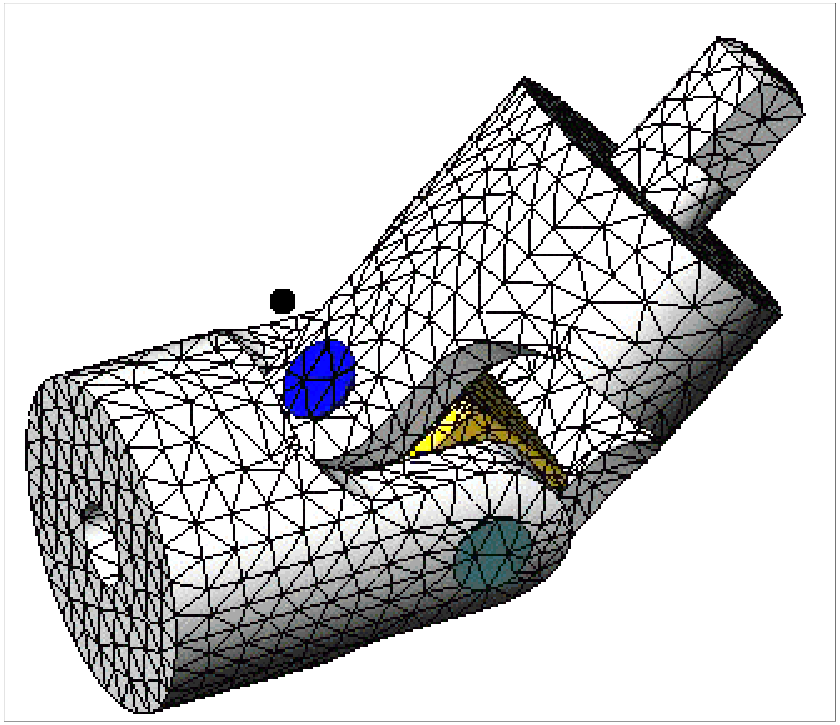
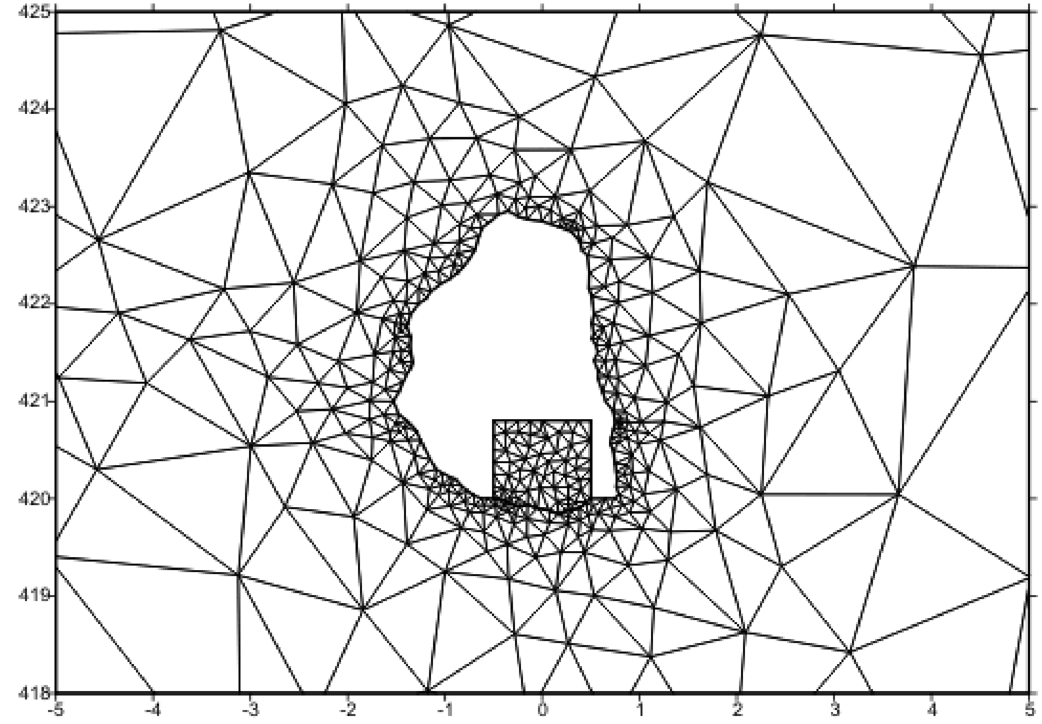
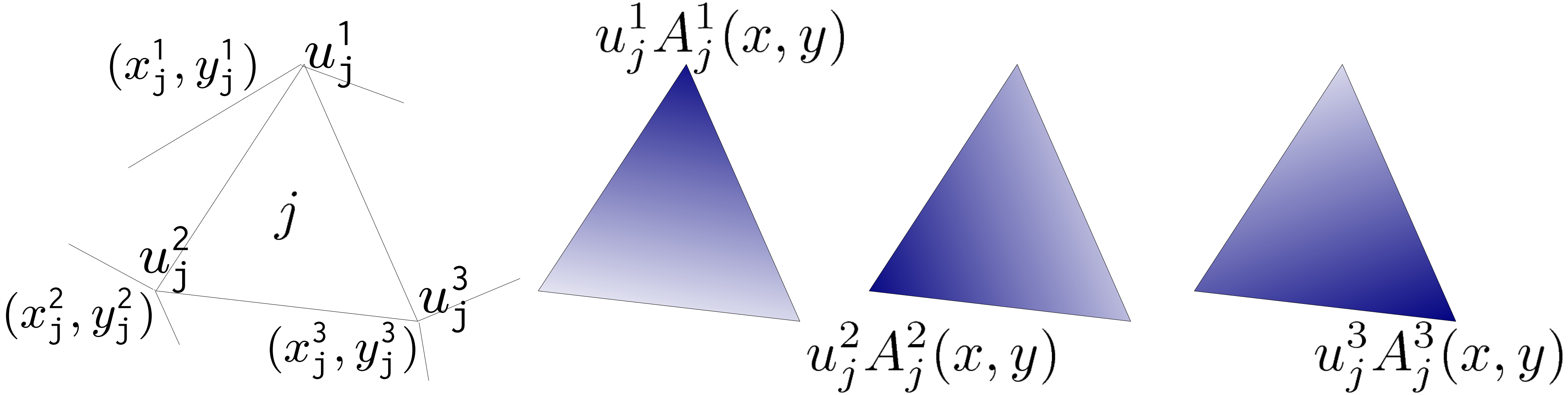
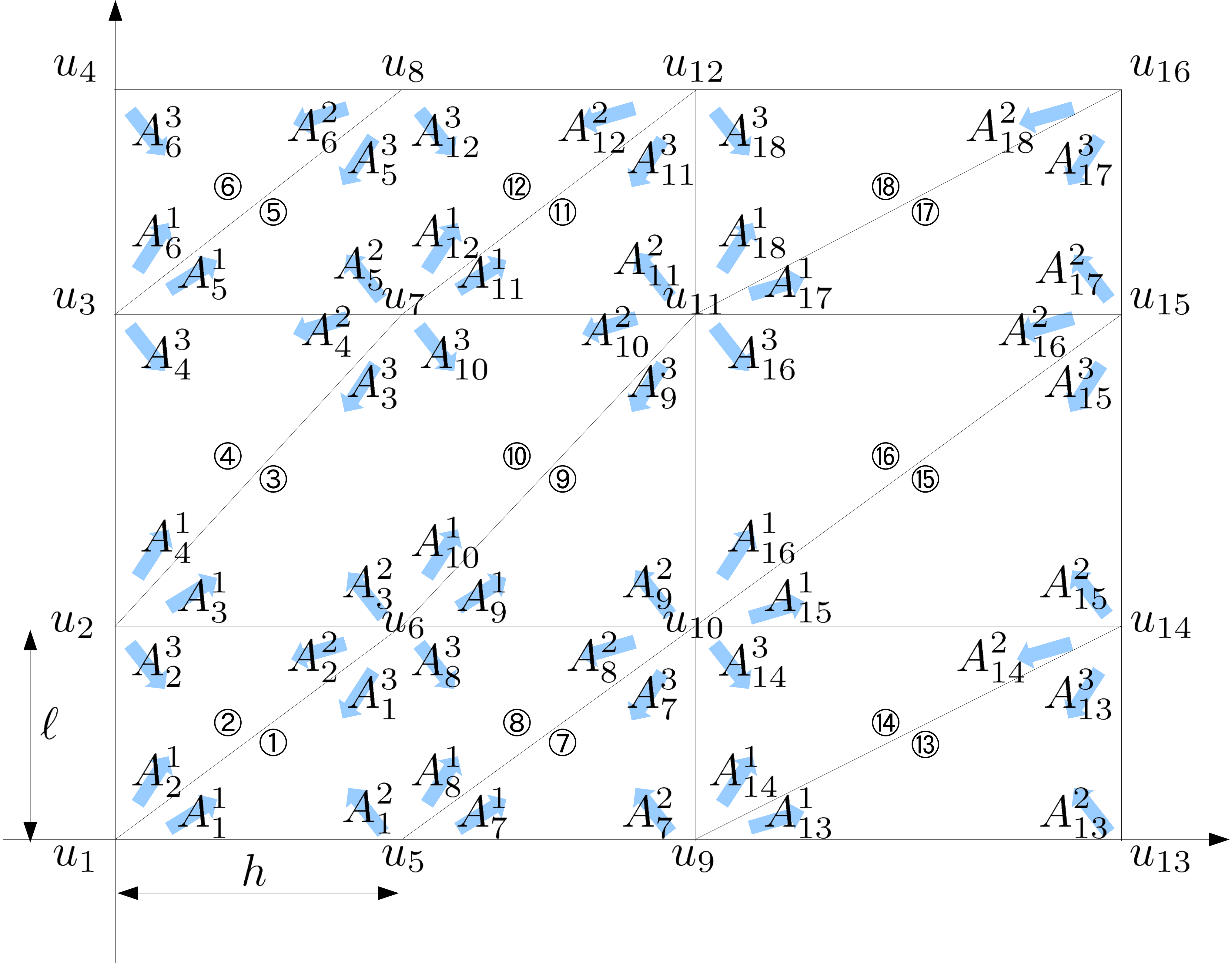
計算科学特論

有限要素法と変分法

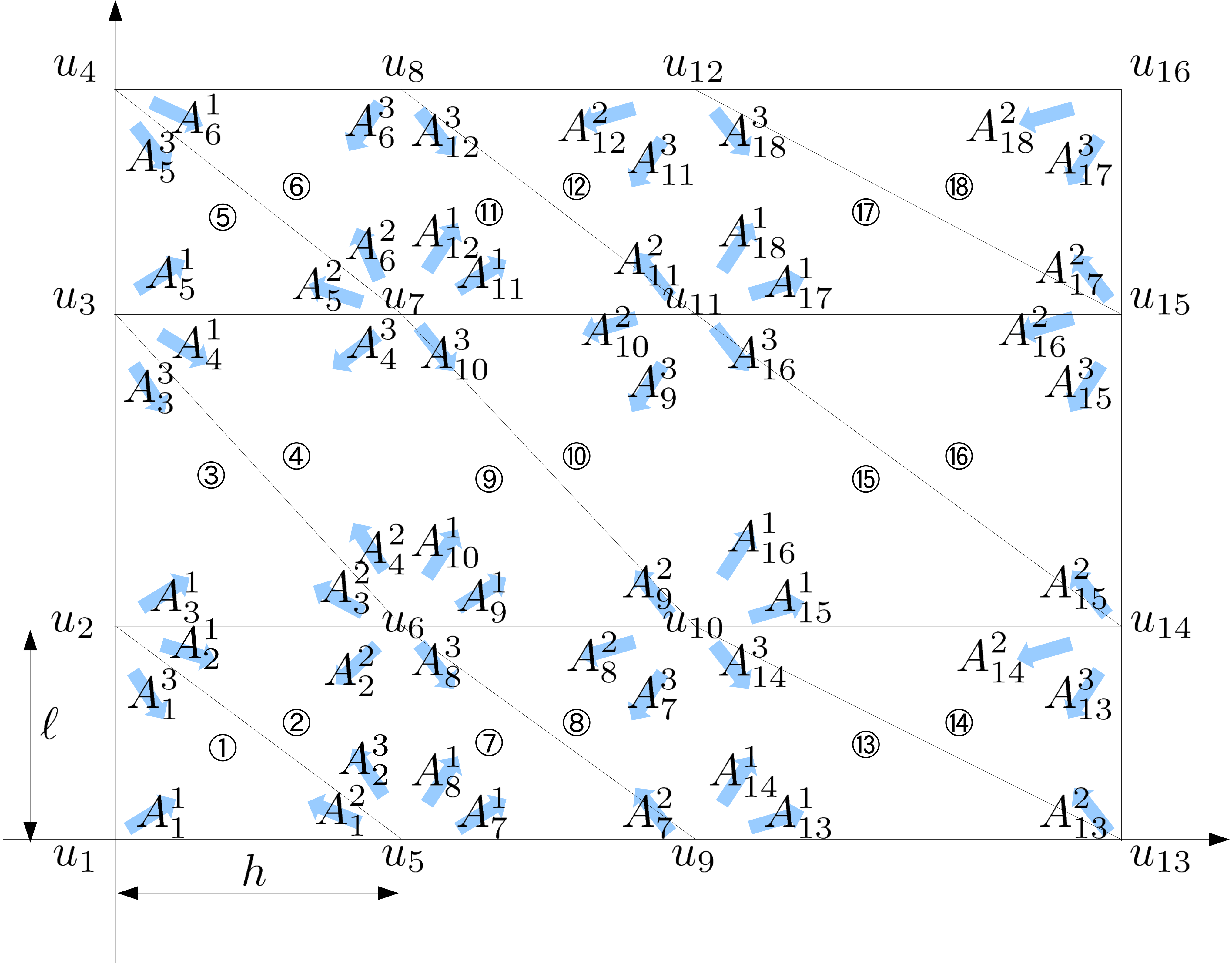



425
424
423
422
421
420
419
418
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5


(x_j^1, y_j^1)
u_j^1
j
u_j^2
(x_j^2, y_j^2)
(x_j^3, y_j^3)
u_j^3
$u_j^1 A_j^1(x, y)$
$u_j^2 A_j^2(x, y)$
$u_j^3 A_j^3(x, y)$

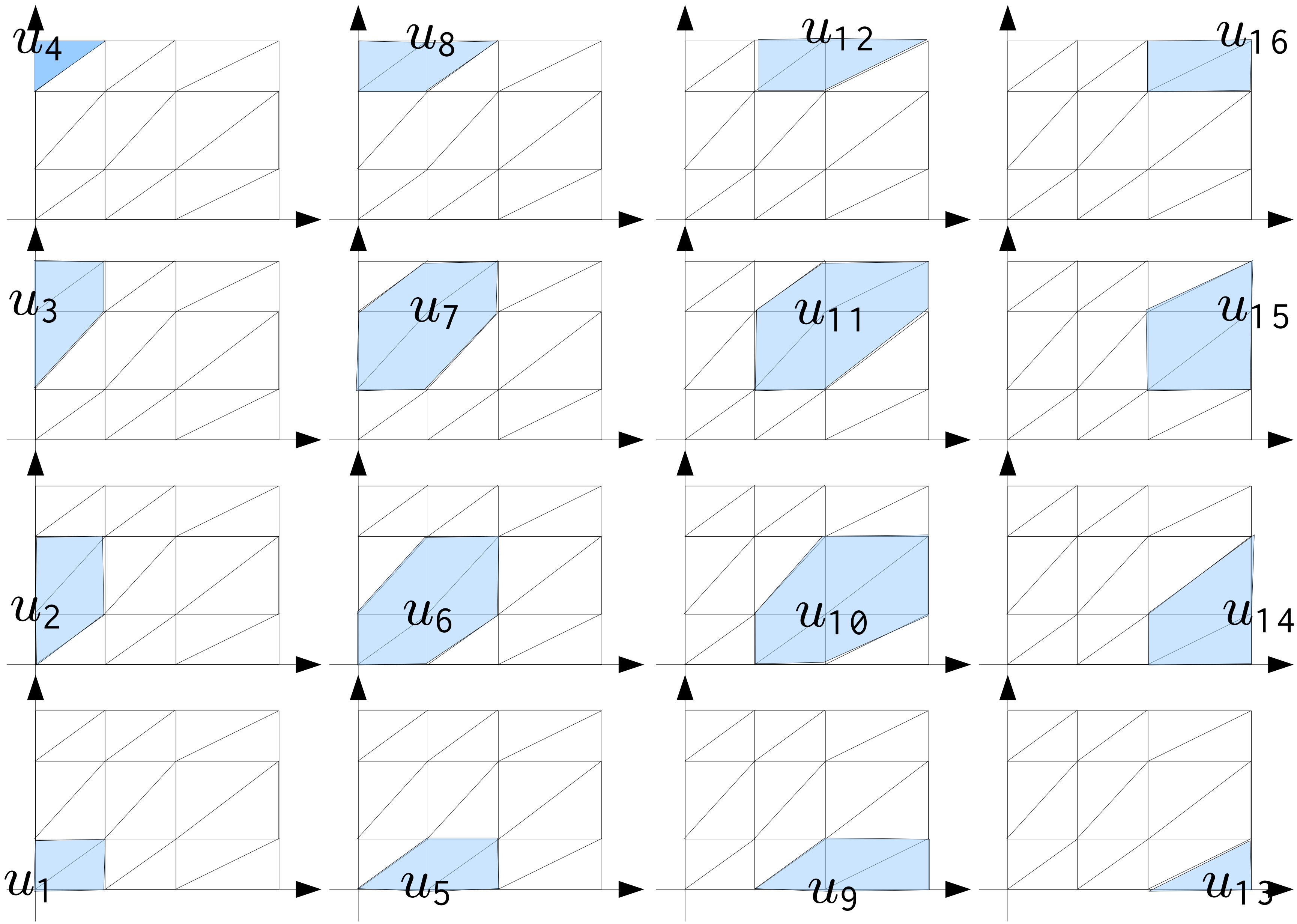


u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 u_7 u_8 u_9 u_{10} u_{11} u_{12} u_{13} u_{14} u_{15} u_{16}
h
ℓ
① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ ⑰ ⑱
A_1^1 A_1^2 A_1^3 A_2^1 A_2^2 A_2^3 A_3^1 A_3^2 A_3^3 A_4^1 A_4^2 A_4^3 A_5^1 A_5^2 A_5^3 A_6^1 A_6^2 A_6^3
A_7^1 A_7^2 A_7^3 A_8^1 A_8^2 A_8^3 A_9^1 A_9^2 A_9^3 A_{10}^1 A_{10}^2 A_{10}^3 A_{11}^1 A_{11}^2 A_{11}^3 A_{12}^1 A_{12}^2 A_{12}^3
A_{13}^1 A_{13}^2 A_{13}^3 A_{14}^1 A_{14}^2 A_{14}^3 A_{15}^1 A_{15}^2 A_{15}^3 A_{16}^1 A_{16}^2 A_{16}^3 A_{17}^1 A_{17}^2 A_{17}^3 A_{18}^1 A_{18}^2 A_{18}^3



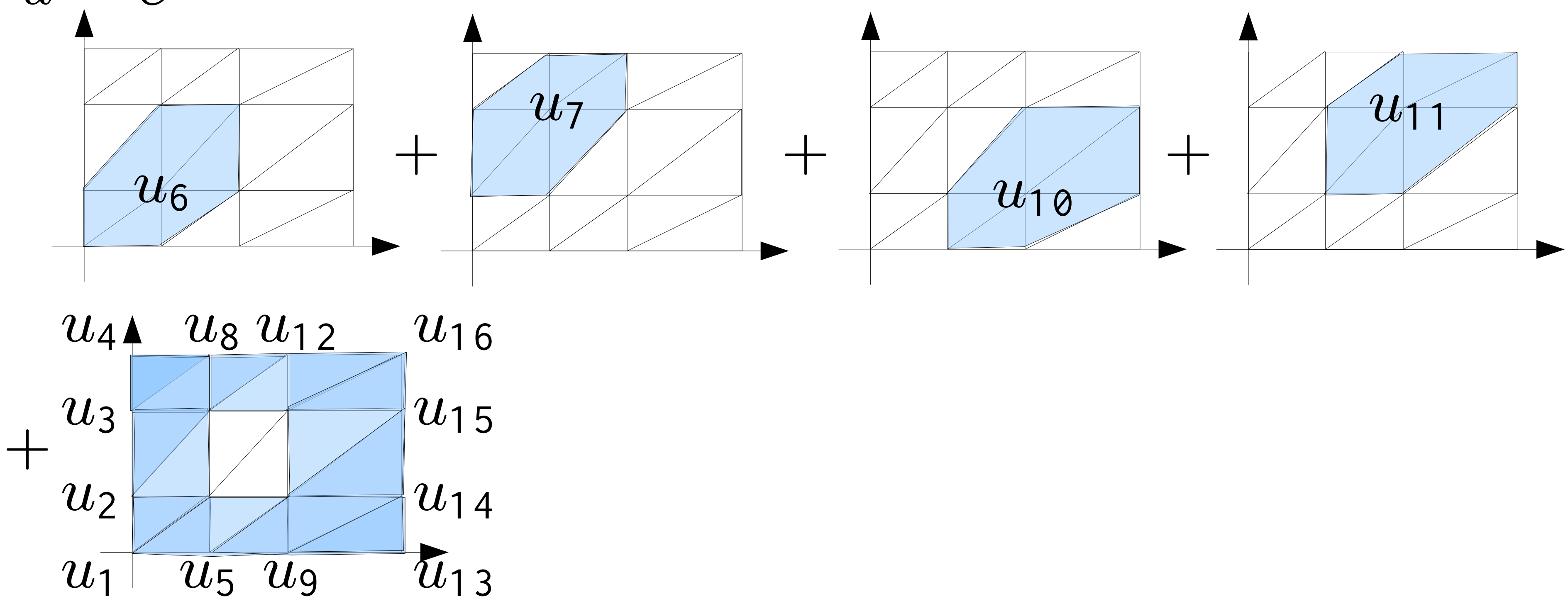
u_4 u_8 u_{12} u_{16}
u_3 u_7 u_{11} u_{15}
u_2 u_6 u_{10} u_{14}
u_1 u_5 u_9 u_{13}
h
ℓ
①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱
A_1^1 A_1^2 A_1^3
A_2^1 A_2^2 A_2^3
A_3^1 A_3^2 A_3^3
A_4^1 A_4^2 A_4^3
A_5^1 A_5^2 A_5^3
A_6^1 A_6^2 A_6^3
A_7^1 A_7^2 A_7^3
A_8^1 A_8^2 A_8^3
A_9^1 A_9^2 A_9^3
A_{10}^1 A_{10}^2 A_{10}^3
A_{11}^1 A_{11}^2 A_{11}^3
A_{12}^1 A_{12}^2 A_{12}^3
A_{13}^1 A_{13}^2 A_{13}^3
A_{14}^1 A_{14}^2 A_{14}^3
A_{15}^1 A_{15}^2 A_{15}^3
A_{16}^1 A_{16}^2 A_{16}^3
A_{17}^1 A_{17}^2 A_{17}^3
A_{18}^1 A_{18}^2 A_{18}^3

- 16個の関数



- 独立変数と定数

$$u \sim U =$$



- u_6, u_7, u_{10}, u_{11}だけを未定係数だと思えば良い
⇒それぞれ6つの有限要素を台とする4つの基底関数を使ったGalerkin法と考える

$$u \sim U = \sum_{j=1,2,3,4,5,8,9,12,13,14,15,16} u_j \phi_j(x,y) + \sum_{j=6,7,10,11} u_j \varphi_j(x,y)$$

$$= u_1[A_1^1 + A_2^1] + u_2[A_2^3 + A_3^1 + A_4^1] + u_3[A_4^3 + A_5^1 + A_6^1] + u_4[A_6^3]$$

$$+ u_5[A_1^2 + A_7^1 + A_8^1] + u_6 \underbrace{[A_1^3 + A_2^2 + A_3^2 + A_8^3 + A_9^1 + A_{10}^1]}_{(= \varphi_6)}$$

$$+ u_7 \underbrace{[A_3^3 + A_4^2 + A_5^2 + A_{10}^3 + A_{11}^1 + A_{12}^1]}_{(= \varphi_7)} + u_8[A_5^3 + A_6^2 + A_{12}^3]$$

$$+ u_9[A_7^2 + A_{13}^1 + A_{14}^1] + u_{10} \underbrace{[A_7^3 + A_8^2 + A_9^2 + A_{14}^3 + A_{15}^1 + A_{16}^1]}_{(= \varphi_{10})}$$

$$+ u_{11} \underbrace{[A_9^3 + A_{10}^2 + A_{11}^2 + A_{16}^3 + A_{17}^1 + A_{18}^1]}_{(= \varphi_{11})} + u_{12}[A_{11}^3 + A_{12}^2 + A_{18}^3]$$

$$+ u_{13}[A_{13}^2] + u_{14}[A_{13}^3 + A_{14}^2 + A_{15}^2]$$

$$+ u_{15}[A_{15}^3 + A_{16}^2 + A_{17}^2] + u_{16}[A_{17}^3 + A_{18}^2]$$

残差方程式と弱形式

- Laplace方程式の重み付き残差

$$\iint \varphi_k \triangle (\sum_{j \neq 6,7,10,11} u_j \phi_j + \sum_{j=6,7,10,11} u_j \varphi_j) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

- Laplace方程式の重み付き残差（弱形式）

$$\sum_{j \neq 6,7,10,11} u_j \iint \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\frac{\partial \phi_j}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+ \sum_{j=6,7,10,11} u_j \iint \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

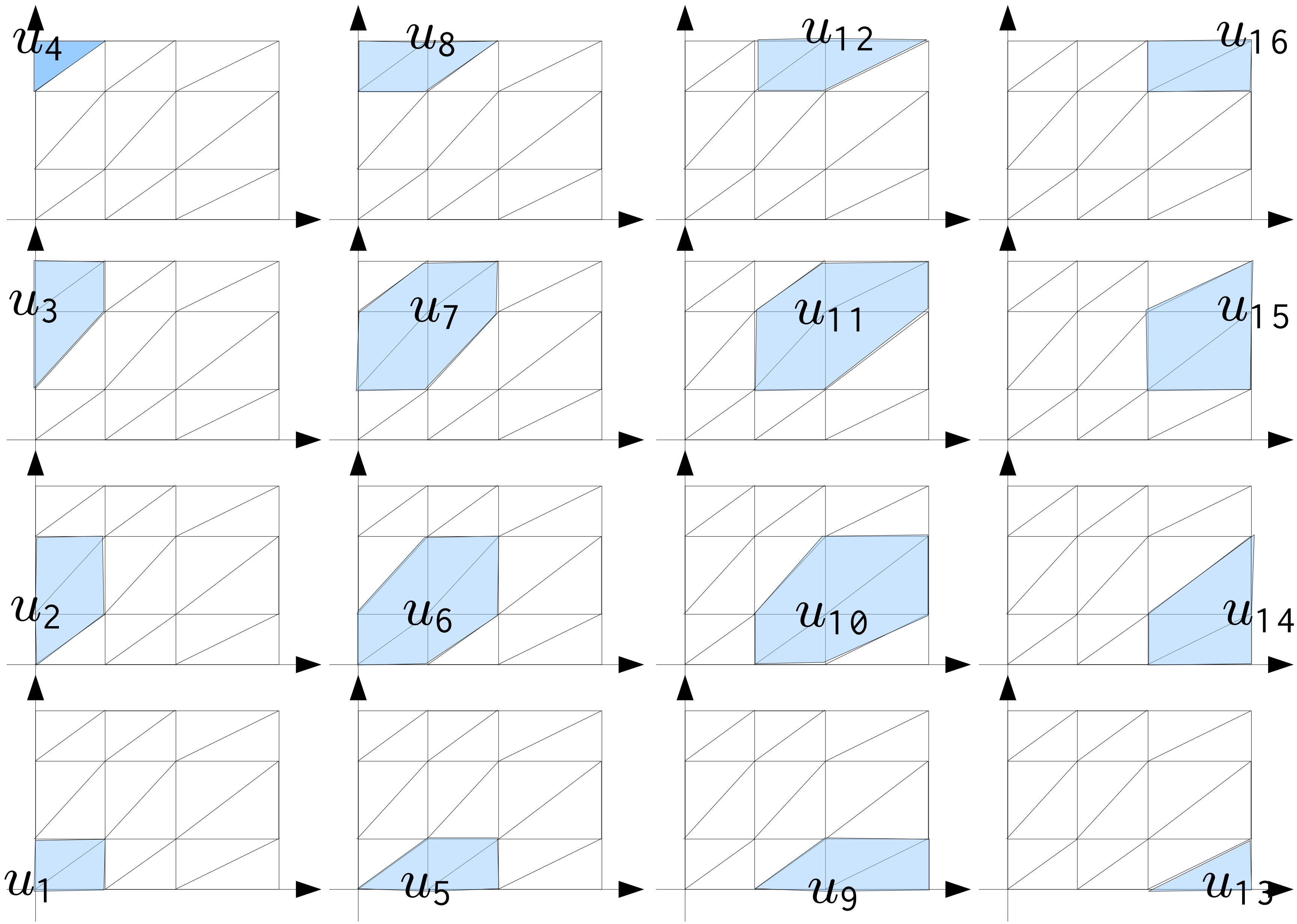
- ϕ と φ は ${A_p}^s$,${A_q}^t$ の組合せ（p,q有限要素、s,t要素毎の頂点番号）なので積分計算も有限要素毎に考える。

$$\iint \frac{\partial A_j^l}{\partial x}\frac{\partial A_k^m}{\partial x} + \frac{\partial A_j^l}{\partial y}\frac{\partial A_k^m}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \delta_{jk}[a_j^l a_k^m + b_j^l b_k^m] S_j$$

δ_{jk} はクロネッカデルタ、S_j は有限要素 j の面積

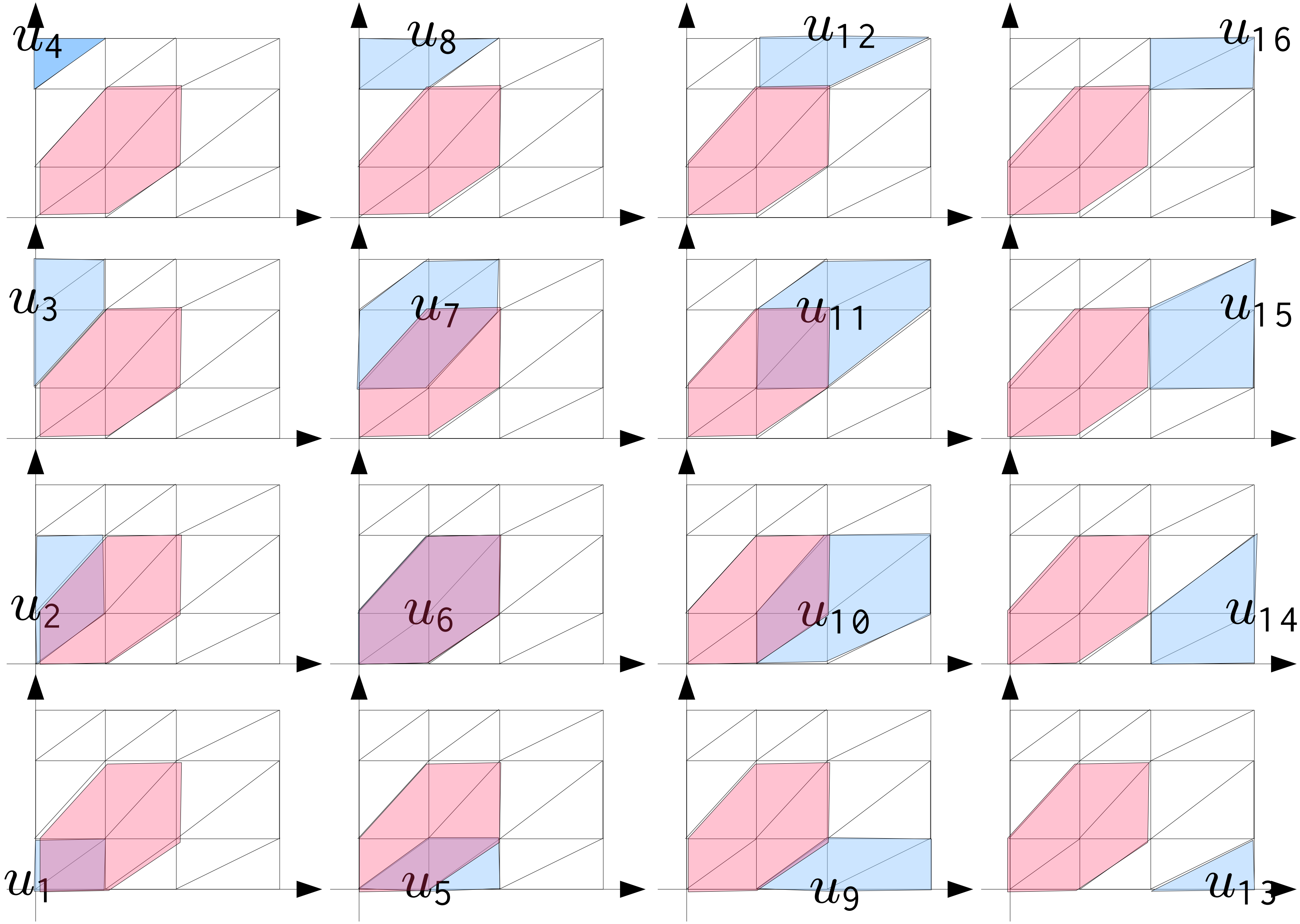
$$\sum_{j=6,7,10,11} u_j \iint \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\sum_{j\neq 6,7,10,11} u_j \iint \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\frac{\partial \phi_j}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- 16個の関数



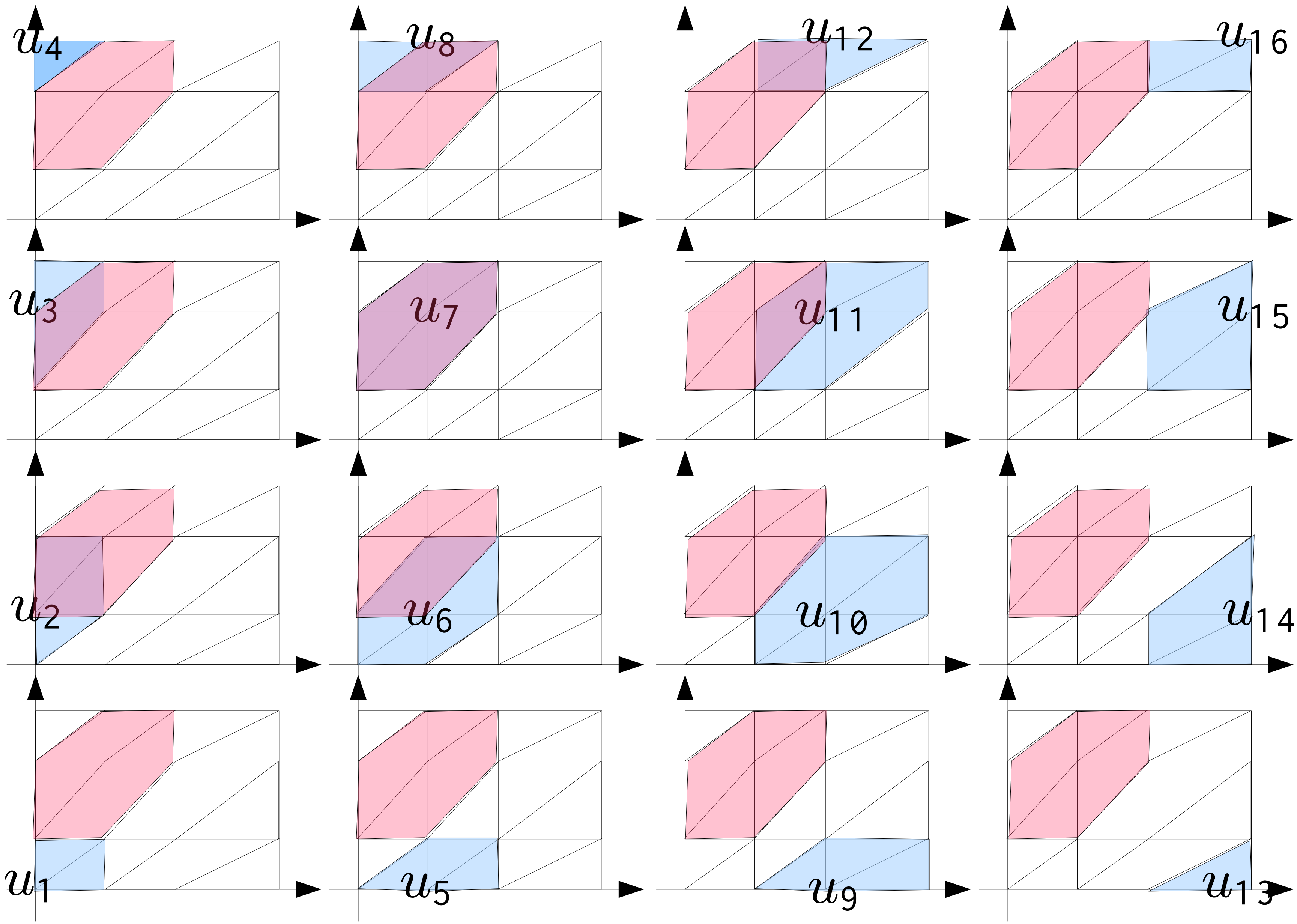
$$\sum_{j=6,7,10,11} u_j \iint \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\sum_{j\neq 6,7,10,11} u_j \iint \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\frac{\partial \phi_j}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- 16個の関数にφ_6をかけた場合



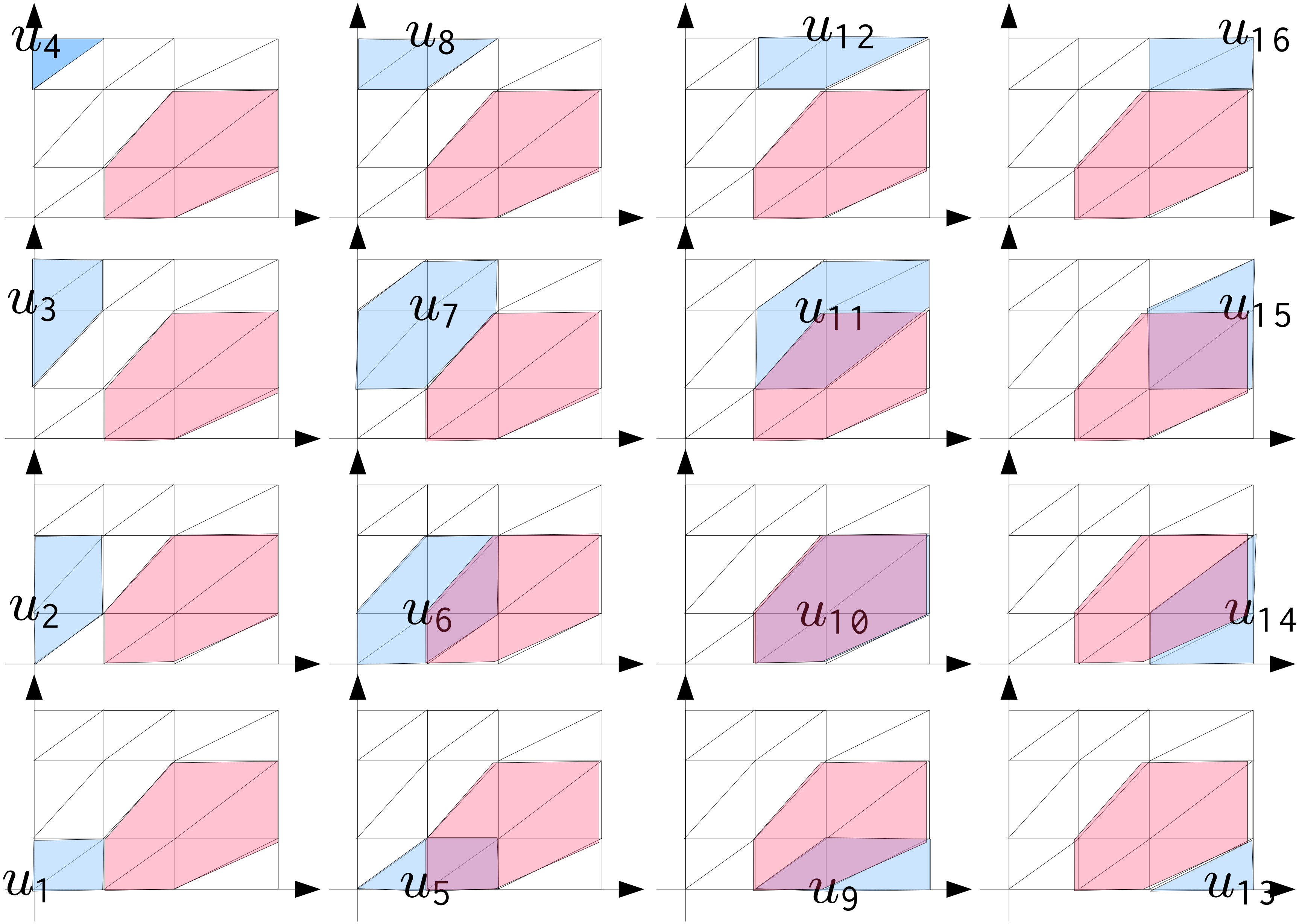
$$\sum_{j=6,7,10,11} u_j \iint \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\sum_{j\neq 6,7,10,11} u_j \iint \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\frac{\partial \phi_j}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- 16個の関数にφ_7をかけた場合



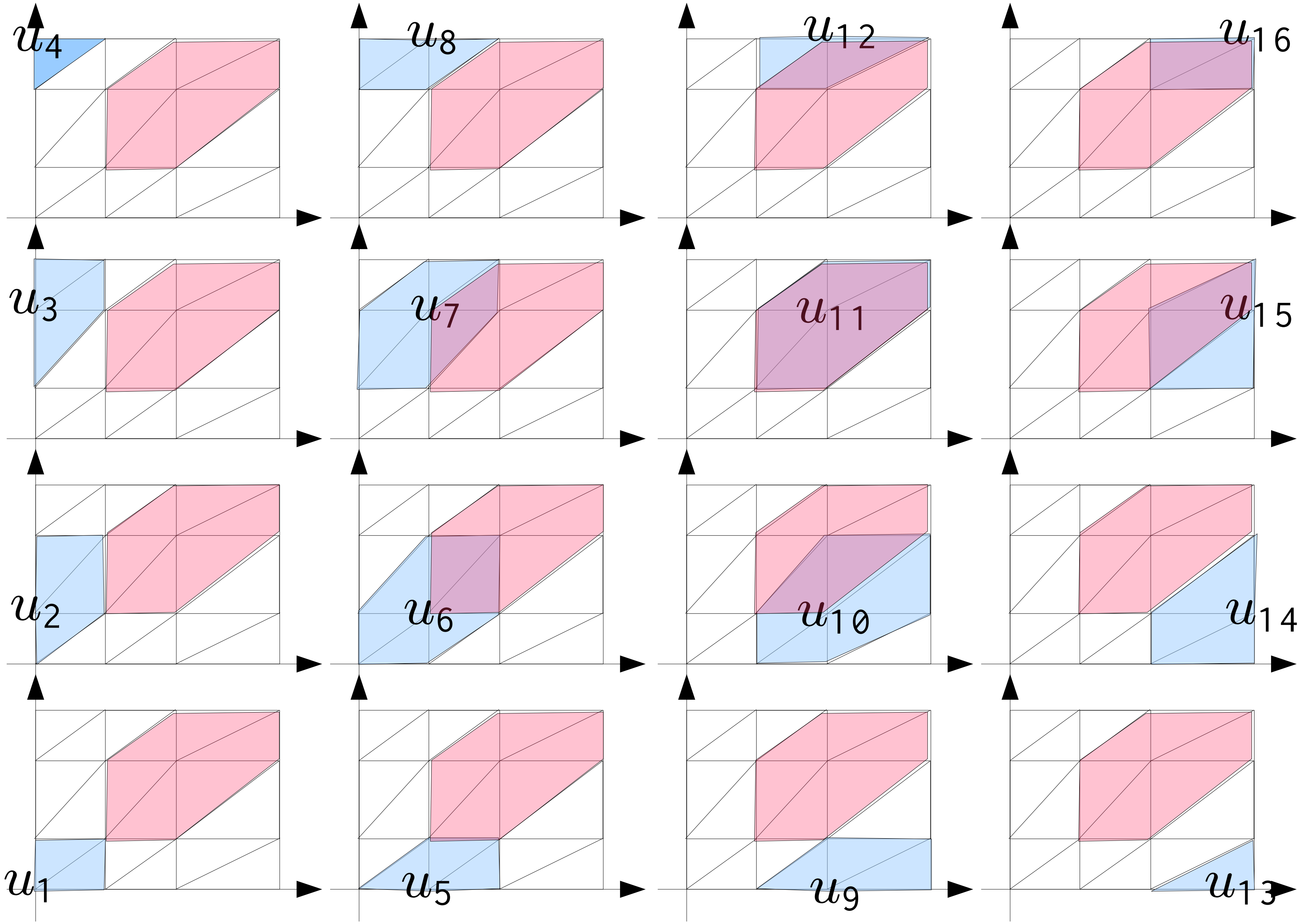
$$\sum_{j=6,7,10,11} u_j \iint \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\sum_{j\neq 6,7,10,11} u_j \iint \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\frac{\partial \phi_j}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

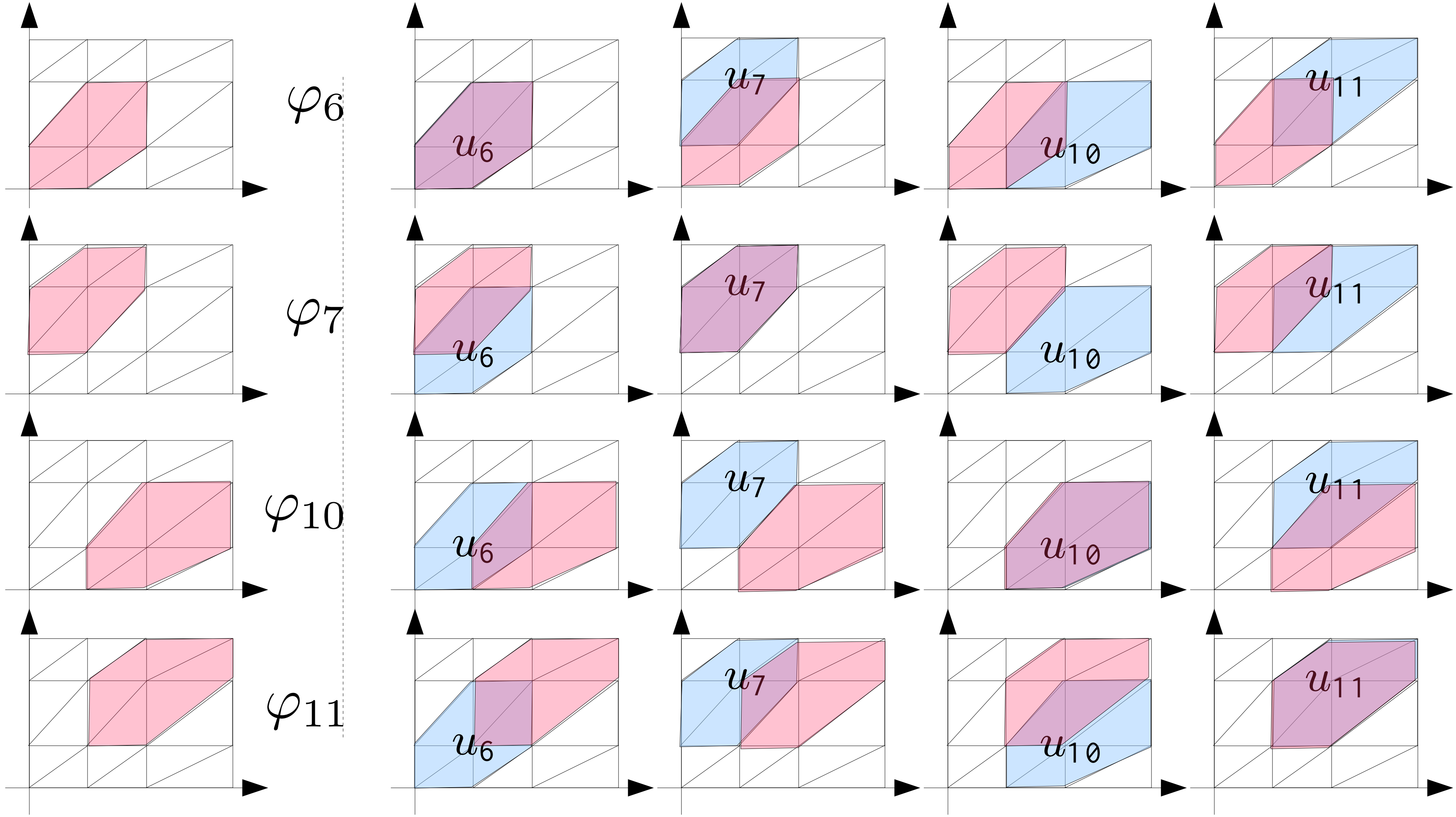
- 16個の関数にφ_{10}をかけた場合



$$\sum_{j=6,7,10,11} u_j \iint \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\sum_{j\neq 6,7,10,11} u_j \iint \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\frac{\partial \phi_j}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- 16個の関数にφ_{11}をかけた場合

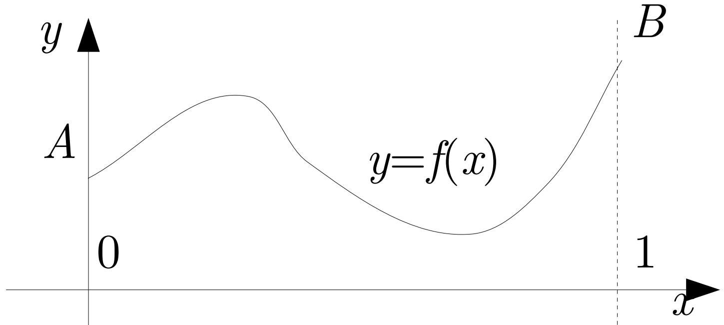




$$
\begin{bmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\
\alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\
\alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_6 \\ u_7 \\ u_{10} \\ u_{11}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4
\end{bmatrix}
$$

汎関数と停留関数

- 汎関数：関数→数、（関数：数→数）
  例：2点A,Bを結ぶ曲線長：J



$$J(f) = \int_0^1 \sqrt{1 + [\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)]^2}\mathrm{d}x$$

- $J(f)$ を最小化する f を探す問題を考える
  ただし、$f \in \{(0,1)$で連続かつ1回微分可能$\}$

関数の最小化なら停留値を考える

- 停留関数 $f^*(x)$ を探す

$$\frac{\partial J}{\partial f}(f^*) = 0?$$

汎関数と停留関数

- $J(f^*)=\min_f J(f)$ のとき、$u(0)=u(1)=0$ なら $J(\varepsilon u+f^*)\geq J(f^*)$（$J(\varepsilon u+f^*)$は要件を満たす）
- 逆に 任意のu で次式が成立⇒fは停留関数

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}(f+\varepsilon u)=\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\int_0^1\{1+[f'+\varepsilon u']^2\}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\{1+[f'+\varepsilon u']^2\}^{-\frac{1}{2}}2[f'+\varepsilon u']u'\mathrm{d}x$$

$\varepsilon \to 0$ ↓

$$=\int_0^1\frac{f'u'}{\sqrt{1+f'^2}}\mathrm{d}x=\left[\frac{f'u}{\sqrt{1+f'^2}}\right]_0^1-\int_0^1\left[\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\right]'u\mathrm{d}x=0$$

$$\therefore \left[\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\right]'=\frac{f''}{[1+f'^2]^{\frac{3}{2}}}=0\Rightarrow f''=0$$

オイラー方程式

- 1変数の場合のオイラー方程式

$$J(u) = \int F(x,u,u')\mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}(u+\varepsilon v) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\int F(x,u+\varepsilon v,u'+\varepsilon v')\mathrm{d}x = \int F_u v + F_{u'} v' \mathrm{d}x$$

$$\left[\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = \int F_u v \mathrm{d}x + \int F_{u'} v' \mathrm{d}x = \int F_u v \mathrm{d}x + [F_{u'} v] - \int [F_{u'}]_x v \mathrm{d}x$$

$$= \int [F_u - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{u'}] v \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow F_u - \frac{\mathrm{d}F_{u'}}{\mathrm{d}x} = 0$$

- 停留関数を探す＝オイラー方程式を解く

オイラー方程式

- 2変数の場合のオイラー方程式

$$J(u)=\iint F(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$J(u+\varepsilon v)=\iint F(x,y,u+\varepsilon v,u_x+\varepsilon v_x,u_y+\varepsilon v_y)\mathrm{d}x$$

$$\left[\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}=\iint F_u v+F_{u_x}v_x+F_{u_y}v_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint F_u v+[F_{u_x}v]_x-[F_{u_x}]_x v+[F_{u_y}v]_y-[F_{u_y}]_y v\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint [F_u-[F_{u_x}]_x-[F_{u_y}]_y]v+[F_{u_x}v]_x+[F_{u_y}v]_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint [F_u-[F_{u_x}]_x-[F_{u_y}]_y]v+\oint[F_{u_x}v]\mathrm{d}x-[F_{u_y}v]\mathrm{d}y=0$$

$$\Rightarrow F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0$$

オイラー方程式

- 汎関数 $J(u)$ が

$$J(u) = \iint F(x, y, u, u_x, u_y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint \frac{1}{2}[u_x^2 + u_y^2] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

のとき、オイラー方程式は

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} = 0$$

$$\Rightarrow 0 - \frac{\partial}{\partial x} u_x - \frac{\partial}{\partial y} u_y = 0 \ \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

- ラプラス方程式の解を求める
＝汎関数 $J(u)$ の停留関数 u^* を求める

リッツ法

- ラプラス方程式を解く⇔$J(u)$ の停留関数を探す

$$J(u)=\iint_D \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- u の範囲を限定して考える
  任意の関数→基底関数列 $u_1,\ldots,u_N$ の線形結合

$$u \sim \sum_{j=1}^{N} c_j u_j \rightarrow J(u)=\iint_D (\sum_j c_j \frac{\partial u_j}{\partial x})^2+(\sum_j c_j \frac{\partial u_j}{\partial y})^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$J(u)=f(c_1,\ldots,c_N)$$

- 停留関数を探す＝連立方程式

$$\frac{\partial f}{\partial c_j}=0 \quad j=1,\ldots,N$$

  を解く

レポート(8)

学籍番号･氏名を記し提出してください。

- 汎関数 $J(u)$ が

$$J(u) = \iint \frac{1}{2}[u_x^2 + u_y^2] + uf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

のときのオイラー方程式を求める。

授業レポート用紙：氏名（　　　　　　　　　　）学籍番号(　　　　　　　)

- 汎関数 $J(u)$ が

$$J(u)=\iint\frac{1}{2}[u_x^2+u_y^2]+uf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

のときのオイラー方程式を求める。

2019年12月9日(月)

できれば授業の感想も書いてください。