# 数理計画法

## 第10回：線形計画問題と多面体

授業の内容：

第1回(11/01)：数理計画問題・線形計画問題とは何か

第2回(11/08)：線形計画問題の標準形

第3回(11/15)：単体法

第4回(11/22)：巡回と最小添字規則

第5回(11/29)：巡回と最小添字規則，2段解法

第6回(12/06)：単体法の2段階法

第7回(12/13)：線形計画問題の行列表現と改訂単体法

第8回(12/20)：双対問題と双対定理

第9回(01/10)：相補性定理と双対変数

☆ここまで終了

第10回(01/17)：線形計画問題と多面体

第11回(01/24)：自己双対型内点法の原理

第12・13回(01/27)：演習　土曜日1・2時限開講、※**開始時刻は 9時です。**

第14回(01/31)：自己双対型内点法の実践

第15回(02/07)：期末試験

# 授業資料のダウンロード

- http://comp.cs.ehime-u.ac.jp/mathpro/

※今のところ、学内からのアクセスのみ。
※授業で使った資料そのまま
※改訂したときは連絡します
※演習のときには持ってきてください

# 復習

## まとめ「相補性定理と双対変数」

[redacted]

[redacted]

主変数：

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m) \qquad \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$$

スラック変数：

$$\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = (s_1, \ldots, s_m) \qquad \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = (t_1, \ldots, t_n)$$

双対変数

相補性定理

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0 \qquad \tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$

$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0 \qquad \tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

# 復習

主問題の等式標準形

maximize

$z = x_1 + 2x_2$

subject to

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & -x_2 & +s_1 & = & 7 \\ 3x_1 & +x_2 & +s_2 & = & 10 \\ -x_1 & +2x_2 & +s_3 & = & 18 \end{array}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_4 \geq 0$$

双対問題の等式標準形

maximize

$-w = -7y_1 - 10y_2 - 18y_3$

subject to

$$\begin{array}{rrrrcr} 2y_1 & +3y_2 & -y_3 & -t_1 & = & 1 \\ -y_1 & +y_2 & +2y_3 & -t_2 & = & 2 \end{array}$$

$$y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0$$

$$\tilde{x}_1 = \frac{2}{7} \implies \tilde{t}_1 = 0$$

$$\tilde{x}_2 = \frac{64}{7} \implies \tilde{t}_2 = 0$$

$$\tilde{s}_1 = \frac{109}{7} \implies \tilde{y}_1 = 0$$

$$\tilde{s}_2 = 0 \implies \tilde{y}_2 = ?$$

$$\tilde{s}_3 = 0 \implies \tilde{y}_3 = ?$$

$$\tilde{z} = \frac{130}{7} \implies \tilde{w} = \frac{130}{7}$$

$$3y_2 - y_3 = 1, \quad y_2 + 2y_3 = 2$$

主問題の最適解から、双対問題の最適解を定めることができる。（逆も同様）

# 復習

## 演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z = x_1 + 2x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 \geq 4 \\
& x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

課題2：双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

課題3：課題2の解答が正しいことを何らかの方法で確認する。

# 復習

## 演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \text{minimize} & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & -x_2 \geq -3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

# 復習

## 演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{minimize} & z = x_1 + 2x_2 \\
\texttt{subject to} & x_1 + x_2 \geq 4 \\
& x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{minimize} & z = x_1 + 2x_2 \\
\texttt{subject to} & x_1 + x_2 \geq 4 \\
& -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\
& -x_2 \geq -3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{minimize} & z = x_1 + 2x_2 \\
\texttt{subject to} & \\
& \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

# 復習

## 演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

minimize $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

maximize $w = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

# 復習

## 演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

minimize $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

maximize $w = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0$$

# 復習

## 演習問題

## A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

課題2：双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

maximize
$$w = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

subject to
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0$$

simplex表

| 基底変数 | 非基底変数 | 非基底変数 | 非基底変数 | 基底変数 | 基底変数 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $w$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $t_1$ | $t_2$ | 右辺 |
| 0 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | -4 | -2 | 3 | 0 | 0 | 0 |

# 復習

## 演習問題

課題2：双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

simplex表

| 基底変数 | 非基底変数 | 非基底変数 | 非基底変数 | 基底変数 | 基底変数 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $w$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $t_1$ | $t_2$ | 右辺 |
| 0 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | -4 | -2 | 3 | 0 | 0 | 0 |

| 基底変数 | 基底変数 | 非基底変数 | 非基底変数 | 非基底変数 | 基底変数 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $w$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $t_1$ | $t_2$ | 右辺 |
| 0 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 3 | -1 | -1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | -6 | 3 | 4 | 0 | 4 |

| 基底変数 | 基底変数 | 基底変数 | 非基底変数 | 非基底変数 | 非基底変数 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $w$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $t_1$ | $t_2$ | 右辺 |
| 0 | 1 | 0 | -1/3 | 2/3 | 1/3 | 4/3 |
| 0 | 0 | 3/3=1 | -1/3 | -1/3 | 1/3 | 1/3 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 6 |

最適解： $w = 6, y_1 = 4/3, y_2 = 1/3, y_3 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0$

# 復習

## 演習問題

課題2：双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

### 相補性定理

主問題と双対問題の対を成す変数、双対変数の最適解は次の関係式を満たす。

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0 \quad \tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$

$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0 \quad \tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

双対問題の最適解： $w = 6, y_1 = 4/3, y_2 = 1/3, y_3 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0$

↓ 相補性定理

主問題の最適解： $z = 6, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 > 0, x_1 > 0, x_2 > 0$

主問題の等式制約より $x_1 + x_2 = 4, -x_1 + 2x_2 = 2, x_2 + s_3 = 3$

連立方程式を解いて元の問題の最適解を得る。

$$x_1 = 2, x_2 = 2, s_3 = 1$$

元の問題の $z$ は $x_1 = 2, x_2 = 2$ において最大値 6 を得る。

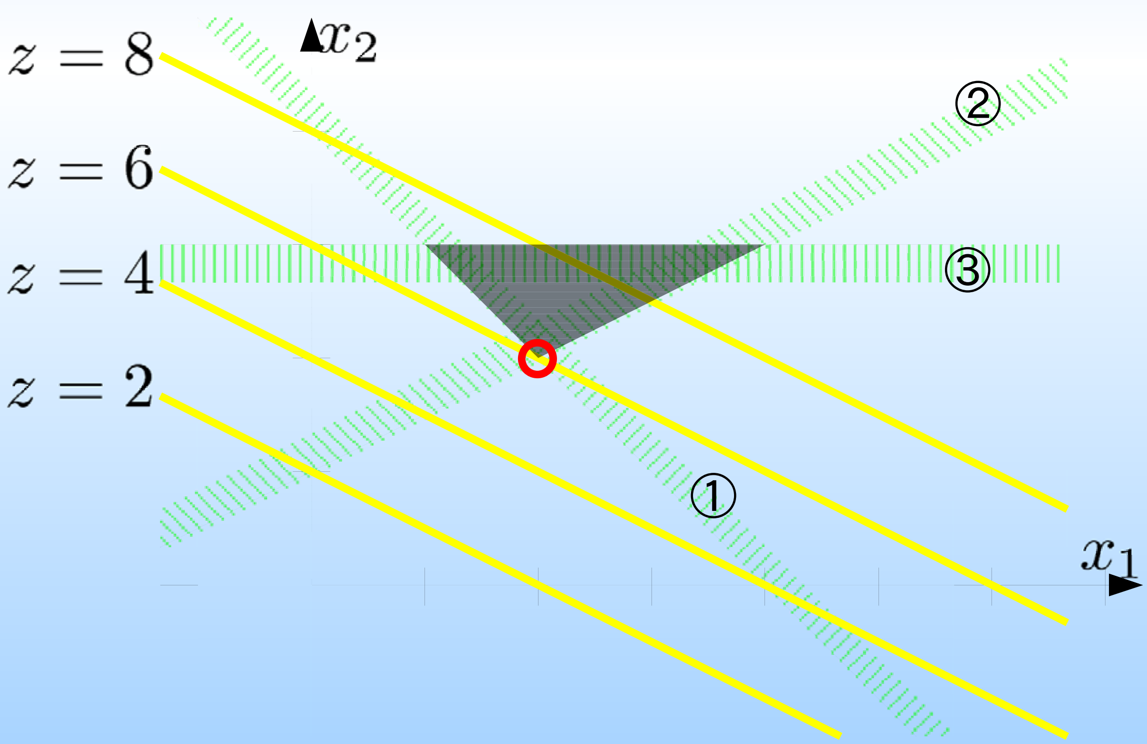
# 復習

## 演習問題

課題3：課題2の解答が正しいことを何らかの方法で確認する。

<u>元の問題の $z$ は $x_1 = 2, x_2 = 2$ において最大値 6 を得る。</u>

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & z = x_1 + 2x_2 \\
\text{subject to} & x_1 + x_2 \geq 4 \quad ① \\
& x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0 \quad ② \\
& x_2 \leq 3 \quad ③ \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$



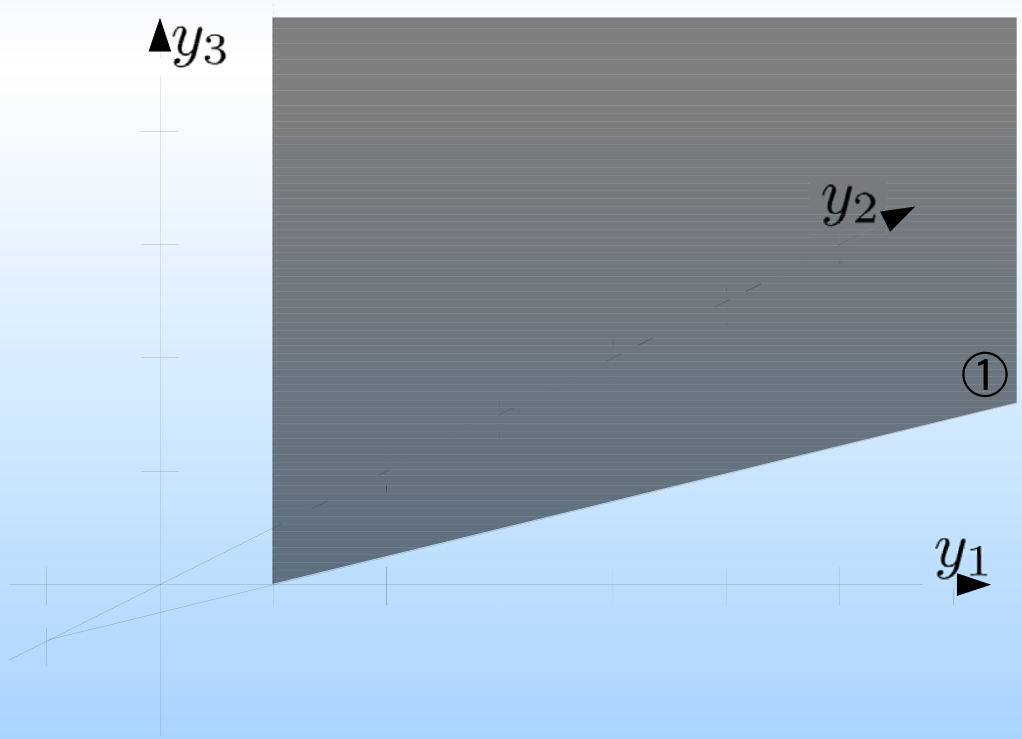
# 復習

## 演習問題

課題3：課題2の解答が正しいことを何らかの方法で確認する。

元の問題の $z$ は $x_1 = 2, x_2 = 2$ において最大値 6 を得る。

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3 \\ \text{subject to} & y_1 - y_2 \leq 1 \quad ① \\ & y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2 \quad ② \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$



# 復習

## 演習問題

課題3：課題2の解答が正しいことを何らかの方法で確認する。

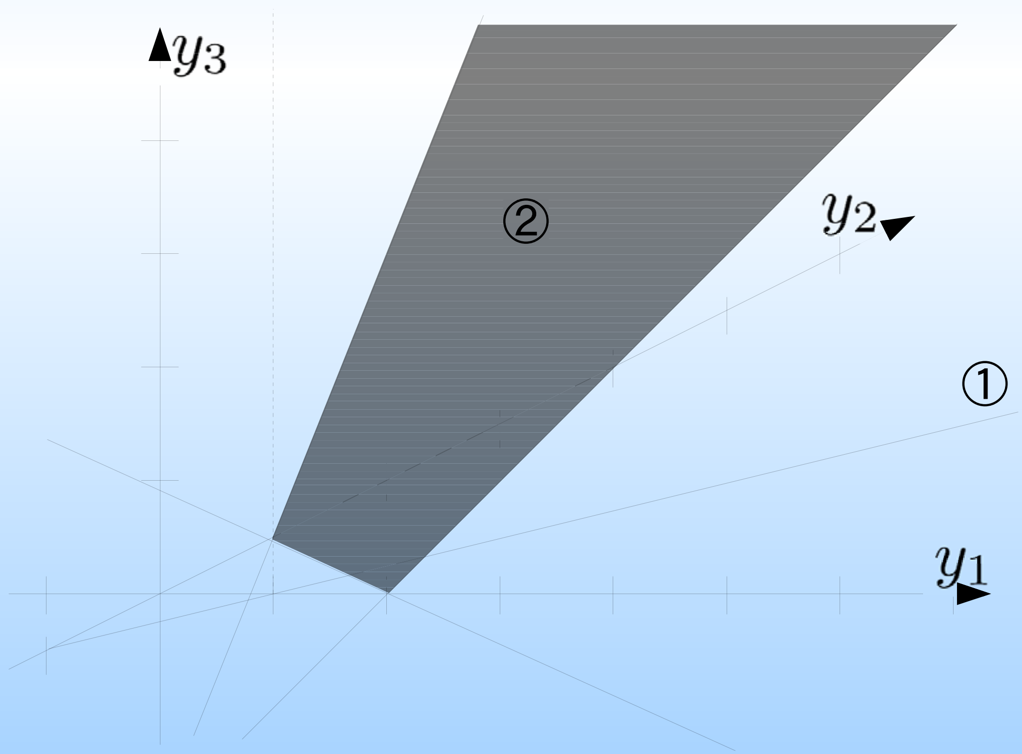
元の問題の $z$ は $x_1 = 2, x_2 = 2$ において最大値 6 を得る。

minimize $\quad w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3$

subject to $\quad y_1 - y_2 \leq 1$ ①

$\quad y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$ ②

$\quad y_1, y_2, y_3 \geq 0$



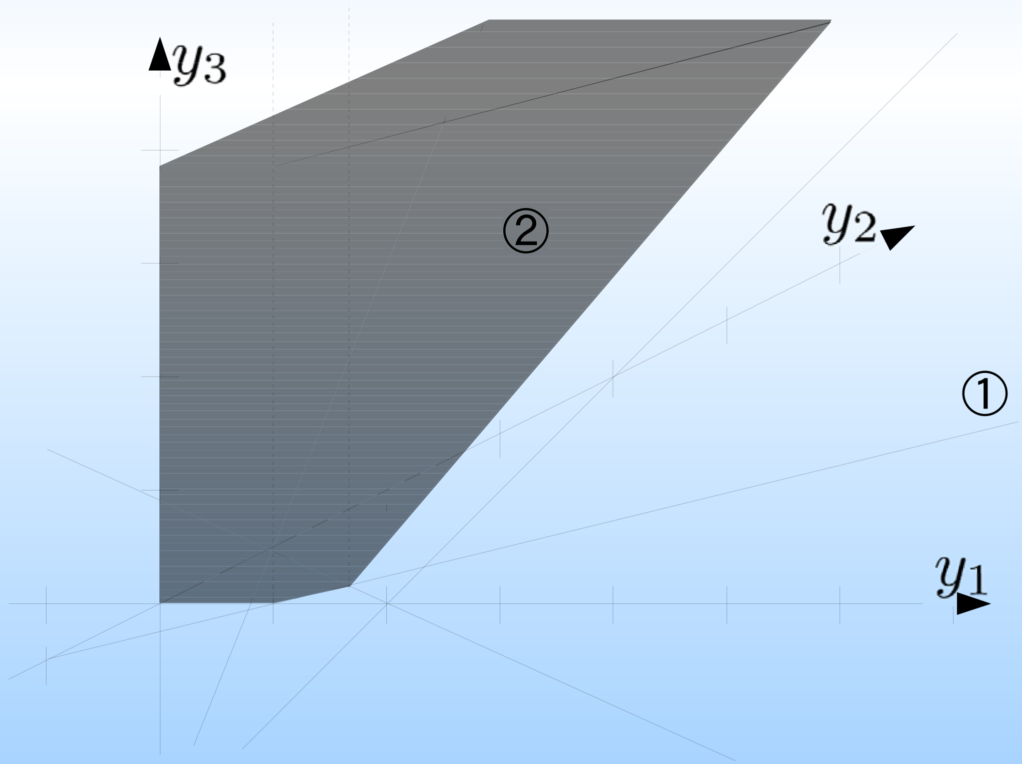
# 復習

## 演習問題

課題3：課題2の解答が正しいことを何らかの方法で確認する。

元の問題の $z$ は $x_1 = 2, x_2 = 2$ において最大値 6 を得る。

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3 \\
\text{subject to} & y_1 - y_2 \leq 1 \quad ① \\
 & y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2 \quad ② \\
 & y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{array}
$$



# 線形計画問題と多面体

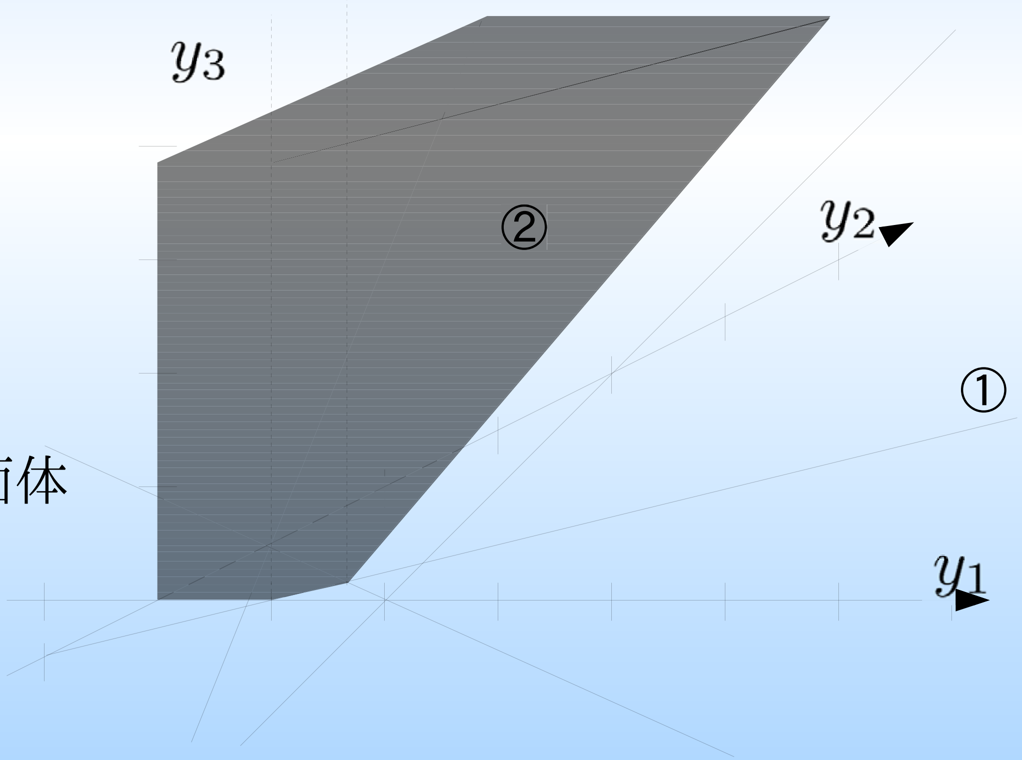
$n$次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

のとき、 $\mathcal{P}$ を $\mathbb{R}^n$ の多面体と呼ぶ。

この定義では、面や直線、点、半平面等も多面体となる。
前頁までの 3次元の実行可能領域も多面体の一部となる。

$$y_1 - y_2 \leq 1 \quad ①$$
$$y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2 \quad ②$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$




有界多面体

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{P}, ||x|| \leq \exists M$$

右図は有界でない 3次元多面体

# 線形計画問題と多面体

妥当不等式

$\mathcal{P}$ が $\mathbb{R}^n$ の多面体であるとき、

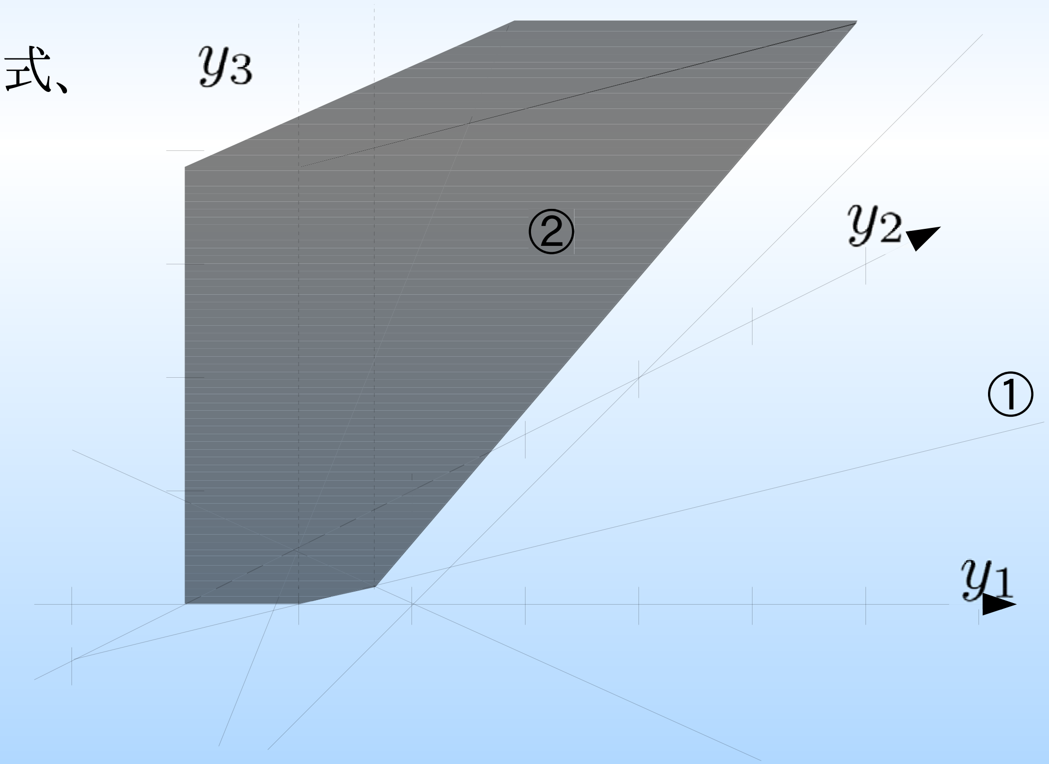
$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{P} \Rightarrow \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq b$$

が成立するならば、 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq b$ は $\mathcal{P}$ の妥当不等式と言う。

式①や式②は右図の多面体の妥当不等式である。

$y_1 - y_2 \leq 2$ も妥当不等式、

$$\begin{aligned} &y_1 - y_2 \leq 1 \quad ① \\ &y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2 \quad ② \\ &y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$



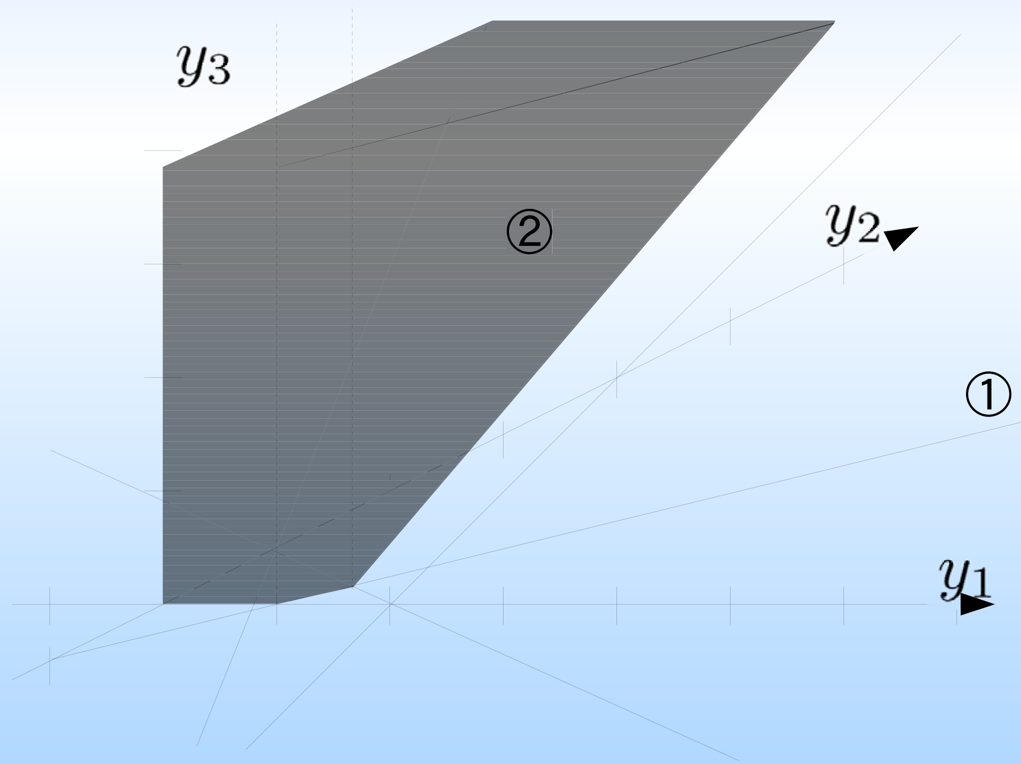
# 線形計画問題と多面体

支持超平面

$\mathcal{P}$ が $\mathbb{R}^n$ の多面体で、$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq b$ が $\mathcal{P}$ の妥当不等式であるとき、
$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq b$ の境界が $\mathcal{P}$ と交わりを持つとき、この境界を $\mathcal{P}$ の
支持超平面と呼ぶ。

式①や式②の境界は右図の多面体の支持超平面である。
$y_1 - y_2 \leq 2$ は妥当不等式であるが、対応する面は支持超平面ではない。

$y_1 - y_2 \leq 1$ ①
$y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$ ②
$y_1, y_2, y_3 \geq 0$



# 自己双対型線形計画問題

次の不等式標準形で表わされる線形計画問題を
自己双対型線形計画問題と言う。
ここで、係数行列 $\boldsymbol{A}$ は歪対称行列。

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

自己双対型線形計画問題の双対問題を考える。

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & w = -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array} = \begin{array}{ll} \text{minimize} & w = -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & -\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

自己双対型線形計画問題の双対問題は主問題に一致する。

# 自己双対型線形計画問題

任意の線形計画問題を自己双対型線形計画問題に書き換えることができる。
与えられた不等式標準形をもとに、具体的に書き換えの方法を示す。
与えられた線形計画問題に対応して双対問題を考える。

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0} \end{array}$$

次の自己双対型線形計画問題は元の問題の最適解を実行可能領域に持つ。

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + 0\tau \\ \text{subject to} & \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & A^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{c} \\ -A & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{b}^{T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \tau \end{pmatrix} \le \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \tau \ge \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & A^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{c} \\ -A & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{b}^{T} & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & -A^{\mathrm{T}} & (\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \\ (A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & (-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \\ (-\boldsymbol{c})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{b}^{T} & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & A^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{c} \\ -A & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{b}^{T} & 0 \end{pmatrix}$$

# 自己双対型線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + 0\tau \\ \text{subject to} & \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & A^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{c} \\ -A & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{b}^{T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \tau \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \tau \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

元の問題の最適解を $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 、その双対問題の最適解を $\tilde{\boldsymbol{y}}$ としたとき、
$\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y} = \tilde{\boldsymbol{y}}, \tau = 1$ が自己双対型問題の実行可能領域にあることは明らか。

逆に自己双対型問題の実行可能解を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \tau$ としたとき、
制約式より $\tau\boldsymbol{c} \leq A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$、$-\tau\boldsymbol{b} \leq -A\boldsymbol{x}$ したがって、

$$\tau(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}) = (\tau\boldsymbol{c})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - (\tau\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq (A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - (A\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 0$$

$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ なら弱双対定理より元の問題の最適解となる。
$\tau = 0$ ならば相補性定理より $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} > 0$ なので、$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0$
または $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} < 0$ となる。前者なら元の主問題が実行不能で後者なら双対問題が実行不能になる。

# 演習問題

## A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

課題1：次の線形計画問題を書換えて自己双対型線形計画問題を導きなさい。

minimize $z = x_1 + 2x_2$

subject to
$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

課題2：元の問題の最適解が求めた自己双対型線形計画問題の実行可能解になっていることを確認してください。