数理計画法

第9回：相補性定理と双対変数

授業の内容：

第1回(11/01)：数理計画問題・線形計画問題とは何か

第2回(11/08)：線形計画問題の標準形

第3回(11/15)：単体法

第4回(11/22)：巡回と最小添字規則

第5回(11/29)：巡回と最小添字規則，2段解法

第6回(12/06)：単体法の2段階法

第7回(12/13)：線形計画問題の行列表現と改訂単体法

第8回(12/20)：双対問題と双対定理

☆ここまで終了

第9回(01/10)：相補性定理と双対変数

第10回(01/17)：線形計画問題と多面体

第11回(01/24)：自己双対型内点法の原理

第12・13回(01/27)：演習

第14回(01/31)：自己双対型内点法の実践

第15回：期末試験

授業資料のダウンロード

- http://comp.cs.ehime-u.ac.jp/mathpro/

※今のところ、学内からのアクセスのみ。
※授業で使った資料そのまま
※改訂したときは連絡します
※演習のときには持ってきてください

復習

双対問題と双対定理のまとめ

maximize	minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$	$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to	subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$
主問題	双対問題

双対問題は、
最大化問題の最小上界、
最小化問題の最大下界
を求める数理計画問題である。
行列表現を用いた一般的な表現は
左記の通り

双対定理

上式のような線形計画問題とその双対問題が与えられているとき、$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$ がそれぞれ主問題、双対問題の実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、これは、それぞれの問題の最適解である。

$$\exists \tilde{\boldsymbol{x}}, \exists \tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$

$$\Longrightarrow \forall \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

また、どちらか一方に最適解 $\tilde{x}$ が存在すれば、もう一方にも最適解 $\tilde{y}$ が存在し、双方の最適解が与える目的関数値は等しい。

復習

演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

次の線形計画問題の双対問題を求め、単体法を用いてこれを解き、
最適解の与える両者の目的関数値が等しいことを確認する

maximize
$z = x_1 + 2x_2$
subject to

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & -x_2 & \leq & 7 \\ 3x_1 & +x_2 & \leq & 10 \\ -x_1 & +2x_2 & \leq & 18 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

minimize
$w = 7y_1 + 10y_2 + 18y_3$
subject to

$$\begin{array}{rrrcr} 2y_1 & +3y_2 & -y_3 & \geq & 1 \\ -y_1 & +y_2 & +2y_3 & \geq & 2 \end{array}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

等式標準形を求めて主問題を単体法で解き、双対問題は2段階単体法、
または罰則付単体法で解を求めてください。

復習

演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

次の線形計画問題の双対問題を求め、単体法を用いてこれを解き、
最適解の与える両者の目的関数値が等しいことを確認する

maximize

$z = x_1 + 2x_2$

subject to

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & -x_2 & \leq & 7 \\ 3x_1 & +x_2 & \leq & 10 \\ -x_1 & +2x_2 & \leq & 18 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

等式標準形

maximize

$z = x_1 + 2x_2$

subject to

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 7 \\ 3x_1 & +x_2 & +x_4 & = & 10 \\ -x_1 & +2x_2 & +x_5 & = & 18 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

simplex表

基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺
0	2	-1	1	0	0	7
0	3	1	0	1	0	10
0	-1	2	0	0	1	18
1	-1	-2	0	0	0	0

復習

主問題を単体法で解く

simplex表

基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数		
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺	増加量
0	2	-1	1	0	0	7	
0	3	1	0	1	0	10	10
0	-1	2	0	0	1	18	9
1	-1	-2	0	0	0	0	

基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺
0	2	-1	1	0	0	7
0	3	1	0	1	0	10
0	-1/2	2/2=1	0	0	+1/2	9
1	-1	-2	0	0	0	0

基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺
0	+3/2	0	1	0	+1/2	16
0	+7/2	0	0	1	-1/2	1
0	-1/2	2/2=1	0	0	+1/2	9
1	-2	0	0	0	1	18

復習

主問題を単体法で解く

simplex表

基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺
0	+3/2	0	1	0	+1/2	16
0	+7/2	0	0	1	-1/2	1
0	-1/2	1	0	0	+1/2	9
1	-2	0	0	0	1	18

基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺
0	0	0	1	-3/7	+5/7	+109/7
0	1	0	0	+2/7	-1/7	+2/7
0	0	1	0	+1/7	+3/7	+64/7
1	0	0	0	+4/7	+5/7	+130/7

$x_1=2/7$，　$x_2=64/7$ のとき目的関数値 $z=x_1+2x_2=130/7$ は最大

復習

双対問題を2段階単体法で解く

等式標準形

minimize
$$w = 7y_1 + 10y_2 + 18y_3$$
subject to
$$\begin{array}{rrrcr} 2y_1 & +3y_2 & -y_3 & \geq & 1 \\ -y_1 & +y_2 & +2y_3 & \geq & 2 \end{array}$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

maximize
$$-w = -7y_1 - 10y_2 - 18y_3$$
subject to
$$\begin{array}{rrrrcr} 2y_1 & +3y_2 & -y_3 & -y_4 & = & 1 \\ -y_1 & +y_2 & +2y_3 & -y_5 & = & 2 \end{array}$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$$

補助問題

maximize
$$\tilde{w} = -y_6 - y_7 = y_1 + 4y_2 + y_3 - y_4 - y_5 - 3$$
subject to
$$\begin{array}{rrrrrcr} 2y_1 & +3y_2 & -y_3 & -y_4 & +y_6 & = & 1 \\ -y_1 & +y_2 & +2y_3 & -y_5 & +y_7 & = & 2 \end{array}$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7 \geq 0$$

復習

双対問題の補助問題を単体法で解く

simplex表

基底変数	非基底変数	非基底変数	非基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	
$\tilde{w}$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	右辺
0	2	3	-1	-1	0	1	0	1
0	-1	1	2	0	-1	0	1	2
1	-1	-4	-1	1	1	0	0	-3

基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	
$\tilde{w}$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	右辺
0	+2/3	3/3=1	-1/3	-1/3	0	+1/3	0	+1/3
0	-5/1	0	+7/3	+1/3	-1	-1/3	1	+5/3
1	+5/3	0	-7/3	-1/3	0	+4/3	0	-5/3

基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	非基底変数	非基底変数	
$\tilde{w}$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	右辺
0	+1/7	1	0	-2/7	-1/7	+2/7	+1/7	+4/7
0	-5/7	0	1	+1/7	-3/7	-1/7	+3/7	+5/7
1	0	0	0	0	-1	1	1	0

補助問題の最適解において、人工変数 $y_6=y_7=0$、目的関数値 $\tilde{w}=0$を得た→もとの問題の実行可能解を得ることができた。

復習

もとの問題と同等の制約式を求め、単体法で解く

補助問題の最適解に対応するsimplex表

基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	非基底変数	非基底変数	
$\tilde{w}$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	右辺
0	+1/7	1	0	-2/7	-1/7	+2/7	+1/7	+4/7
0	-5/7	0	1	+1/7	-3/7	-1/7	+3/7	+5/7
1	0	0	0	0	-1	1	1	0

もとの問題と同等の制約式に対応するsimplex表

基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	
$-w$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	右辺
0	+1/7	1	0	-2/7	-1/7	+4/7
0	-5/7	0	1	+1/7	-3/7	+5/7
1	7	10	18	0	0	0

目的関数から初期の基底変数を取り除く、

$$-w = -7y_1 - 10y_2 - 18y_3 = -\frac{31}{7}y_1 - \frac{2}{7}y_4 - \frac{64}{7}y_4 - \frac{130}{7}$$

基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	
$-w$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	右辺
0	+1/7	1	0	-2/7	-1/7	+4/7
0	-5/7	0	1	+1/7	-3/7	+5/7
1	+31/7	0	0	+2/7	+64/7	-130/7

最初から最適解を示している。

主問題

maximize

$z = x_1 + 2x_2$

subject to

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & -x_2 & \leq & 7 \\ 3x_1 & +x_2 & \leq & 10 \\ -x_1 & +2x_2 & \leq & 18 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

主問題の等式標準形

maximize

$z = x_1 + 2x_2$

subject to

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 7 \\ 3x_1 & +x_2 & +x_4 & = & 10 \\ -x_1 & +2x_2 & +x_5 & = & 18 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

双対問題

minimize

$w = 7y_1 + 10y_2 + 18y_3$

subject to

$$\begin{array}{rrrcr} 2y_1 & +3y_2 & -y_3 & \geq & 1 \\ -y_1 & +y_2 & +2y_3 & \geq & 2 \end{array}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

双対問題の等式標準形

maximize

$-w = -7y_1 - 10y_2 - 18y_3$

subject to

$$\begin{array}{rrrrcr} 2y_1 & +3y_2 & -y_3 & -y_4 & = & 1 \\ -y_1 & +y_2 & +2y_3 & -y_5 & = & 2 \end{array}$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$$

主問題

maximize

$z = x_1$ [redacted]

subject to [redacted]

$2x_1$ [redacted]

$3x_1$ [redacted]

$-x_1$ [redacted]

主問題の等式標準形

maximize

$z = x_1$ [redacted]

subject to [redacted]

$2x_1$ [redacted] 7

$3x_1$ [redacted] 10

$-x_1$ [redacted] 18

$x_1,$ [redacted]

双対問題

minimize [redacted]

$w = 7y_1$ [redacted] y_3

subject to [redacted]

$2y_1$ [redacted] $\geq \quad 1$

$-y_1$ [redacted] $\geq \quad 2$

[redacted] ≥ 0

双対問題の等式標準形

maximize [redacted]

$-w =$ [redacted]

subject to [redacted]

$2y_1$ [redacted] $= \quad 1$

$-y_1$ [redacted] $= \quad 2$

[redacted] ≥ 0

maximize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

主問題

maximize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$

主問題の等式標準形

主問題の主変数：$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m)$

$\boldsymbol{x}$ の双対変数：$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = (t_1, \ldots, t_n)$

主問題のスラック変数：$\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = (s_1, \ldots, s_m)$

$\boldsymbol{s}$ の双対変数：$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$

minimize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題

minimize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題の等式標準形

双対問題の主変数：$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$

$\boldsymbol{y}$ の双対変数：$\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = (s_1, \ldots, s_m)$

双対問題のスラック変数：$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = (t_1, \ldots, t_n)$

$\boldsymbol{t}$ の双対変数：$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m)$

maximize

$z = c^{\mathrm{T}} x$

subject to

$Ax \leq b$

$x \geq 0$

主問題

minimize

$w = b^{\mathrm{T}} y$

subject to

$A^{\mathrm{T}} y \geq c$

$y \geq 0$

双対問題

相補性定理

左式のような線形計画問題とその双対問題が与えられているとき、$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$がそれぞれ、主問題、双対問題の最適解であるとする。

このとき、次の関係式が成立する。

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow a_{1j}\tilde{y}_1 + \cdots + a_{nj}\tilde{y}_n = c_j$$

$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow a_{k1}\tilde{x}_1 + \cdots + a_{km}\tilde{x}_m = b_k$$

$$a_{1j}\tilde{y}_1 + \cdots + a_{nj}\tilde{y}_n > c_j \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$

$$a_{k1}\tilde{x}_1 + \cdots + a_{km}\tilde{x}_m < b_k \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

主問題	双対問題
maximize $z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$	minimize $w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ subject to $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}$

双対定理：
$\tilde{\boldsymbol{x}}$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}$ が実行可能解かつ $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$
$\Longleftrightarrow$ $\tilde{\boldsymbol{x}}$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}$ は最適解

弱双対定理：
$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が実行可能解 $\Longrightarrow \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$

$$\because \quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

相補性定理：
$\tilde{\boldsymbol{x}}$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}$ は最適解なので $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$ この不等式の等号が成立する。

$$(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0 \qquad (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 0$$

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow a_{1j}\tilde{y}_1 + \cdots + a_{nj}\tilde{y}_n = c_j$$

$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow a_{k1}\tilde{x}_1 + \cdots + a_{km}\tilde{x}_m = b_k$$

$$a_{1j}\tilde{y}_1 + \cdots + a_{nj}\tilde{y}_n > c_j \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$

$$a_{k1}\tilde{x}_1 + \cdots + a_{km}\tilde{x}_m < b_k \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

[redacted]

相補性定理

左式のような線形計画問題とその双対問題が与えられているとき、$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$, $\tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n)$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$, $\tilde{\boldsymbol{t}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{s}_m)$ がそれぞれ、主問題、双対問題の最適解であるとする。

このとき、次の関係式が成立する。

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0 \qquad \tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$

$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0 \qquad \tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

[redacted]

主問題の等式標準形

maximize

$z = x_1 + 2x_2$

subject to

$$\begin{array}{ccccc} 2x_1 & -x_2 & +s_1 & = & 7 \\ 3x_1 & +x_2 & +s_2 & = & 10 \\ -x_1 & +2x_2 & +s_3 & = & 18 \end{array}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_4 \geq 0$$

双対問題の等式標準形

maximize

$-w = -7y_1 - 10y_2 - 18y_3$

subject to

$$\begin{array}{cccccc} 2y_1 & +3y_2 & -y_3 & -t_1 & = & 1 \\ -y_1 & +y_2 & +2y_3 & -t_2 & = & 2 \end{array}$$

$$y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0$$

相補性定理

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0 \qquad \tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$

$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0 \qquad \tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

$$\tilde{x}_1 = \frac{2}{7} \qquad \tilde{t}_1 = 0$$

$$\tilde{x}_2 = \frac{64}{7} \qquad \tilde{t}_2 = 0$$

$$\tilde{s}_1 = \frac{109}{7} \qquad \tilde{y}_1 = 0$$

$$\tilde{s}_2 = 0 \qquad \tilde{y}_2 = \frac{4}{7}$$

$$\tilde{s}_3 = 0 \qquad \tilde{y}_3 = \frac{5}{7}$$

$$\tilde{z} = \frac{130}{7} \qquad \tilde{w} = \frac{130}{7}$$

主問題の等式標準形

maximize

$z = x_1 + 2x_2$

subject to

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & -x_2 & +s_1 & = & 7 \\ 3x_1 & +x_2 & +s_2 & = & 10 \\ -x_1 & +2x_2 & +s_3 & = & 18 \end{array}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_4 \geq 0$$

双対問題の等式標準形

maximize

$-w = -7y_1 - 10y_2 - 18y_3$

subject to

$$\begin{array}{rrrrcr} 2y_1 & +3y_2 & -y_3 & -t_1 & = & 1 \\ -y_1 & +y_2 & +2y_3 & -t_2 & = & 2 \end{array}$$

$$y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0$$

$$\tilde{x}_1 = \frac{2}{7} \Longrightarrow \tilde{t}_1 = 0$$

$$\tilde{x}_2 = \frac{64}{7} \Longrightarrow \tilde{t}_2 = 0$$

$$\tilde{s}_1 = \frac{109}{7} \Longrightarrow \tilde{y}_1 = 0$$

$$\tilde{s}_2 = 0 \Longrightarrow \tilde{y}_2 = ?$$

$$\tilde{s}_3 = 0 \Longrightarrow \tilde{y}_3 = ?$$

$$\tilde{z} = \frac{130}{7} \Longrightarrow \tilde{w} = \frac{130}{7}$$

$$3y_2 - y_3 = 1, \quad y_2 + 2y_3 = 2$$

主問題の最適解から、双対問題の最適解を
定めることができる。（逆も同様）

まとめ「相補性定理と双対変数」

[redacted]

[redacted]

主変数：

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m) \qquad \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$$

スラック変数：

$$\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = (s_1, \ldots, s_m) \qquad \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = (t_1, \ldots, t_n)$$

双対変数

相補性定理

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0 \qquad \tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$

$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0 \qquad \tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & z = x_1 + 2x_2 \\
\\
\text{subject to} & x_1 + x_2 \geq 4 \\
& x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

課題2：双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

課題3：課題2の解答が正しいことを何らかの方法で確認する。