数理計画法

第14回：自己双対型内点法とNewton法

演習課題の再提出について

- 出席点はありません。提出課題は評価対象です。
- 正当な理由での欠席には提出課題の再提出を認めます。欠席した回の演習課題を提出してください。

※課題は正しい解答とともに完成した形で提出された場合にのみ評価します。確認のために口頭での説明を求める場合があります。

- ２回以上の欠席があり、課題提出が無い場合は評価しません。
- １月27日の欠席分も同じ扱いとします。27日は授業 2回分にあたるので、この日の欠席がある場合は必ず提出してください。

出欠状況

1月30日現在、2/3以上の講義に出席が可能で、 かつ 2回以上の欠席がある方の一覧です。

欠席数の記録に誤りがある場合、欠席の日付が必要になる場合は、本頁末の連絡先へ電子メールで問合せてください。

梅林良幸、浦村佳彦、大島正尭、大塚正樹、北橋省吾、

酒井俊介、中村正人、廣瀬雅人、福田幸貴、松本啓司、

水口敦司、山口裕広、山口善史

注意

課題の再提出は罰則ではなく、授業資料の解説を見て学習していただくための機会を提供するものです。

また、欠席届は出席に代わるものではありません。欠席届の提出により、正当な事由による欠席であることを示し補習授業等を受ける権利を得るためのものです。

上記のリストには欠席回数が4回を越える場合を含みません。5回以上の欠席については課題の再提出による補習での対応はできません。

授業の内容：

第1回(11/01)：数理計画問題・線形計画問題とは何か

第2回(11/08)：線形計画問題の標準形

第3回(11/15)：単体法

第4回(11/22)：巡回と最小添字規則

第5回(11/29)：巡回と最小添字規則，2段解法

第6回(12/06)：単体法の2段階法

第7回(12/13)：線形計画問題の行列表現と改訂単体法

第8回(12/20)：双対問題と双対定理

第9回(01/10)：相補性定理と双対変数

第10回(01/17)：線形計画問題と多面体

第11回(01/24)：自己双対型内点法の原理

第12・13回(01/27)：演習　土曜日1・2時限開講、※**開始時刻は 9時です。**

☆ここまで終了

第14回(01/31)：自己双対型内点法とNewton法

第15回(02/07)：期末試験

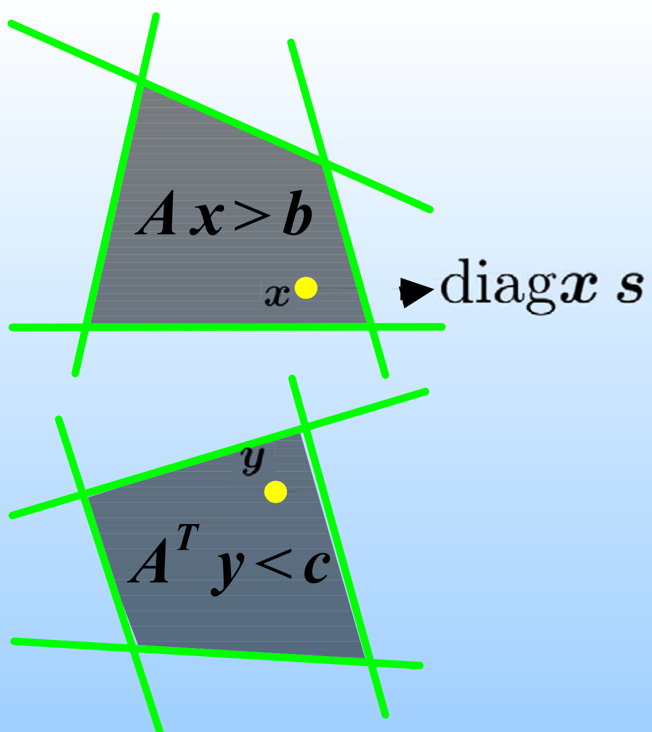
自己双対型内点法のまとめ

$$\begin{array}{c}\text{maximize}\\ z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\\ \text{subject to}\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\end{array}$$

主問題

$$\begin{array}{c}\text{minimize}\\ w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\\ \text{subject to}\\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\end{array}$$

双対問題



主・双対問題の双対ギャップ：

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{s} := \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y} - \boldsymbol{c})$$

実行可能解 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が最適解

$$\Leftrightarrow \mathrm{diag}\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$$

自己双対型内点法は、線形計画問題の最適解検索が主・双対問題の実行可能領域における目的関数値の差、すなわち双対ギャップの最小化問題に対応することを利用したものであり、具体的にはその緩和問題における反復改良による解法である。
したがって、この方法の手順は、主・双対問題をもとに構成される自己双対型線形計画問題の実行可能領域の探索に対応し、その応用にもとづいて実際のアルゴリズムが構成される。

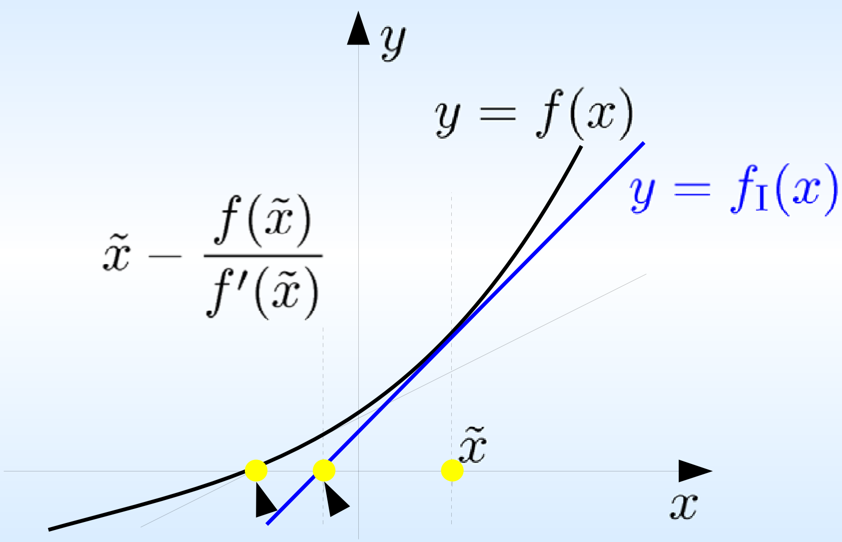
(たぶん)復習

Newton法

1変数の場合、初期点 $\tilde{x}$ の近傍での Taylor 展開を考えて

$$f(x) = f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x-\tilde{x}) + \frac{1}{2}f''(\tilde{x})(x-\tilde{x})^2 + \frac{1}{3!}f'''(\tilde{x})(x-\tilde{x})^3 + \ldots$$

$f(x)=0$ の解を求めるNewton法

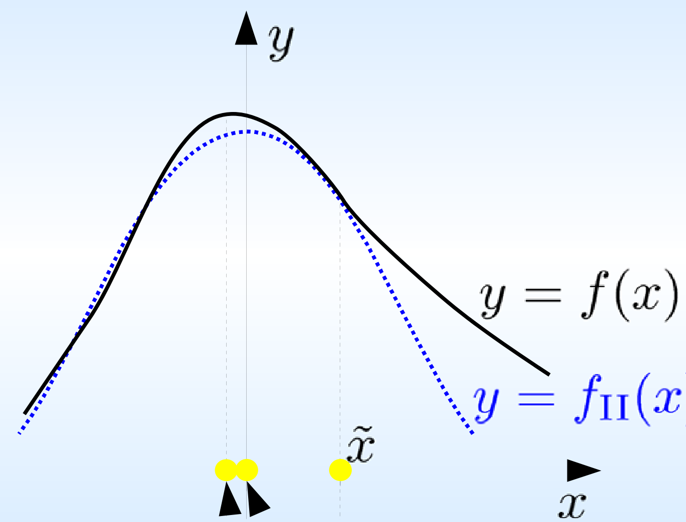


$$f_{\mathrm{I}}(x) = f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x-\tilde{x})$$

$f_{\mathrm{I}}(x)=0$ となる x を求める

$$x = \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f'(\tilde{x})}$$

$f(x)$ の極値を求めるNewton法



$$f_{\mathrm{II}}(x)=f(\tilde{x})+f'(\tilde{x})(x-\tilde{x})+\frac{1}{2}f''(\tilde{x})(x-\tilde{x})^2$$

$\frac{\mathrm{d}f_{\mathrm{II}}}{\mathrm{d}(x-\tilde{x})}=0$ となる x を求める

$$x = \tilde{x} - \frac{f'(\tilde{x})}{f''(\tilde{x})}$$

多変数の場合のNewton法

多変数の場合も初期点 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 近傍での Taylor 展開を考えて同様に、

$$f(\boldsymbol{x}) = \tilde{f} + \sum_j \tilde{f}_{x_j}\delta_j + \frac{1}{2}\sum_{j,k}\tilde{f}_{x_j x_k}\delta_j\delta_k + \dots$$

$$\tilde{f} = f(\tilde{\boldsymbol{x}}), \tilde{f}_{x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\tilde{\boldsymbol{x}}), \tilde{f}_{x_j x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\tilde{\boldsymbol{x}}), \delta_j = x_j - \tilde{x}_j$$

$$f_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x}) = \tilde{f} + \sum_j \tilde{f}_{x_j}\delta_j = \tilde{f} + \tilde{\boldsymbol{f}}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}$$

$$\tilde{\boldsymbol{f}}'^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\tilde{\boldsymbol{x}})\right), \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}} = (\delta_1, \dots, \delta_n)$$

$$f_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{x}) = \tilde{f} + \sum_j \tilde{f}_{x_j}\delta_j = \tilde{f} + \tilde{\boldsymbol{f}}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\delta}$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

自己双対型内点法のNewton法

多変数の場合も初期点 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 近傍での 1次近似

$$f_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x}) = \tilde{f} + \sum_j \tilde{f}_{x_j}\delta_j = \tilde{f} + \tilde{\boldsymbol{f}}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}$$

を考えることができるので、$f_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x}) = 0$ より、1次近似の方程式、
$\tilde{f} + \tilde{\boldsymbol{f}}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta} = 0$ を解いて $\boldsymbol{\delta}$ を定めることができれば反復公式

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}$$

によるNewton法を構成することができる。

自己双対型内点法では双対ギャップそのもののゼロ点を求めずに、弱双対定理と変数の非負性による関係式を $f = 0$ にあたるものとする。

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}) \equiv \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{diag}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$$

さらに関係式そのものではなく、その緩和された関係式の解を扱うために Newton 法を用いる。

$$\mathrm{diag}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0} \Leftarrow \mathrm{diag}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{s} = \lambda\boldsymbol{1}, \lambda \to 0$$

多変数の場合も初期点 $\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}, \tilde{\boldsymbol{s}}$ 近傍にある関係式の解を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}$ として関係式 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{x} + \triangle\boldsymbol{x})(\boldsymbol{s} + \triangle\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{0}$ の一次近似より改善量を定める。

$$\mathrm{diag}(\boldsymbol{x})\triangle\boldsymbol{s} + \mathrm{diag}(\triangle\boldsymbol{x})\boldsymbol{s} = -\left[\mathrm{diag}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{s} - \lambda\boldsymbol{1}\right]$$

普通の多変数の場合のNewton法

2次近似をもとに(制約条件無しに)極値を求める、

$$f(\boldsymbol{x}) = \tilde{f} + \sum_j \tilde{f}_{x_j}\delta_j + \frac{1}{2}\sum_{j,k}\tilde{f}_{x_j x_k}\delta_j\delta_k + \ldots$$

$$\tilde{f} = f(\tilde{\boldsymbol{x}}), \tilde{f}_{x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\tilde{\boldsymbol{x}}), \tilde{f}_{x_j x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\tilde{\boldsymbol{x}}), \delta_j = x_j - \tilde{x}_j$$

$$f_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{x}) = \tilde{f} + \sum_j \tilde{f}_{x_j}\delta_j = \tilde{f} + \tilde{\boldsymbol{f}}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\delta}$$

$$\tilde{\boldsymbol{f}}'^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\tilde{\boldsymbol{x}})\right), \quad \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}} = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$$

$\left(\frac{\partial}{\partial \delta_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \delta_n}\right)^{\mathrm{T}}(f_{\mathrm{II}} - \tilde{f}) = 0$ より改善量 $\boldsymbol{\delta}$ の連立方程式

$\tilde{\boldsymbol{f}}'^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{H}(\tilde{x})\boldsymbol{\delta} = 0$ を得る、これを解いて $\boldsymbol{\delta}$ を求める。

普通の多変数の場合のNewton法

例題　$f(\boldsymbol{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$　の極小値を与える点を求めよ

$$f_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{x}) = \tilde{f} + \sum_j \tilde{f}_{x_j}\delta_j = \tilde{f} + \tilde{\boldsymbol{f}}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\delta}$$

$$\tilde{f} = f(\tilde{\boldsymbol{x}}), \tilde{f}_{x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\tilde{\boldsymbol{x}}), \tilde{f}_{x_jx_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\tilde{\boldsymbol{x}}), \delta_j = x_j - \tilde{x}_j$$

$$\tilde{\boldsymbol{f}}'^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\tilde{\boldsymbol{x}})\right), \quad \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix},$$

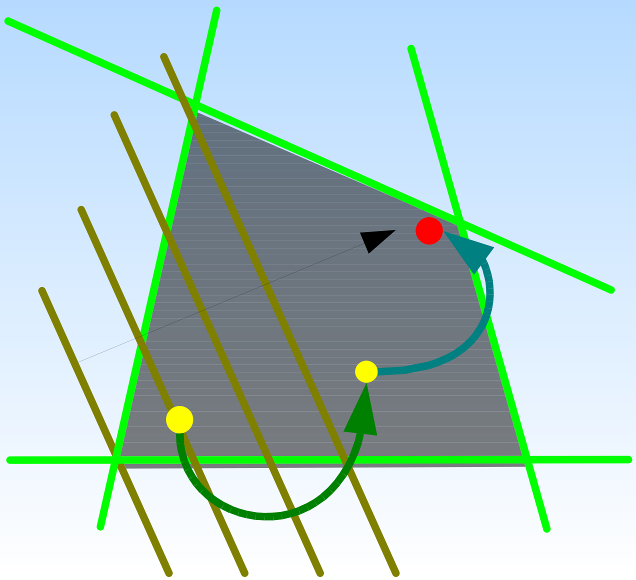
$$\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}} = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$$

$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (2, 2)$とすれば、　$\tilde{\boldsymbol{f}}'^{\mathrm{T}} = (6, 6), \ \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix},$

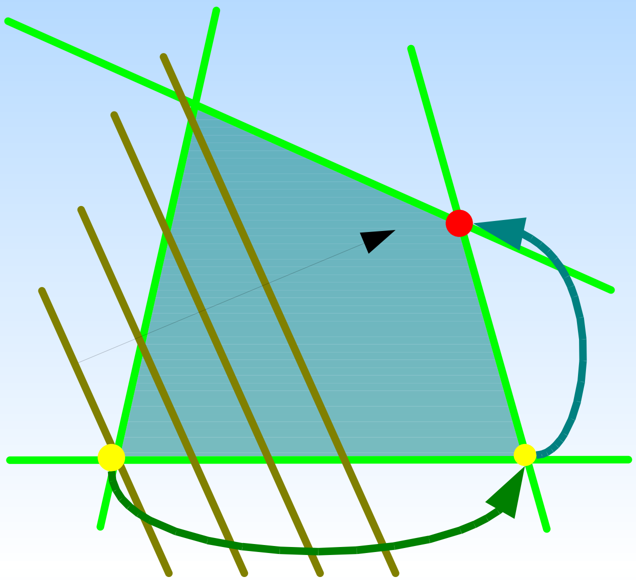
$\tilde{\boldsymbol{f}}'^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{H}(\tilde{x})\boldsymbol{\delta} = 0$　を解いて　$\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}} = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$

1回目の更新で $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3})$　を得る。

自己双対型内点法



単体法(simplex法)



単体法は線形計画問題に特化した専用の解法であり、線形計画問題の特徴に対応した方法で、本質的に可算個の可能性を順番に辿る直接的方法である。
自己双対型内点法は、線形計画問題の解法ではあるが、実際の実行過程は非線形最適問題の反復解法になっている。

演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

課題　$f(\boldsymbol{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$　の極小値を与える点を求めよ

課題1 2次近似を利用した Newton 法の手順を示せ。
課題2 初期点を $\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (2,2)$とした場合の 2 回目以降の更新を実施し
どの程度の改善が見られるか確認せよ。

初期点を $\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (2,2)$ とすれば、1回目の反復後は $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3})$

課題3 初期点を変えて同様の確認を実行せよ、

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (1,2)$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (1,2)$$