数理計画法

第12･13回:演習

授業の内容：

第1回(11/01)：数理計画問題・線形計画問題とは何か

第2回(11/08)：線形計画問題の標準形

第3回(11/15)：単体法

第4回(11/22)：巡回と最小添字規則

第5回(11/29)：巡回と最小添字規則，2段解法

第6回(12/06)：単体法の2段階法

第7回(12/13)：線形計画問題の行列表現と改訂単体法

第8回(12/20)：双対問題と双対定理

第9回(01/10)：相補性定理と双対変数

第10回(01/17)：線形計画問題と多面体

第11回(01/24)：自己双対型内点法の原理

☆ここまで終了

第12・13回(01/27)：演習　土曜日1・2時限開講

第14回(01/31)：自己双対型内点法の実践

第15回(02/07)：期末試験

線形計画問題の不等式標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は左辺が大きい不等式
- 全ての変数は非負

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 &\leq 1650 \\ 10x_1 + 14x_2 &\leq 1400 \\ 9x_1 + 20x_2 &\leq 1800 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

演習1課題1

minimize

$$-5x_1 - 4x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} -15x_1 - 11x_2 &\geq -1650 \\ -10x_1 - 14x_2 &\geq -1400 \\ -9x_1 - 20x_2 &\geq -1800 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

不等式標準形

線形計画問題の等式標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は右辺が非負の等式
- 全ての変数は非負

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 &\leq 1650 \\ 10x_1 + 14x_2 &\leq 1400 \\ 9x_1 + 20x_2 &\leq 1800 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

演習1課題1

minimize

$$-5x_1 - 4x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650 \\ 10x_1 + 14x_2 + x_4 &= 1400 \\ 9x_1 + 20x_2 + x_5 &= 1800 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

等式標準形

線形計画問題の標準形

線形計画問題の不等式標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は左辺が大きい不等式
- 全ての変数は非負

線形計画問題の等式標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は右辺が非負の等式
- 全ての変数は非負

全ての線形計画問題は標準形で表現できる

- 両辺を -1倍して、最大化問題を最小化問題に変形する
- 〃 不等号の向きを揃える
- 一つの等式制約を2つの不等式制約に置き換える

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad x_1 + x_2 \geq 0, -x_1 - x_2 \geq 0$$

- 一つの自由変数を2つの非負変数に置き換える

$$x = x_1 - x_2 \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

- 非負変数を追加して不等式制約を等式制約に置き換える

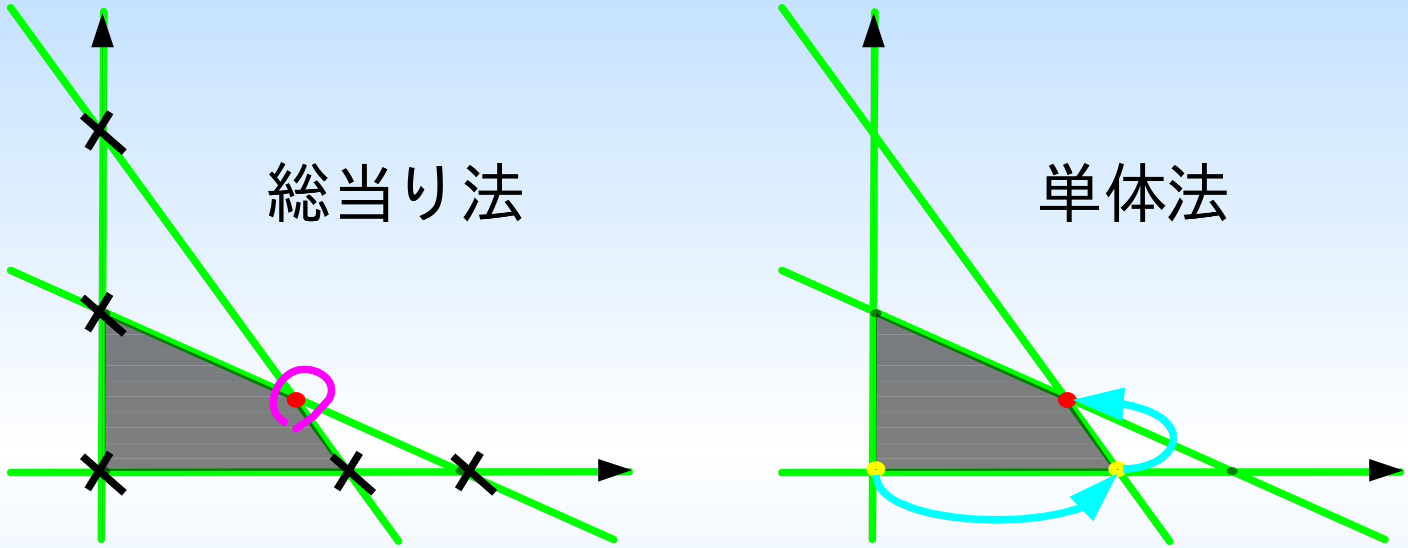
$$x_1 + x_2 \leq 1 \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_3 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \geq 1 \qquad x_1 + x_2 - x_3 = 1, \quad x_3 \geq 0$$

単体法

線形計画問題の基本解法である「単体法(simplex method)」

- 原理



単体法：目的関数を最適値に近づける隣接端点を選び
実行可能領域の端点から最適解を探る方法

- 表を使った機械的(でプログラムにし易そう)な実行方法

等式標準形から simplex 表を作成し、単体法の操作を simplex 表の上で実行する。

maximiaze $z(= 600x_1 + 500x_2)$

subject to

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45000$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 40000$$
$$z - 600x_1 - 500x_2 = 0$$
$$z, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45000	
0	1	1	0	1	40000	
1	-600	-500	0	0	0	

↓

非基底変数

基本解

全ての変数が非負(非基底変数はゼロ)なので、基本解は実行可能解

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45000	
0	1	1	0	1	40000	
1	-600	-500	0	0	0	

↓

非基底変数　　　　　　　基本解

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45000	
0	1	1	0	1	40000	
1	-600	-500	0	0	0	

目的関数が速く増加する変数を新しい基底変数に選ぶ

↓

非基底変数　　　　　　　基本解

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45000	15000
0	1	1	0	1	40000	40000
1	-600	-500	0	0	0	

新しい基底変数の最大増加量を求め最も小さい増加量の式を選ぶ

↓

非基底変数　　　　基本解

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45000	15000
0	1	1	0	1	40000	40000
1	-600	-500	0	0	0	

新しい非基底変数を定め、連立方程式を解く

↓

非基底変数　　　　基本解

×1−

×600＋

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	1	1	0	1	40000	
1	-600	-500	0	0	0	

↓

非基底変数　　　　基本解

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	2/3	- 1/3	1	25000	
1	0	-300	200	0	9000000	

目的関数が増加する変数を新しい基底変数に選ぶ

↓

非基底変数　　　　基本解

×1－

×600＋

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	1	1	0	1	40000	
1	-600	-500	0	0	0	

↓

非基底変数　　　　基本解

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	2/3	- 1/3	$\boxed{1}$	25000	
1	0	-300	200	0	9000000	

新しい非基底変数を定め、連立方程式を解く

↓

非基底変数　基本解

×1/3－

×300＋

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	1	- 1/2	1.5	37500	
1	0	-300	200	0	9000000	

↓

非基底変数　　　基本解

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	2/3	- 1/3	$\boxed{1}$	25000	
1	0	-300	200	0	9000000	

新しい非基底変数を定め、連立方程式を解く

↓

非基底変数　基本解

×1/3−

×300+

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	1	- 1/2	1.5	37500	
1	0	-300	200	0	9000000	

↓

非基底変数　基本解

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	0	1/2	0	2500	
0	0	1	- 1/2	1.5	37500	
1	0	0	50	450	20250000	

これ以上目的関数を改善できなくなれば、最適解が求まっている

単体法(simplex method)

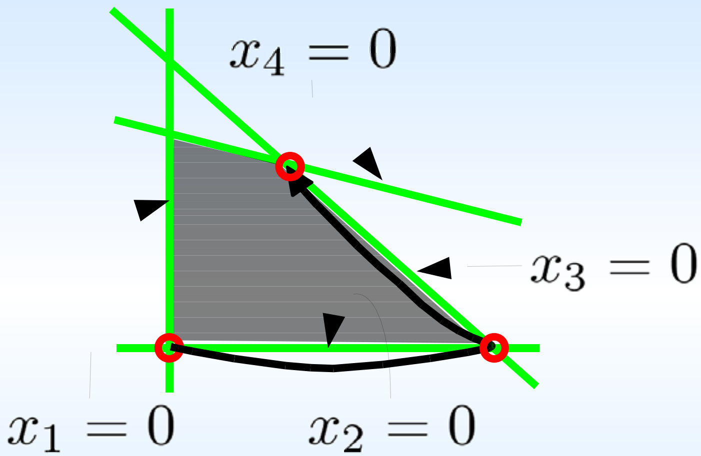
最も基本的な単体法による解法

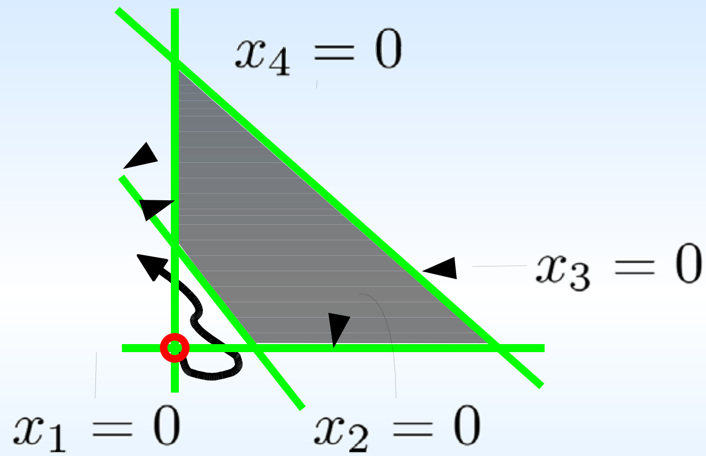
- 目的関数を変数として含む制約式を構成する、
- 実行可能解を基本解とする連立方程式を与えるような基底変数と非基底変数を選ぶ、
- 目的関数を増加する新しい基底変数の候補を選ぶ、
- 新しい基底変数の最大増加量を小さくするような新しい非基底変数の候補を選ぶ、
- 基底変数･非基底変数の交換で得た連立方程式を解く
- 目的関数を増加できる限り変数の交換を繰り返す、
- 目的関数を改善できなくなったら最適解が求まっている。

・ 最初の実行可能解の選択法
・ 目的関数を改善できなくなる

復習

単体法(simplex method)の利用のためには初期基底解となる実行可能領域の端点の情報が必要





2段階単体法(2stage simplex method)
第1段階：初期基底解を求めるための線形計画問題を解く
第2段階：前段階で得た初期基底解で元の線形計画問題を解く

2段階単体法(2stage simplex method)

第1段階：初期基底解を求めるための線形計画問題を解く

元の線形計画問題の等式標準形

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & z \\
\text{subject to} & a_1x_1 + a_2x_2 + x_3 = p_1 \\
& b_1x_1 + b_2x_2 - x_4 = p_2 \\
& c_1x_1 + c_2x_2 = p_3 \\
& z + d_1x_1 + d_2x_2 = 0
\end{array}
$$

に以下の操作を施して補助問題を作る。

(1)スラック変数の係数が正でない制約式に人工変数を加える

(2)係数が -1 の人工変数だけから成る人工目的関数を定める

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \tilde{z}(= -x_5 - x_6) \\
\text{subject to} & a_1x_1 + a_2x_2 + x_3 = p_1 \\
& b_1x_1 + b_2x_2 - x_4 \boxed{+ x_5} = p_2 \\
& c_1x_1 + c_2x_2 \boxed{+ x_6} = p_3 \\
& z + d_1x_1 + d_2x_2 = 0 \\
& \boxed{\tilde{z} + x_5 + x_6 = 0}
\end{array}
$$

補助問題の最適解において基底解が $x_5 = x_6 = 0$ を満たせば元の問題の初期基底解として利用できる

2段階単体法(2stage simplex method)

第1段階：初期基底解を求めるための線形計画問題を解く

元の線形計画問題の等式標準形

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & z \\
\text{subject to} & a_1x_1 + a_2x_2 + x_3 = p_1 \\
& b_1x_1 + b_2x_2 - x_4 = p_2 \\
& c_1x_1 + c_2x_2 = p_3 \\
& z + d_1x_1 + d_2x_2 = 0
\end{array}
$$

等式標準形では $p_1, p_2, \ldots$ は常に非負
→原点でスラック変数が非負条件を満たすためには係数も非負であることが必要

に以下の操作を施して補助問題を作る。

(1)スラック変数の係数が正でない制約式に人工変数を加える

(2)係数が -1 の人工変数だけから成る人工目的関数を定める

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \tilde{z}(= -x_5 - x_6) \\
\text{subject to} & a_1x_1 + a_2x_2 + x_3 = p_1 \\
& b_1x_1 + b_2x_2 - x_4 \boxed{+x_5} = p_2 \\
& c_1x_1 + c_2x_2 \boxed{+x_6} = p_3 \\
& z + d_1x_1 + d_2x_2 = 0 \\
& \boxed{\tilde{z} + x_5 + x_6 = 0}
\end{array}
$$

補助問題の最適解において基底解が $x_5 = x_6 = 0$ を満たせば元の問題の初期基底解として利用できる

2段階単体法(2stage simplex method)

第1段階：初期基底解を求めるための線形計画問題を解く

元の線形計画問題の等式標準形

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} \quad z \\
&\text{subject to} \quad
\begin{array}{rcl}
a_1x_1+a_2x_2+x_3 & & = p_1 \\
b_1x_1+b_2x_2 & -x_4 & = p_2 \\
c_1x_1+c_2x_2 & & = p_3 \\
z+d_1x_1+d_2x_2 & & = 0
\end{array}
\end{aligned}
$$

に以下の操作を施して補助問題を作る。

(1)スラック変数の係数が正でない制約式に人工変数を加える

(2)係数が -1 の人工変数だけから成る人工目的関数を定める

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} \quad \tilde{z}(=-x_5-x_6) \\
&\text{subject to} \quad
\begin{array}{rcl}
a_1x_1+a_2x_2+x_3 & & = p_1 \\
b_1x_1+b_2x_2 & -x_4\boxed{+x_5} & = p_2 \\
c_1x_1+c_2x_2 & \boxed{+x_6} & = p_3 \\
z+d_1x_1+d_2x_2 & & = 0
\end{array}
\end{aligned}
$$

$$\tilde{z}-(b_1+c_1)x_1-(b_2+c_2)x_2+x_4=-p_2-p_3$$

simplex表を用いた単体法の実行のためには、表の各行の基底変数は一つまでにすることが必要

※係数は1でなくても良い

補助問題の最適解において基底解が $x_5 = x_6 = 0$ を満たせば元の問題の初期基底解として利用できる

復習

演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

課題1：次の線形計画問題を単体法を用いて解き、最適解を求める

minimize $\quad z = x_1 + 2x_2$

subject to $\quad x_1 + x_2 \geq 4$

$$x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0$$
$$x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

※注意：最小化問題です。原点は実行可能領域ではありません。

2段階単体法の代わりに右の問題を通常の単体法で解き
その最適解を元の問題の最適解と比較する

元の問題

$$\begin{aligned} \text{max.}\quad & -z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

罰則付問題

$$\begin{aligned} \text{max.}\quad & \tilde{z} = -x_1 - 2x_2 - P(x_6 + x_7) \\ \text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{aligned}$$

P にはとても大きい数、例えば24000等を用いる

復習

2段階単体法の代わりに右の問題を通常の単体法で解き
その最適解を元の問題の最適解と比較する

元の問題

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\quad & -z = -x_1 - 2x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\
& -x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\
& x_2 + x_5 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

罰則付問題

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\quad & \tilde{z} = -x_1 - 2x_2 - P(x_6 + x_7) \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 4 \\
& -x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 2 \\
& x_2 + x_5 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{aligned}
$$

P にはとても大きい数、例えば24000等を用いる

$$\tilde{z} = -x_1 - 2x_2 - P(x_6 + x_7) = -x_1 - (2 - 3P)x_2 - Px_3 - Px_4 - 6P$$

P はとても大きい数

基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	
$\tilde{z}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	右辺
0	1	1	-1	0	0	1	0	4
0	-1	2	0	-1	0	0	1	2
0	0	1	0	0	1	0	0	3
1	1	2-3P	P	P	0	0	0	-6P

P はとても大きい数

基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	
$\tilde{z}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	右辺
0	1	1	-1	0	0	1	0	4
0	-1	2	0	-1	0	0	1	2
0	0	1	0	0	1	0	0	3
1	1	2-3P	P	P	0	0	0	-6P

基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	
$\tilde{z}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	右辺
0	3/2	0	-1	+1/2	0	1	-1/2	3
0	-1/2	1	0	-1/2	0	0	+1/2	1
0	+1/2	0	0	+1/2	1	0	-1/2	2
1	2-3P/2	0	P	1-P/2	0	0	-1+3P/2	-2-3P

基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	
$\tilde{z}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	右辺
0	1	0	-2/3	+1/3	0	+2/3	-1/3	2
0	0	1	-1/3	-1/3	0	+1/3	+1/3	2
0	0	0	+1/3	+1/3	1	-1/3	-1/3	1
1	0	0	+4/3	+1/3	0	-4/3+P	-1/3	-6

最適解：$x_1 = 2, x_2 = 2, \tilde{z} = -6 \Rightarrow z = 6$

復習

2段階単体法の代わりに右の問題を通常の単体法で解き
その最適解を元の問題の最適解と比較する

元の問題

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & -z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

最適解：$x_1 = 2, x_2 = 2, z = 6$

罰則付問題

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \tilde{z} = -x_1 - 2x_2 - P(x_6 + x_7) \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{aligned}$$

P にはとても大きい数、例えば24000等を用いる

最適解：$x_1 = 2, x_2 = 2, \tilde{z} = -6$

- Pの値を正しく決める方法が無い
- 条件数を悪化させる可能性が高い
- P=∞では連立方程式が大きくなってしまう

双対問題と双対定理のまとめ

maximize $z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	minimize $w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ subject to $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$
主問題	双対問題

双対問題は、
最大化問題の最小上界、
最小化問題の最大下界
を求める数理計画問題である。
行列表現を用いた一般的な表現は
左記の通り

双対定理

上式のような線形計画問題とその双対問題が与えられているとき、$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$ がそれぞれ主問題、双対問題の実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、これは、それぞれの問題の最適解である。

$$\exists \tilde{\boldsymbol{x}}, \exists \tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$
$$\Longrightarrow \forall \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

また、どちらか一方に最適解 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ が存在すれば、もう一方にも最適解 $\tilde{\boldsymbol{y}}$ が存在し、双方の最適解が与える目的関数値は等しい。

maximize

$z = c^{\mathrm{T}} x$

subject to

$Ax \leq b$

$x \geq 0$

主問題

minimize

$w = b^{\mathrm{T}} y$

subject to

$A^{\mathrm{T}} y \geq c$

$y \geq 0$

双対問題

相補性定理

左式のような線形計画問題とその双対問題が与えられているとき、$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$がそれぞれ、主問題、双対問題の最適解であるとする。

このとき、次の関係式が成立する。

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow a_{1j}\tilde{y}_1 + \cdots + a_{nj}\tilde{y}_n = c_j$$

$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow a_{k1}\tilde{x}_1 + \cdots + a_{km}\tilde{x}_m = b_k$$

$$a_{1j}\tilde{y}_1 + \cdots + a_{nj}\tilde{y}_n > c_j \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$

$$a_{k1}\tilde{x}_1 + \cdots + a_{km}\tilde{x}_m < b_k \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

maximize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$

主問題の等式標準形

minimize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題の等式標準形

相補性定理

左式のような線形計画問題とその双対問題が与えられているとき、$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$, $\tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n)$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$, $\tilde{\boldsymbol{t}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{s}_m)$ がそれぞれ、主問題、双対問題の最適解であるとする。

このとき、次の関係式が成立する。

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0 \qquad \tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$

$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0 \qquad \tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

授業の欠席について

- 成績評価に出席点はありません。
- 毎回の提出課題は評価対象です。
- 正当な理由で欠席した場合には提出課題の再提出を認めます。欠席した回の演習課題を完成して提出してください。

※課題は正しい解答とともに完成した形で提出された場合にのみ評価します。確認のために口頭での説明を求める場合があります。

- ２回以上の欠席があり、課題提出が無い場合は評価しません。
- １月２７日の欠席分も同じ扱いとします。

演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

課題1：次の線形計画問題を書換えて不等式標準形を導きなさい。

maximize

$$z = 4x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 &\leq x_2 + 1 \\ x_1 + 2x_2 &\leq x_3 + 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

課題2：上で求めた不等式標準形にもとづき、元の問題の双対問題を導きなさい。

課題3：上で求めた主問題、双対問題の等式標準形を導き、それぞれを simplex 表を用いた単体法で解きなさい。

演習問題

課題1：次の線形計画問題を書換えて不等式標準形を導きなさい。

maximize

$$z = 4x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

subject to

$$x_1 \le x_2 + 1$$

$$x_1 + 2x_2 \le x_3 + 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

$$\text{minimize :} \quad -z = -4x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

$$\text{subject to} \quad -x_1 + x_2 \ge -1$$

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

演習問題

$$\text{minimize :}\quad -z = -4x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

$$\begin{aligned} \text{subject to}\quad -x_1 + x_2 &\geq -1 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 &\geq -2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

課題2：上で求めた不等式標準形にもとづき、元の問題の双対問題を導きなさい。

minimize :

$$-z = (-4 \quad -2 \quad 3)\boldsymbol{x}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

maximize :

$$w = (-1 \quad -2)\boldsymbol{y}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \leq \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

なので、

$$\text{maximize:}\quad w = -y_1 - 2y_2$$

$$\begin{aligned} \text{subject to}\quad -y_1 - y_2 &\leq -4 \\ y_1 - 2y_2 &\leq -2 \\ y_2 &\leq 3 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

演習問題

$$\text{minimize}: \ -z = -4x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

$$\text{subject to} \quad -x_1 + x_2 \geq -1$$

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\text{maximize:} \quad w = -y_1 - 2y_2$$

$$\text{subject to} \quad -y_1 - y_2 \leq -4$$

$$y_1 - 2y_2 \leq -2$$

$$y_2 \leq 3$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

課題3：上で求めた主問題、双対問題の等式標準形を導き、それぞれを simplex 表を用いた単体法で解きなさい。

$$\text{minimize}: \ -z = -4x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

$$\text{subject to} \quad -x_1 + x_2 - s_1 = -1$$

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 - s_2 = -2$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0$$

$$\text{maximize:} \quad w = -y_1 - 2y_2$$

$$\text{subject to} \quad -y_1 - y_2 + t_1 = -4$$

$$y_1 - 2y_2 + t_2 = -2$$

$$y_2 + t_3 = 3$$

$$y_1, y_2, t_1, t_2, t_3 \geq 0$$

なので、

$$\text{subject to} \quad x_1 - x_2 + s_1 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + s_2 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0$$

$$\text{subject to} \quad y_1 + y_2 - t_1 = 4$$

$$-y_1 + 2y_2 - t_2 = 2$$

$$y_2 + t_3 = 3$$

$$y_1, y_2, t_1, t_2, t_3 \geq 0$$

演習問題

課題3：上で求めた主問題、双対問題の等式標準形を導き、それぞれを simplex 表を用いた単体法で解きなさい。

主問題、

$$\begin{aligned} \text{minimize}: \ -z &= -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ \text{subject to} \quad x_1 - x_2 + s_1 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + s_2 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 &\geq 0 \\ (z - 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0) \end{aligned}$$

simplex表

基底変数	非基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	右辺
0	1	-1	0	1	0	1
0	1	2	-1	0	1	2
1	-4	-2	3	0	0	0

simplex表

基底変数	非基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	右辺
0	1	-1	0	1	0	1
0	1	2	-1	0	1	2
1	-4	-2	3	0	0	0

基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	右辺
0	1	-1	0	1	0	1
0	0	3	-1	-1	1	1
1	0	-6	3	4	0	4

基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	非基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	右辺
0	1	0	-1/3	2/3	1/3	4/3
0	0	3/3=1	-1/3	-1/3	1/3	1/3
1	0	0	1	2	2	6

最適解： $z = 6, x_1 = 4/3, x_2 = 1/3, x_3 = 0, s_1 = 0, s_2 = 0$

演習問題

課題3：上で求めた主問題、双対問題の等式標準形を導き、それぞれを simplex 表を用いた単体法で解きなさい。

双対問題、

$$\begin{aligned} \text{maximize:} \quad & w = -y_1 - 2y_2 \\ \text{subject to} \quad & y_1 + y_2 - t_1 = 4 \\ & -y_1 + 2y_2 - t_2 = 2 \\ & y_2 + t_3 = 3 \\ & y_1, y_2, t_1, t_2, t_3 \geq 0 \end{aligned}$$

※係数が正でないスラック変数を基底として単体法を開始できない。

補助問題、

$$\begin{aligned} \text{maximize:} \quad & \tilde{w} = -t_4 - t_5 \\ \text{subject to} \quad & y_1 + y_2 - t_1 + t_4 = 4 \\ & -y_1 + 2y_2 - t_2 + t_5 = 2 \\ & y_2 + t_3 = 3 \\ & y_1, y_2, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 \geq 0 \end{aligned}$$

補助問題のsimplex表

基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	
$\tilde{w}$	y_1	y_2	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	右辺
0	1	1	-1	0	0	1	0	4
0	-1	2	0	-1	0	0	1	2
0	0	1	0	0	1	0	0	3
1	0	-3	1	1	0	0	0	-6

補助問題を解いて初期基底解を求める

補助問題のsimplex表

基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	
$\tilde{z}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	右辺
0	1	1	-1	0	0	1	0	4
0	-1	2	0	-1	0	0	1	2
0	0	1	0	0	1	0	0	3
1	0	-3	1	1	0	0	0	-6

基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	
$\tilde{z}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	右辺
0	3/2	0	-1	+1/2	0	1	-1/2	3
0	-1/2	1	0	-1/2	0	0	+1/2	1
0	0	0	0	+1/2	1	0	-1/2	2
1	-3/2	0	1	-1/2	0	0	3/2	-3

基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	
$\tilde{z}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	右辺
0	1	0	-2/3	+1/3	0	+2/3	-1/2	2
0	0	1	-1/3	-1/3	0	+1/3	+1/3	2
0	0	0	0	+1/2	1	0	-1/2	2
1	0	0	0	0	0	1	1	0

補助問題の最適解を人工目的関数値＝0 人工変数値＝0 で得た→元の問題の実行可能領域

補助問題を解いて初期基底解を求める

補助問題のsimplex表

基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	
$\tilde{z}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	右辺
0	1	0	-2/3	+1/3	0	+2/3	-1/2	2
0	0	1	-1/3	-1/3	0	+1/3	+1/3	2
0	0	0	0	+1/2	1	0	-1/2	2
1	0	0	0	0	0	1	1	0

補助問題の最適解を人工目的関数値＝0 人工変数値＝0 で得た→元の問題の実行可能領域

$$-z = -x_1 - 2x_2 = -\left(\frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + 2\right) - 2\left(\frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + 2\right) = -\frac{4}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 - 6$$

元の問題のsimplex表

基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	
$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺
0	1	0	-2/3	+1/3	0	2
0	0	1	-1/3	-1/3	0	2
0	0	0	0	+1/2	1	2
1	0	0	+4/3	+1/3	0	-6

この時点で最適解となっている