[\begin{vmatrix} y_1z_1 1 \\ y_2z_2 1 \\ y_4z_4 1 \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} x_1z_1 1 \\ x_2z_2 1 \\ x_4z_4 1 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} x_1y_1 1 \\ x_2y_2 1 \\ x_4y_4 1 \end{vmatrix}z\right]/\det A \\
&+u_4\left[-\begin{vmatrix} y_1z_1 1 \\ y_2z_2 1 \\ y_3z_3 1 \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} x_1z_1 1 \\ x_2z_2 1 \\ x_3z_3 1 \end{vmatrix}y-\begin{vmatrix} x_1y_1 1 \\ x_2y_2 1 \\ x_3y_3 1 \end{vmatrix}z\right]/\det A
\end{aligned}$$

$$\det A=\begin{vmatrix} x_1y_1z_1 1 \\ x_2y_2z_2 1 \\ x_3y_3z_3 1 \\ x_4y_4z_4 1 \end{vmatrix}$$

2019年11月18日（月）

できれば授業の感想も書いてください。

残差方程式と弱形式

- Laplace方程式の重み付き残差

$$\sum_j c_j \iint u_k(x,y)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u_j(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

- 有限要素 j には3つの**1次**関数が割り付けられる

$$u_j(x,y)=$$
$$u_j^1(\alpha_j^1 x+\beta_j^1 y+\gamma_j^1)+u_j^2(\alpha_j^2 x+\beta_j^2 y+\gamma_j^2)+u_j^3(\alpha_j^3 x+\beta_j^3 y+\gamma_j^3)$$

- 残差方程式を書き換える

$$\iint u_k(x,y)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_j(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=u_k\frac{\partial u_j}{\partial x}-\iint\frac{\partial u_k}{\partial x}(x,y)\frac{\partial u_j}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

- 境界値がゼロになるように関数を選ぶ、

残差方程式と弱形式

- Laplace方程式の重み付き残差

$$\sum_j c_j \iint u_k(x,y)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u_j(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

- 有限要素 j には3つの**1次**関数が割り付けられる

$$u_j(x,y)=$$

$$u_j^1(\alpha_j^1x+\beta_j^1y+\gamma_j^1)+u_j^2(\alpha_j^2x+\beta_j^2y+\gamma_j^2)+u_j^3(\alpha_j^3x+\beta_j^3y+\gamma_j^3)$$

- 有限要素 j に関する残差方程式

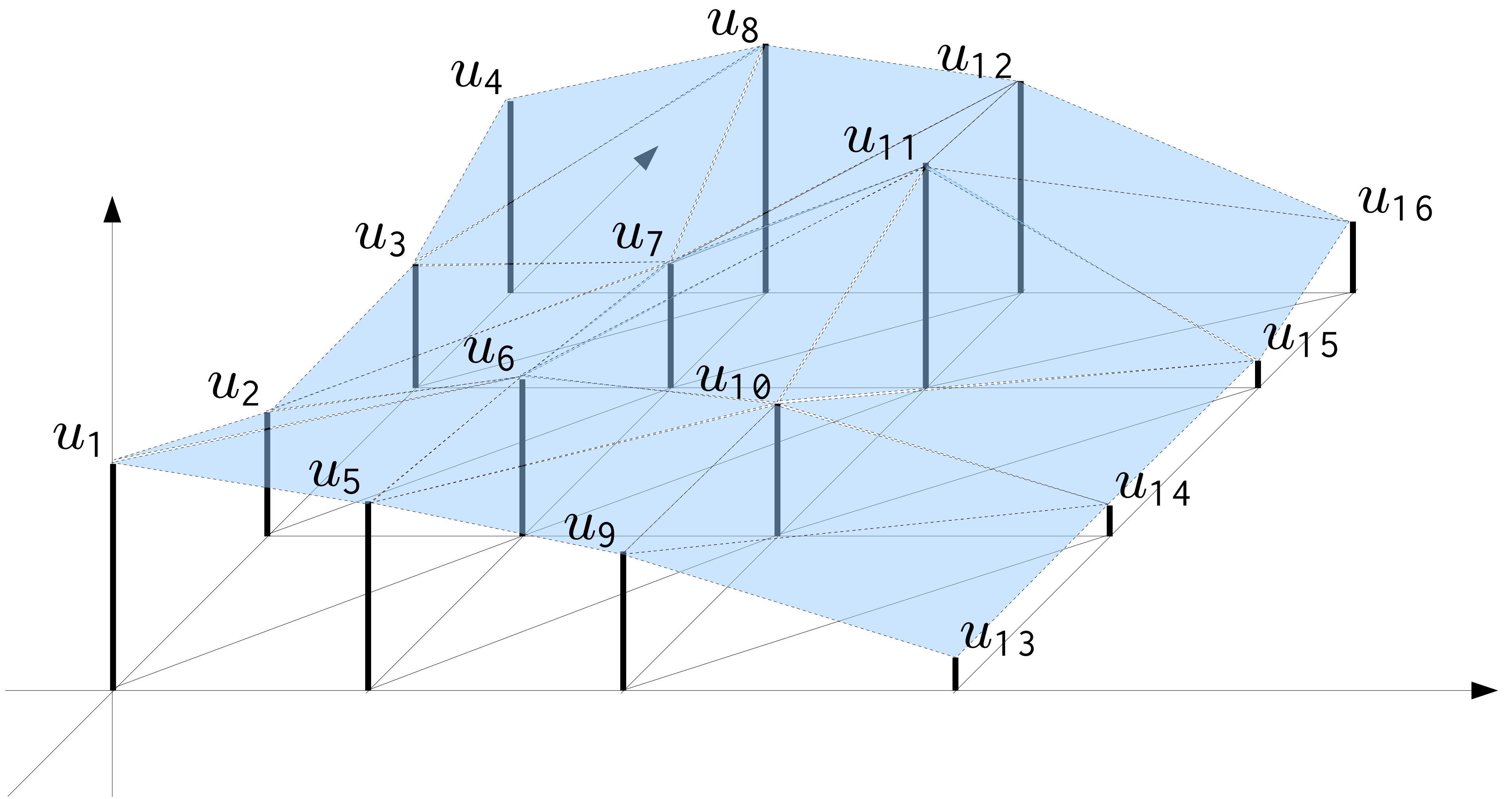
$$\sum_{l=1}^{3}u_j^l\iint\frac{\partial A_j^l}{\partial x}\frac{\partial A_j^m}{\partial x}+\frac{\partial A_k^l}{\partial y}\frac{\partial A_j^m}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\quad m=1,2,3,$$

$$A_j^l(x,y)=\alpha_j^lx+\beta_j^ly+\gamma_j^l$$

$$\alpha_j^k=y_j^{k+1}-y_j^{k+2},\beta_j^k=x_j^{k-1}-x_j^{k-2},\gamma_j^k=x_j^{k+1}y_j^{k-1}-x_j^{k-1}y_j^{k+1},$$

$$k=1,2,3,4=1,5=2,\quad -1=3,-2=2,\ldots$$

近似解の構成



復習:重み付き残差法

- Laplace方程式($\triangle u$=0)の残差
  厳密解 u の近似 U を考える(u〜U)
  Uの誤差:$U-u$　残差:$\triangle U-\triangle u=\triangle(U-u)$
  誤差の代りに残差を最小にすることを考える
- 残差の評価
  最大誤差:$\max|U-u|$　最大残差:$\max|\triangle(U-u)|$

  平均誤差:$\int[U-u]\,\mathrm{d}x/\int 1\,\mathrm{d}x$　平均残差:$\int\triangle[U-u]\,\mathrm{d}x/\int 1\,\mathrm{d}x$
- 重み付き残差法

  関数列 $w_1,\ldots,w_n$ と $u_1,\ldots,u_n$ を使って $U=\Sigma_j c_j u_j$ として

  連立方程式 $(w_k,\triangle[U-u])=0$ となるように$c_1,\ldots,c_n$ を決める

  $(w,\triangle[U-u]):=\int w\triangle[U-u]\,\mathrm{d}x$　w: **重み関数**

復習:ガレルキン法

- 重み付き残差法の方程式を線形作用素$\mathfrak{L}$を用いて

  $(w_k,\mathfrak{L}U)=0$ とする、$\mathfrak{L}U=\Sigma_j c_j \mathfrak{L} u_j$ より $\Sigma_j c_j (w_k,\mathfrak{L} u_j)=0$

2つの関数列にある種の直交性 $(w_k,\mathfrak{L} u_j)=d_{jk}$ があると嬉しい

- ガレルキン法:w_k, u_j に同じ(直行)関数列を採用する方法
  $\Sigma_j c_j (u_k,\mathfrak{L} u_j)=0$ を考えることになる
- Laplace方程式では

  $$\Sigma_j c_j (u_k,\mathfrak{L} u_j)= \sum_j c_j (u_k,\mathfrak{L}\, u_j)=\sum_j c_j \int u_k \triangle u_j \,\mathrm{d}\,x=0$$

  から導かれる連立方程式を解くことになる。

残差方程式と弱形式

- Laplace方程式の重み付き残差の連立方程式(1次元)

$$\sum_j c_j \int u_k \triangle u_j \mathrm{d}x = 0 \quad k = 1, 2, \ldots$$

- 有限要素には**1次**関数が割り付けられる
  2階導関数=0
- 残差方程式を書き換える

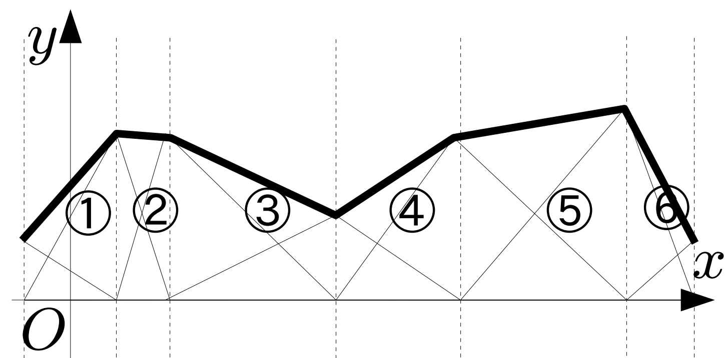
$$\int u_k(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_j(x) \mathrm{d}x = u_k \frac{\partial u_j}{\partial x} - \int \frac{\partial u_k}{\partial x}(x) \frac{\partial u_j}{\partial x}(x) \mathrm{d}x = 0$$

- 境界値がゼロになるように関数を選んで右辺第1項を消す

残差方程式の弱形式: $\int \frac{\partial u_k}{\partial x}(x) \frac{\partial u_j}{\partial x}(x) \mathrm{d}x = 0$

残差方程式と弱形式

- 1次関数を組合せ、各節点を挟む2区間以外ゼロの関数列 $u_1,...,u_n$ を使って近似解 $U=\Sigma_j c_j u_j$ を作る



- 端のu_1,u_n 以外は境界値がゼロなので残差方程式の弱形式から連立方程式を得ることができる。

$$\sum_j c_j \int \frac{\partial u_k}{\partial x}(x)\frac{\partial u_j}{\partial x}(x)\mathrm{d}x = 0 \quad k=2,\ldots,n-1$$

- 境界条件からc_1,c_n を決められるので方程式の数は足りる

残差方程式と弱形式

- 2次元Laplace方程式の重み付き残差（弱形式）

$$\sum_j c_j \iint \frac{\partial u_k}{\partial x}\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial u_k}{\partial y}\frac{\partial u_j}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

- 有限要素 j には1次関数が割り付けられる

$$u_j(x,y) = u_j^1(\alpha_j^1 x + \beta_j^1 y + \gamma_j^1) + u_j^2(\alpha_j^2 x + \beta_j^2 y + \gamma_j^2) + u_j^3(\alpha_j^3 x + \beta_j^3 y + \gamma_j^3)$$

- 有限要素 j に関する残差

$$\sum_{l=1}^{3} u_j^l \iint \frac{\partial A_j^l}{\partial x}\frac{\partial A_j^m}{\partial x} + \frac{\partial A_j^l}{\partial y}\frac{\partial A_j^m}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{l=1}^{3} u_j^l \iint (\alpha_j^l \alpha_j^m + \beta_j^l \beta_j^m)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$m = 1,2,3, \qquad A_j^l(x,y) = \alpha_j^l x + \beta_j^l y + \gamma_j^l$$

$$\alpha_j^k = y_j^{k+1} - y_j^{k+2},\ \beta_j^k = x_j^{k-1} - x_j^{k-2},\ \gamma_j^k = x_j^{k+1} y_j^{k-1} - x_j^{k-1} y_j^{k+1},$$

$$k = 1,2,3,4 = 1,5 = 2, \quad -1 = 3, -2 = 2, \ldots$$

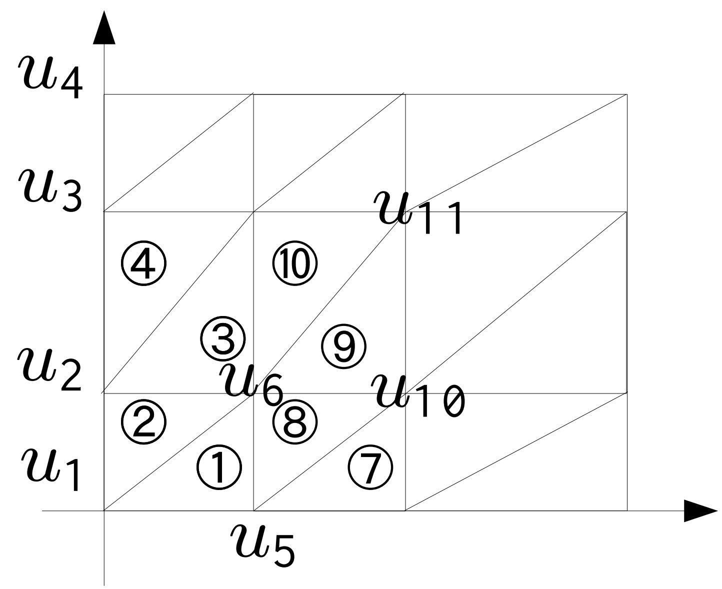
連立方程式の導出

- 例:Laplace方程式の境界値問題

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y)=0 \qquad\qquad 0<x,y<1,$$

$$u(x,0)=0,\ u(x,1)=1,\ u(0,y)\equiv(1,y)=y.$$

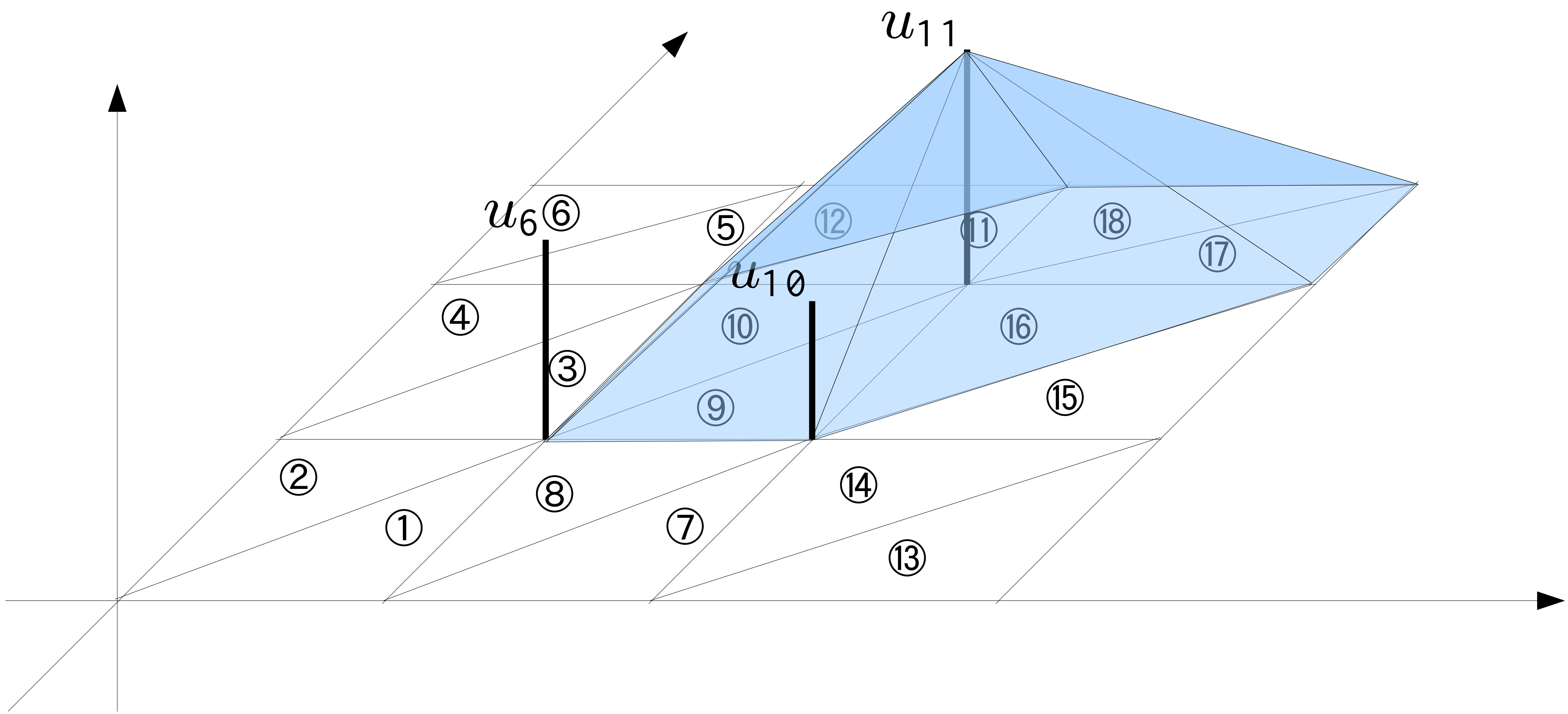
- 離散化:有限要素を定める
  ⇒未知量は端点値:$u_1,\ldots,u_{16}$
  ⑨なら、u_7,u_{10},u_{11} が関わる



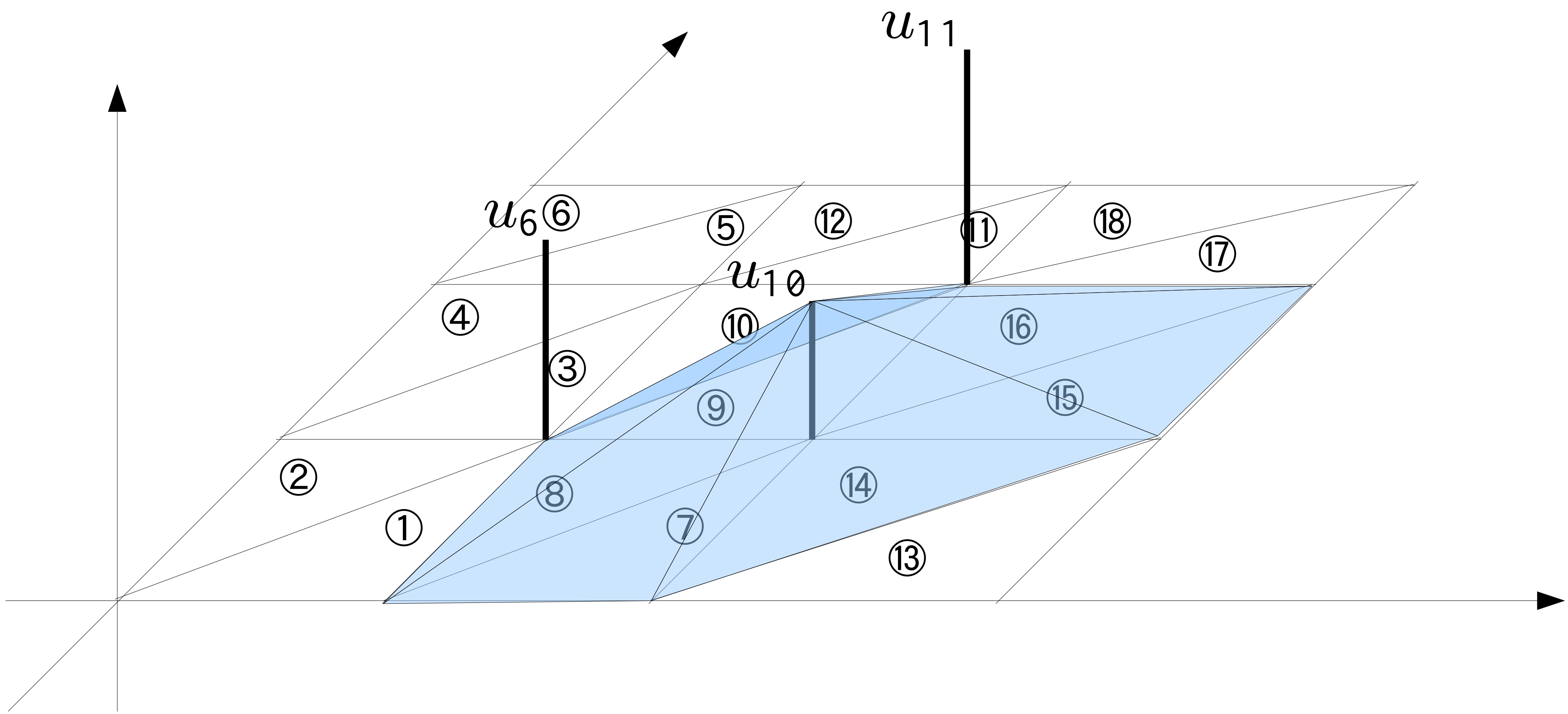
- 有限要素毎の残差方程式:
  j を要素番号として、3端点値
  ⑨なら、$u_9^1=u_7,u_9^2=u_{10},u_9^3=u_{11}$ として考える

$$\sum_{l=1}^{3}u_j^l\iint(\alpha_j^l\alpha_j^m+\beta_j^l\beta_j^m)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \alpha_j^k=y_j^{k+1}-y_j^{k+2},\ \beta_j^k=x_j^{k-1}-x_j^{k-2},$$

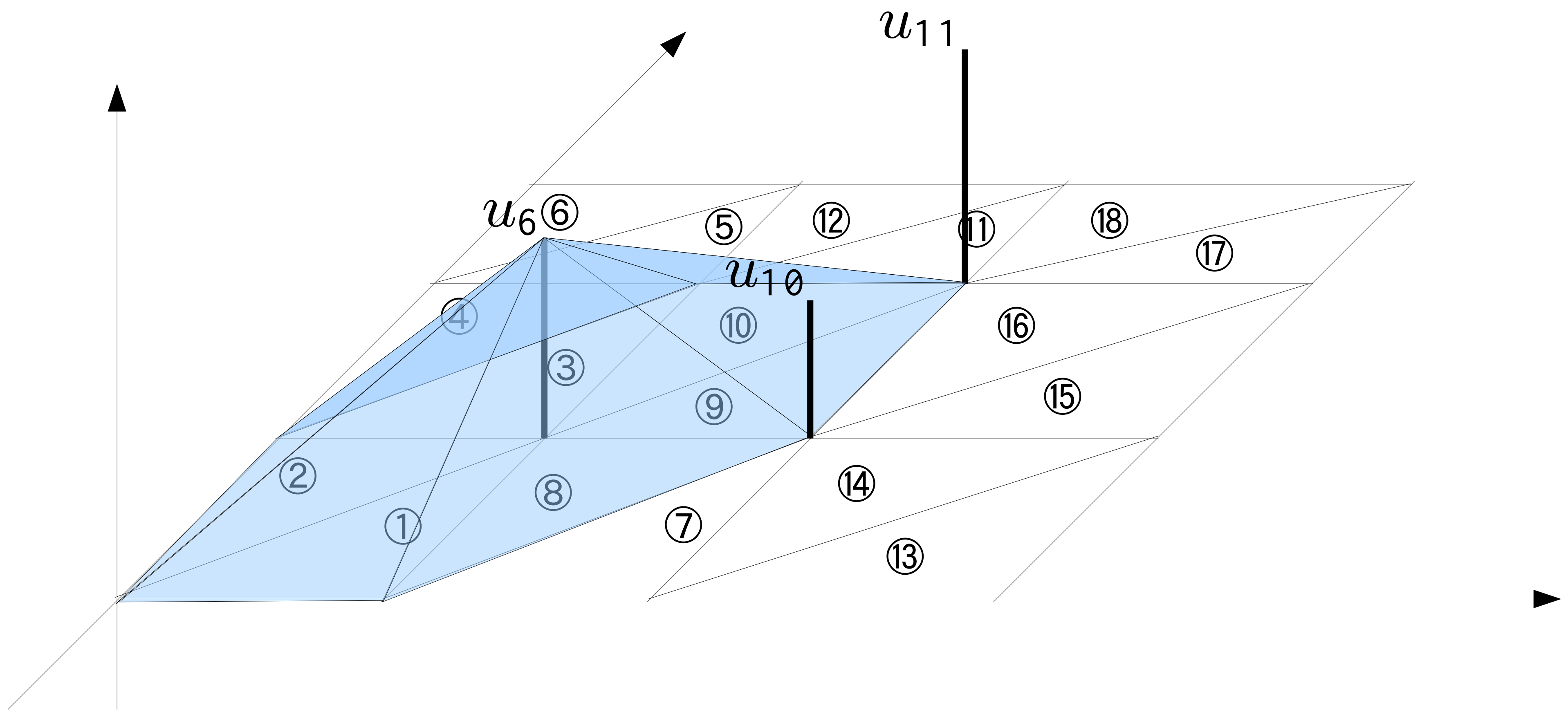
連立方程式の導出



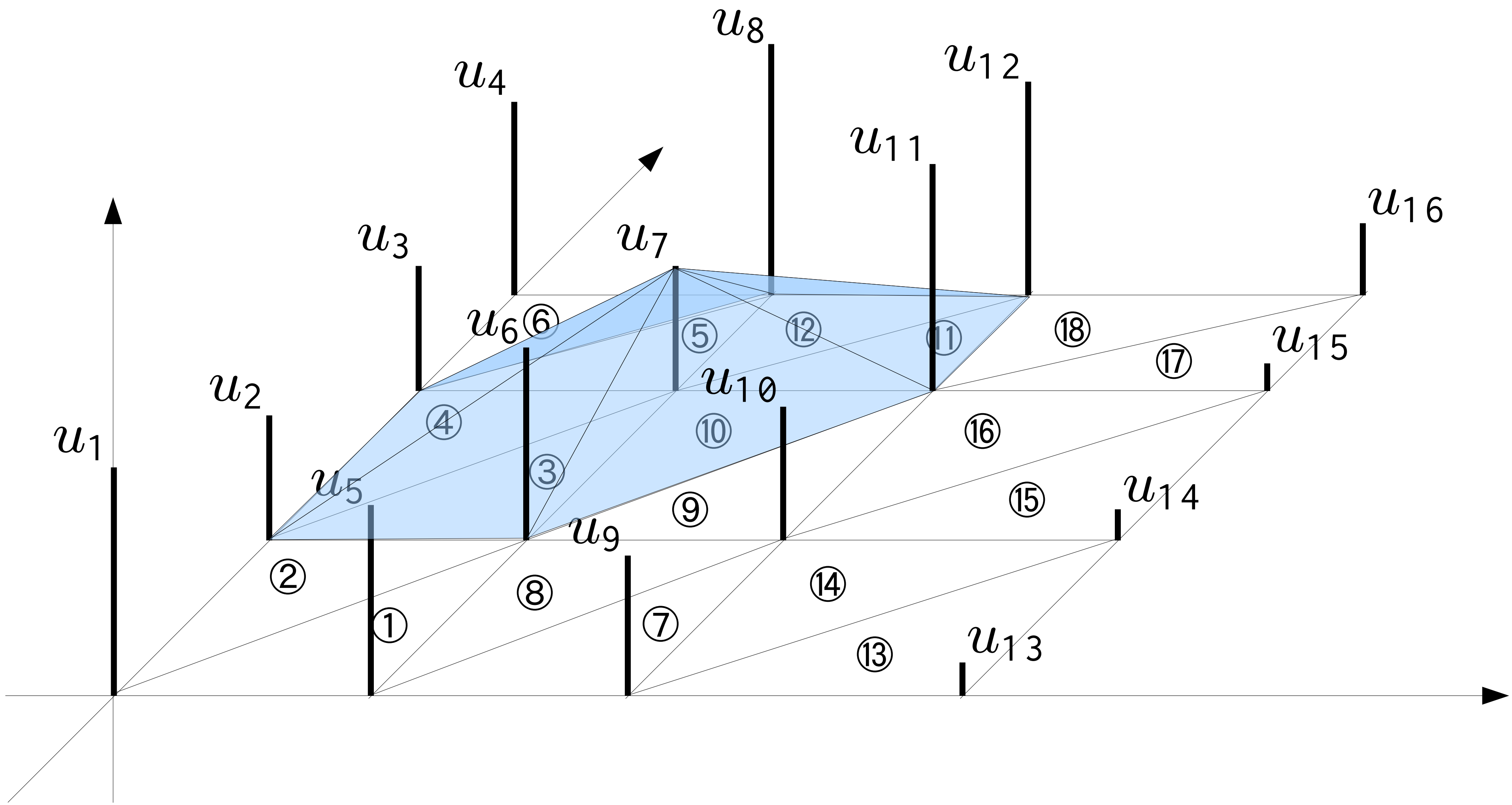
連立方程式の導出



連立方程式の導出

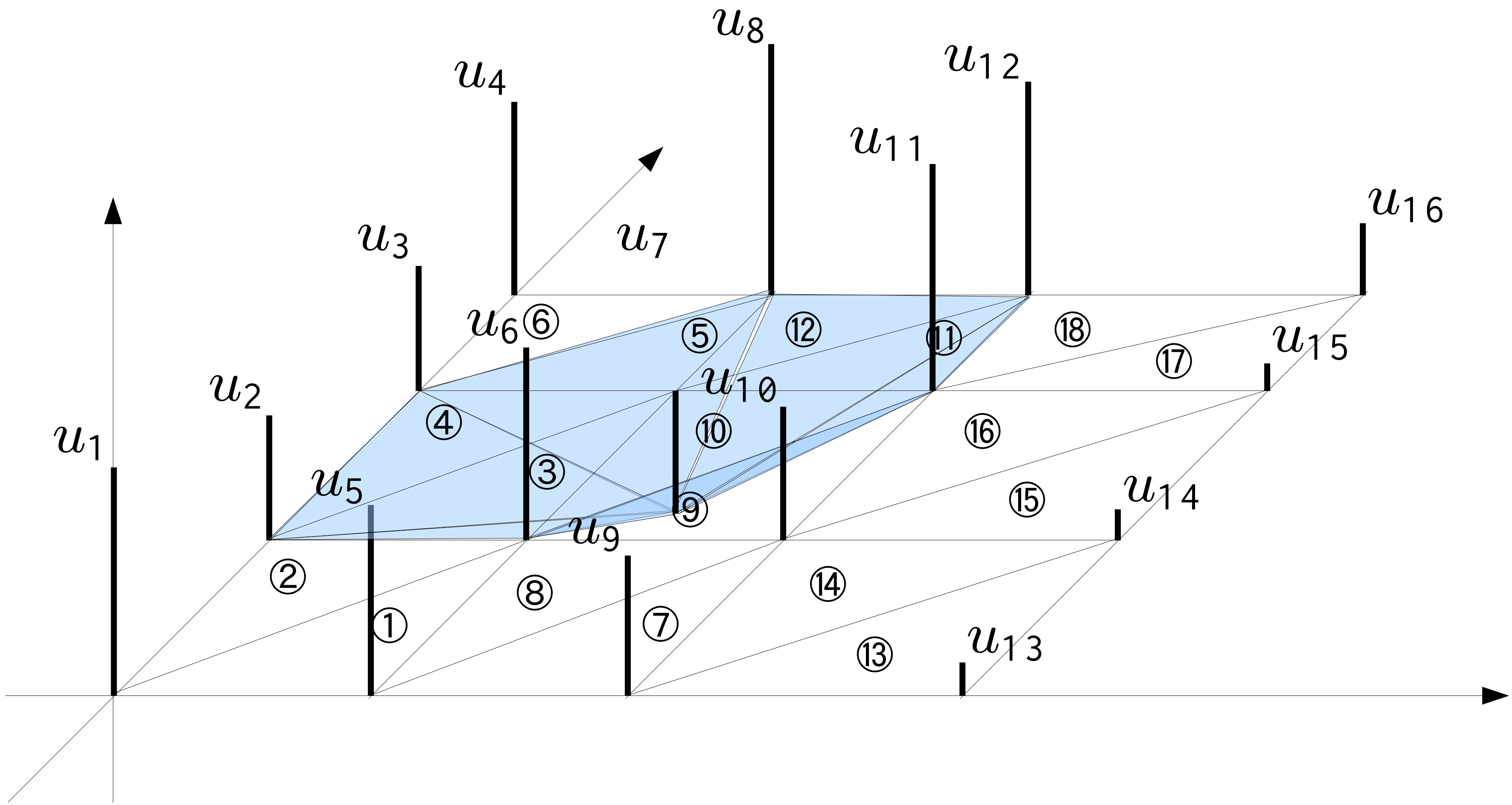


連立方程式の導出



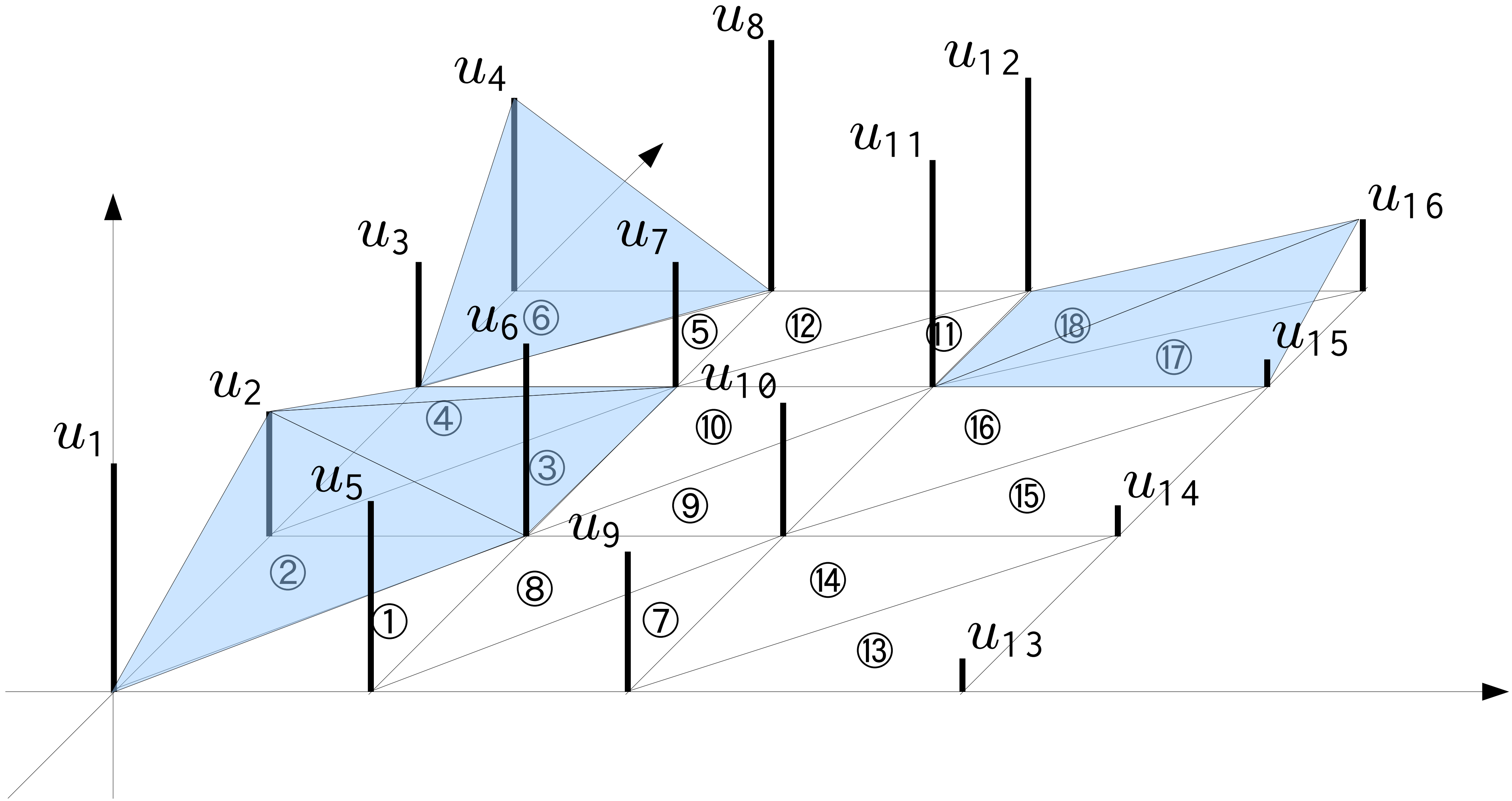
u_1
u_2
u_3
u_4
u_5
u_6
u_7
u_8
u_9
u_{10}
u_{11}
u_{12}
u_{13}
u_{14}
u_{15}
u_{16}
①
②
③
④
⑤
⑥
⑦
⑧
⑨
⑩
⑪
⑫
⑬
⑭
⑮
⑯
⑰
⑱

連立方程式の導出



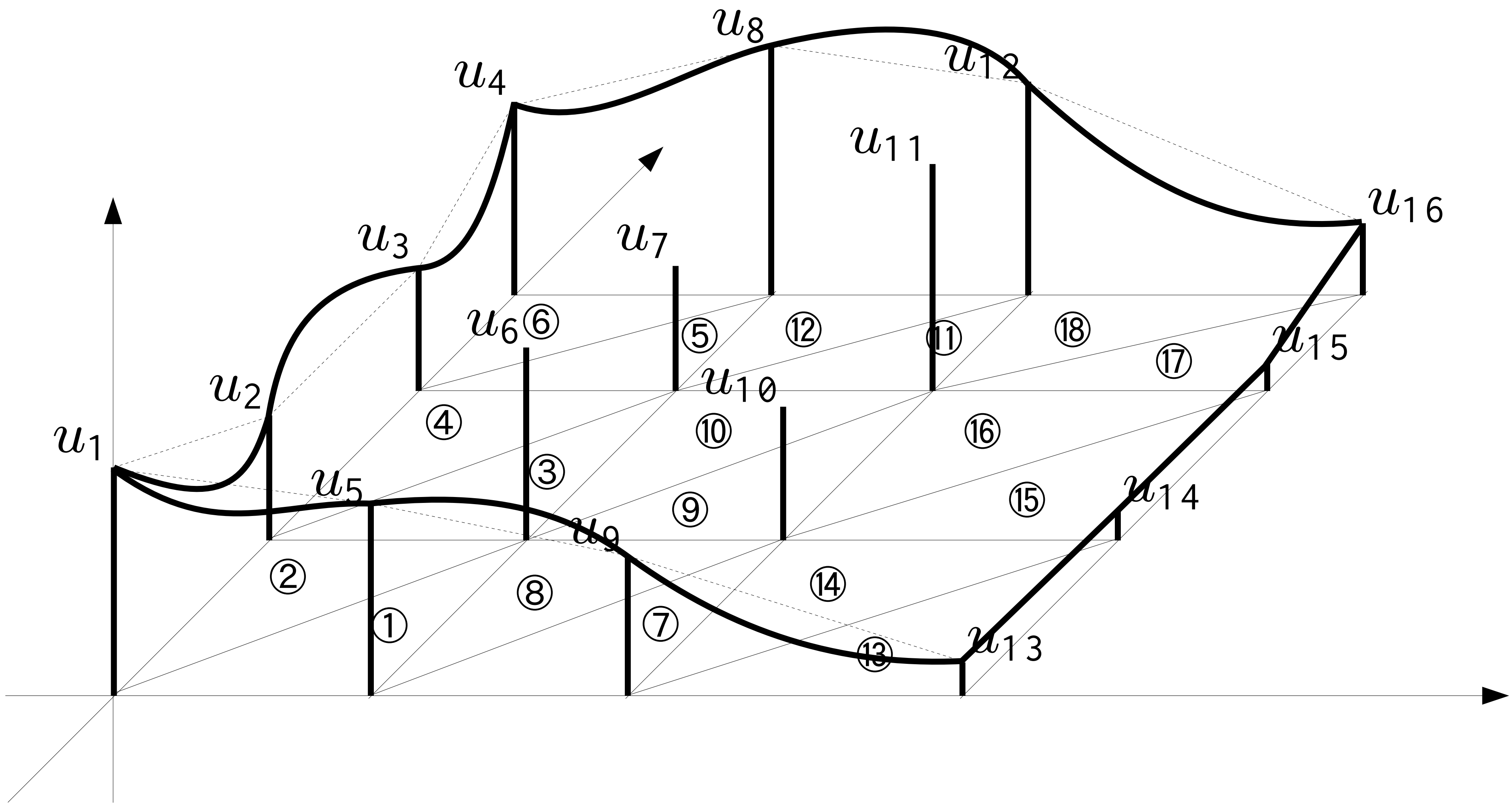
u_1
u_2
u_3
u_4
u_5
u_6
u_7
u_8
u_9
u_{10}
u_{11}
u_{12}
u_{13}
u_{14}
u_{15}
u_{16}
①
②
③
④
⑤
⑥
⑦
⑧
⑨
⑩
⑪
⑫
⑬
⑭
⑮
⑯
⑰
⑱

連立方程式の導出



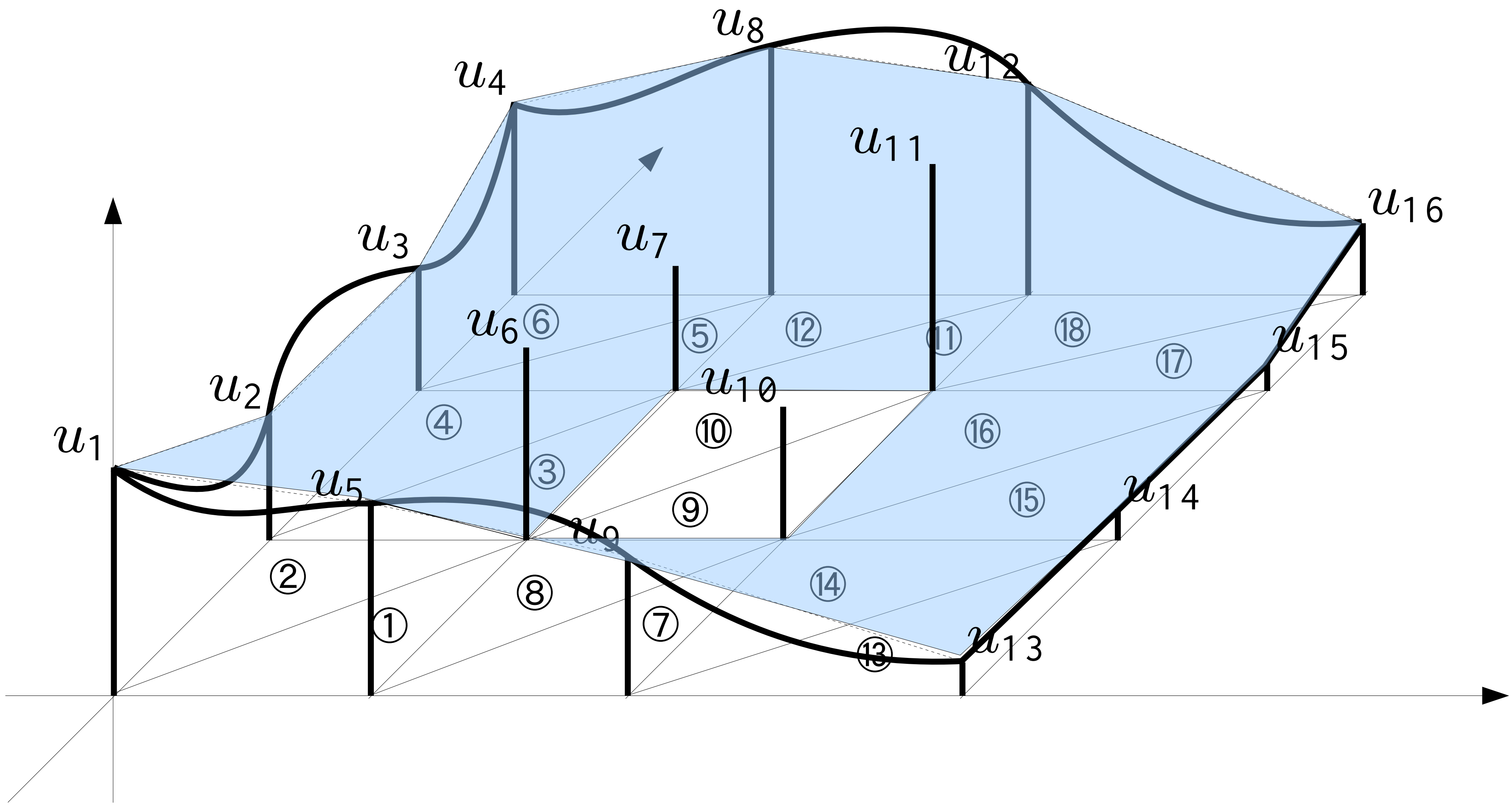
u_1
u_2
u_3
u_4
u_5
u_6
u_7
u_8
u_9
u_{10}
u_{11}
u_{12}
u_{13}
u_{14}
u_{15}
u_{16}
①
②
③
④
⑤
⑥
⑦
⑧
⑨
⑩
⑪
⑫
⑬
⑭
⑮
⑯
⑰
⑱

連立方程式の導出



u_8
u_{12}
u_4
u_{11}
u_{16}
u_3
u_7
u_6
⑥
⑤
⑫
⑪
⑱
u_{15}
⑰
u_2
u_{10}
④
⑩
⑯
u_1
③
u_5
⑨
⑮
u_{14}
u_9
②
⑧
⑭
①
⑦
u_{13}
⑬

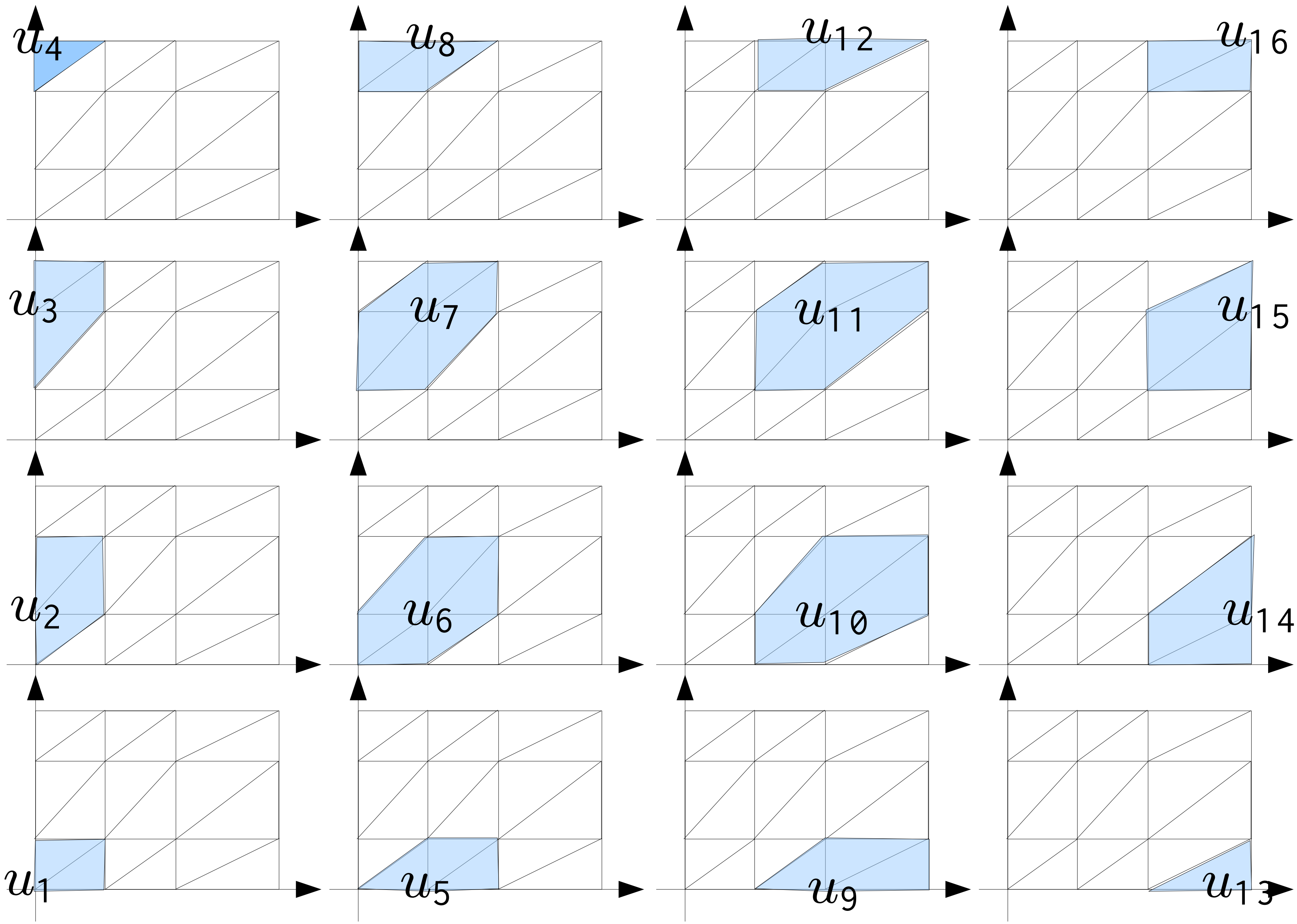
連立方程式の導出



u_1
u_2
u_3
u_4
u_5
u_6
u_7
u_8
u_9
u_{10}
u_{11}
u_{12}
u_{13}
u_{14}
u_{15}
u_{16}
①
②
③
④
⑤
⑥
⑦
⑧
⑨
⑩
⑪
⑫
⑬
⑭
⑮
⑯
⑰
⑱

連立方程式の導出

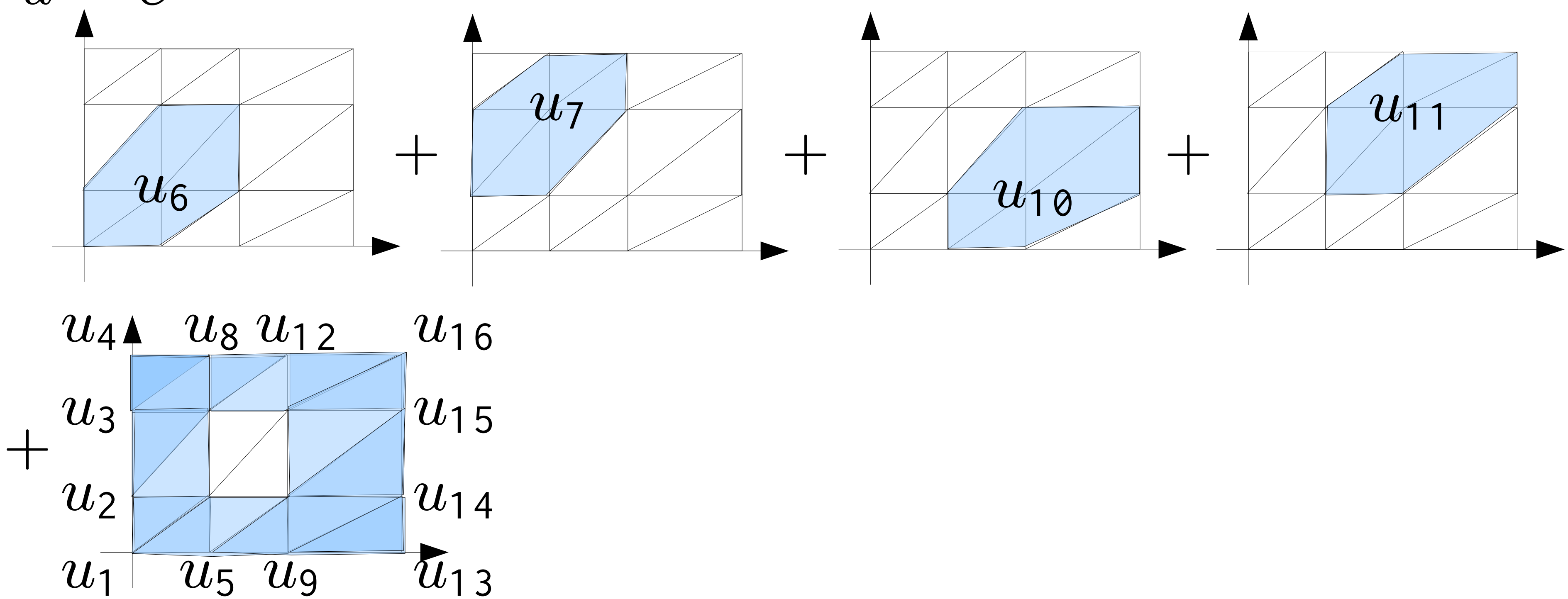
- 変数毎の台



連立方程式の導出

- 独立変数と定数

$$u \sim U =$$

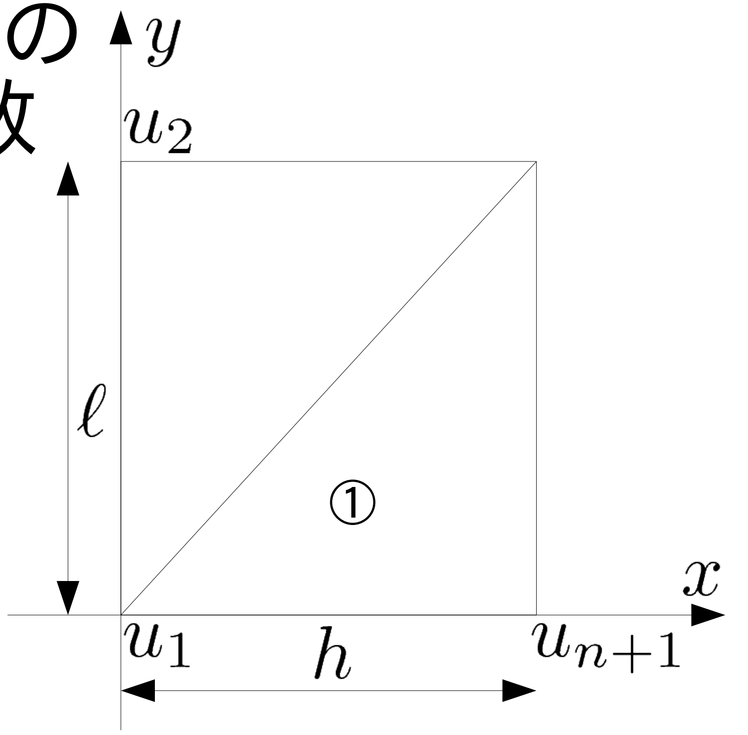


- u_6, u_7, u_{10}, u_{11}だけを未定係数だと思えば良い
  ⇒それぞれ6つの有限要素を台とする4つの基底関数を使ったGalerkin法と考える

レポート(6)

学籍番号・氏名を記し提出してください。

- 図の有限要素①は$h \times l$の長方形要素を対角線で2分したものです。
- ①を台に持ち、1つの頂点で1、他の頂点で0の値をとる3つの1次関数を求めてください。



授業レポート用紙：氏名（　　　　　　　　　　　）学籍番号(　　　　　　　　　　)

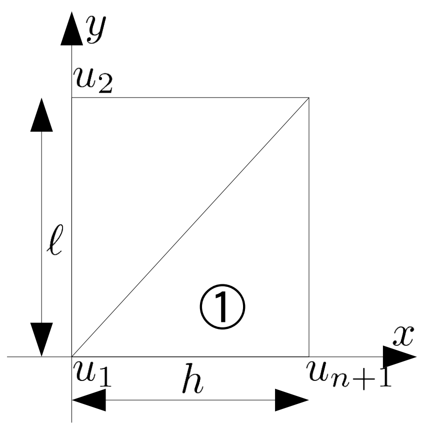
できれば授業の感想も書いてください。

授業レポート用紙:氏名(　　　　　　　　　　)学籍番号(　　　　　　　)

レポート(6)

図の有限要素①は$h\times l$の長方形要素を対角線で2分したものです。

- ①を台に持ち、1つの頂点で1、他の頂点で0の値をとる3つの1次関数を求めてください。



$\boldsymbol{X}=[x^1,x^2,x^3]^{\mathrm{T}}=[0,h,h]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{Y}=[y^1,y^2,y^3]^{\mathrm{T}}=[0,0,\ell]^{\mathrm{T}}$

$$|\boldsymbol{XY1}|=\sum_l\begin{vmatrix}x^{l+1} & y^{l+1}\\ x^{l+2} & y^{l+2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x^2 & y^2\\ x^3 & y^3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x^3 & y^3\\ x^1 & y^1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x^1 & y^1\\ x^2 & y^2\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}h & 0\\ h & \ell\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}h & \ell\\ 0 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0\\ h & 0\end{vmatrix}=h\ell=2\times$$①の面積

任意の1次関数$ax+by=c$を①におき、3つの頂点でu_1,u_2,u_{n+1}の値をとることを考えれば、

$$u(x,y)=ax+by+c=\Bigg\{u^1\left[-\begin{vmatrix}1 & y^2\\ 1 & y^3\end{vmatrix}x-\begin{vmatrix}x^2 & 1\\ x^3 & 1\end{vmatrix}y+\begin{vmatrix}x^2 & y^2\\ x^3 & y^3\end{vmatrix}\right]$$
$$+u^2\left[-\begin{vmatrix}1 & y^3\\ 1 & y^1\end{vmatrix}x-\begin{vmatrix}x^3 & 1\\ x^1 & 1\end{vmatrix}y+\begin{vmatrix}x^3 & y^3\\ x^1 & y^1\end{vmatrix}\right]$$
$$+u^3\left[-\begin{vmatrix}1 & y^1\\ 1 & y^2\end{vmatrix}x-\begin{vmatrix}x^1 & 1\\ x^2 & 1\end{vmatrix}y+\begin{vmatrix}x^1 & y^1\\ x^2 & y^2\end{vmatrix}\right]\Bigg\}/|\boldsymbol{XY1}|$$
$$=\Bigg\{u^1\left[-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & \ell\end{vmatrix}x-\begin{vmatrix}h & 1\\ h & 1\end{vmatrix}y+\begin{vmatrix}h & \\ h & \ell\end{vmatrix}\right]+u^2\left[-\begin{vmatrix}1 & \ell\\ 1 & 0\end{vmatrix}x-\begin{vmatrix}h & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}y+\begin{vmatrix}h & \ell\\ 0 & 0\end{vmatrix}\right]$$
$$+u^3\left[-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}x-\begin{vmatrix}0 & 1\\ h & 1\end{vmatrix}y+\begin{vmatrix}0 & 0\\ h & 0\end{vmatrix}\right]\Bigg\}/h\ell$$
$$=\{u^1[-\ell x-0y+h\ell]+u^2[-\ell x-hy+0]$$
$$+u^3[0x+hy+0]\}/[h\ell]$$

と展開できることを用いて3つの1次関数を得る。

$$A^1(x,y)=-\frac{1}{h}x+1,$$
$$A^2(x,y)=-\frac{1}{h}x-\frac{1}{\ell}y,$$
$$A^2(x,y)=-\frac{1}{\ell}y.$$

2019年11月25日(月)

できれば授業の感想も書いてください。