

# 数理計画法

学習教育目標と科目との対応について

学習・教育目標(C):

数学、自然科学等の基礎的知識と情報工学に関する専門的な知識を有し、それらを情報社会における諸問題の探求・解決へ自主的・継続的に応用できる人材を育成する。

キーワード：離散数学および確率・統計を含めた数学的知識

1. 線形計画問題を標準形に定式化し, 単体法および関連する解法を用いて最適解を求めることができる.
2. 線形計画法における双対性について理解し, 線形計画問題の解法に応用できる.
3. 線形計画法における自己双対型内点法を理解し, 問題の解法に適用できる.

## 授業の内容・スケジュール：

第1回：数理計画問題・線形計画問題とは何か

第2回：線形計画問題の標準形

第3回：単体法

第4回：巡回と最小添字規則

~~第5回：演習~~

第6回：2段解法

第7回：改訂単体法

第8回：双対問題

第9回：双対定理，双対シンプレックス法

~~第10回：演習~~

第11回：線形計画問題と多面体

第12回：自己双対型内点法の原理

第13回：自己双対型内点法の実践

~~第14回：演習~~

第15回：期末試験

教科書:

田村明久・村松正和「最適化法」

(共立出版, 2002年, 定価2900円+税)の1章, 2章を教科書に用いる.

参考書

金谷健一「これなら分かる最適化数学」

共立出版, 2005年,

伊理正夫「線形計画法」

共立出版, 1986年,

今野浩「カーマーカー特許とソフトウェア: 数学は特許になるか」

中央公論社, 1995年,

# 数理計画法

## 第1回:数理計画問題・線形計画問題とは何か

数理計画法 = 数理計画問題 - 問題 + 法

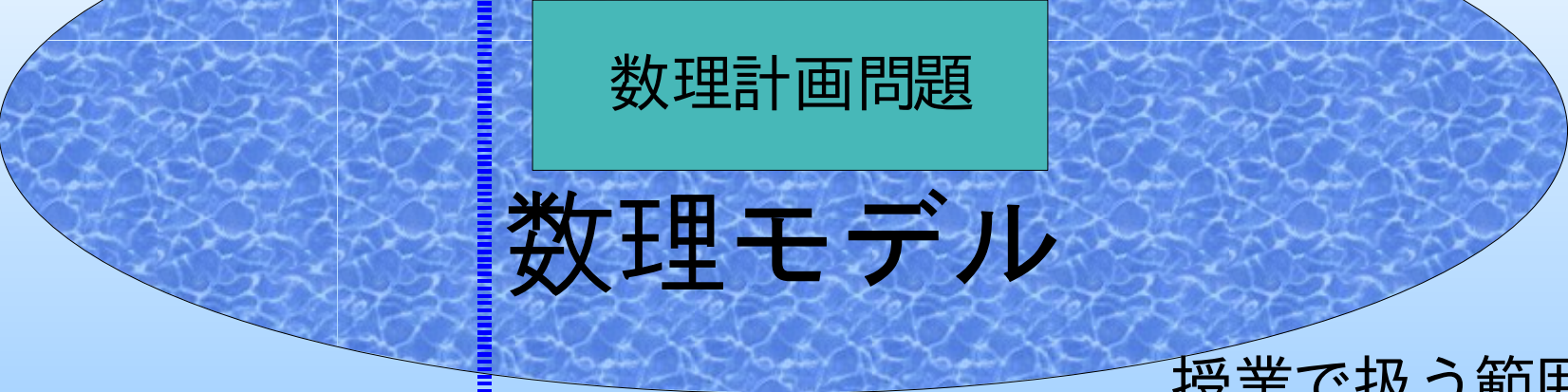
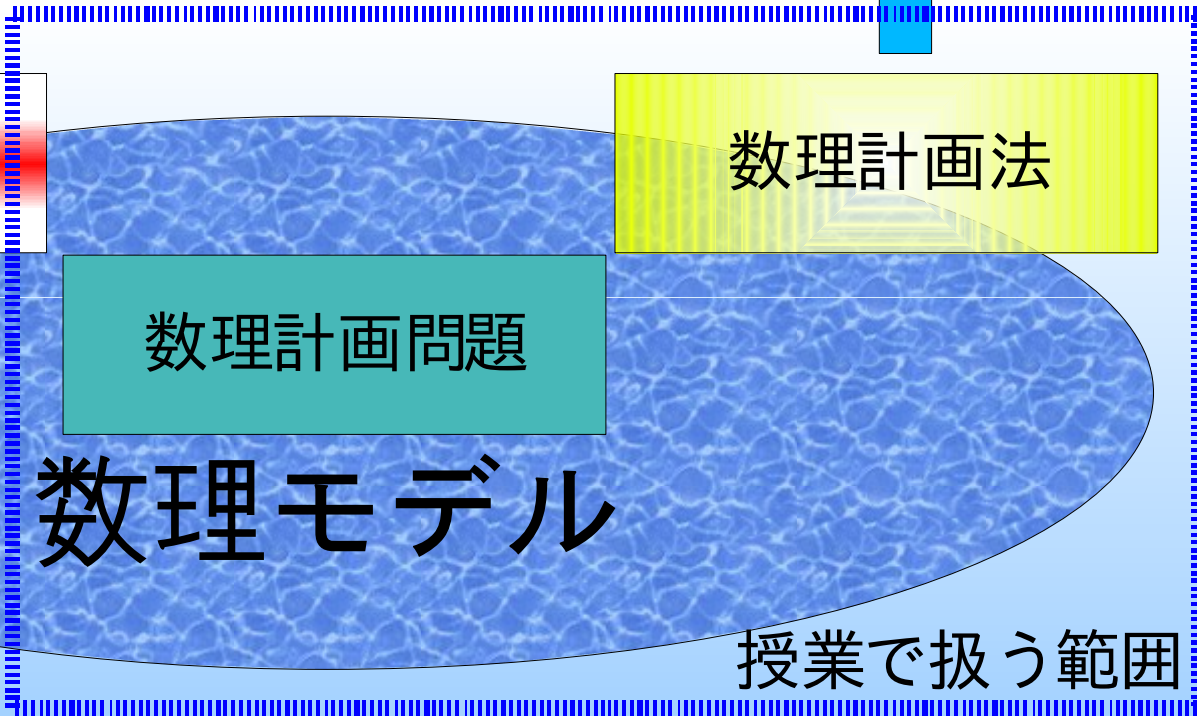
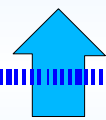
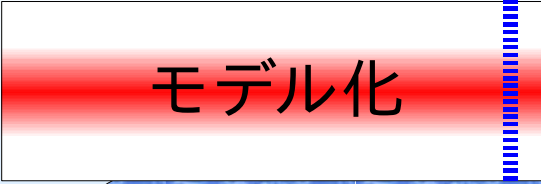
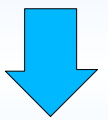
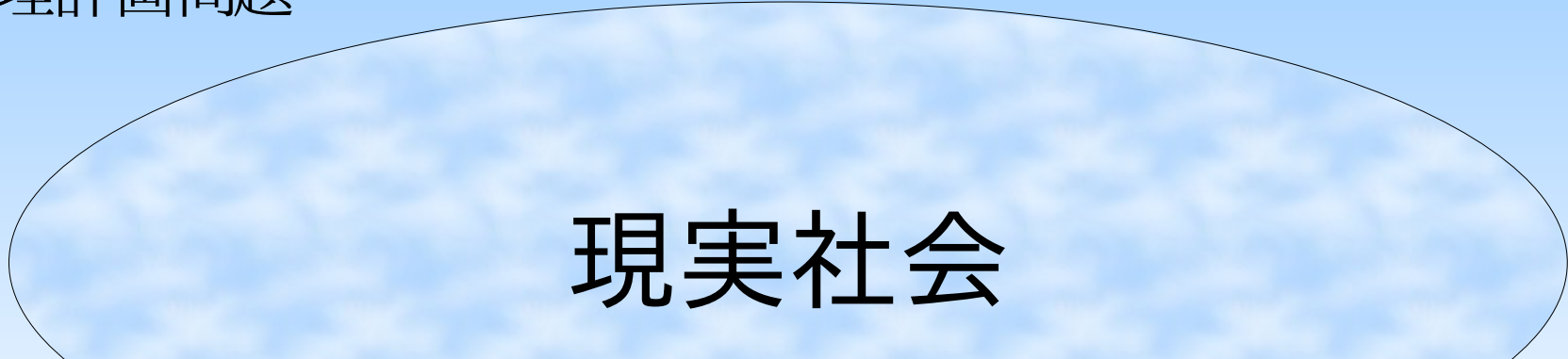
線形計画法 = 線形計画問題 - 問題 + 法

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z = f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{subject to} & g(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (x_1, \dots, x_n)^T \in X \end{array}$$

与えられた制約式のもとである関数を最大化する問題

線形計画問題  $\subset$  数理計画問題  $\subset$  最適化問題

数理計画問題



- 問題発見

操作できるものは何か（変数と制約式）

得られた結果をどう評価するのか（目的関数）

- モデル化

同じ問題でもモデル化の方法は多様

違う問題でも類似数理モデルに共通の方法が使える

- 数理計画法

問題の種類に応じた方法、効率の良い方法、コストの低い方法、手間の多い方法…

- 目的達成

最適解を実行することはできるのか、

得られる結果は目的に合ったものか、

# 数理モデルと数理計画問題の分類

- 数理モデル作成の例
- 数理計画問題の類別
- 線形計画問題とは何か

# 数理モデル作成の例

## ミックスジュース生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題：利益を最大化する2種類のミックスジュースの生産量は？

変数 : 生産量 トロピカルミックス  $x_1$   
フレッシュミックス  $x_2$   
制約式 : 供給量 マンゴー液  $3x_1 + 1x_2 \leq 45$   
オレンジ液  $x_1 + 2x_2 \leq 40$   
目的関数: 利益  $600x_1 + 500x_2$

負の生産量が無いことに注意



# 数理計画問題の表現と用語

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

最大化(minimize:最小化)

目的関数(objective func.)

制約式(constraints)

最適解(optimal solution) 目的関数の最大値を与える解

※大域的/局所的最適解: あとで、

最適値(optimal value) 最適解をとる目的関数の値

実行可能解(feasible solution) 制約式を満たす解

実行可能領域(feasible region) 実行可能解の集合

# 数理計画問題の表現と分類

- 変数の性質による分類

連続型：(実数)

離散型：(整数)

- 条件(制約式、目的関数)の性質による分類

線形、非線形、微分可・不可、連続、不連続、区分線形...

授業で扱うのは、連続変数による線形関数の数理計画問題

→線形計画問題

# 線形計画問題と素朴な解法

## ミックスジュース生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題：利益を最大化する2種類のミックスジュースの生産量は？

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

変数：生産量

トロピカルミックス  $x_1$

フレッシュミックス  $x_2$

目的関数も制約式も全て  
1次関数であり線形

## グラフを利用した解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

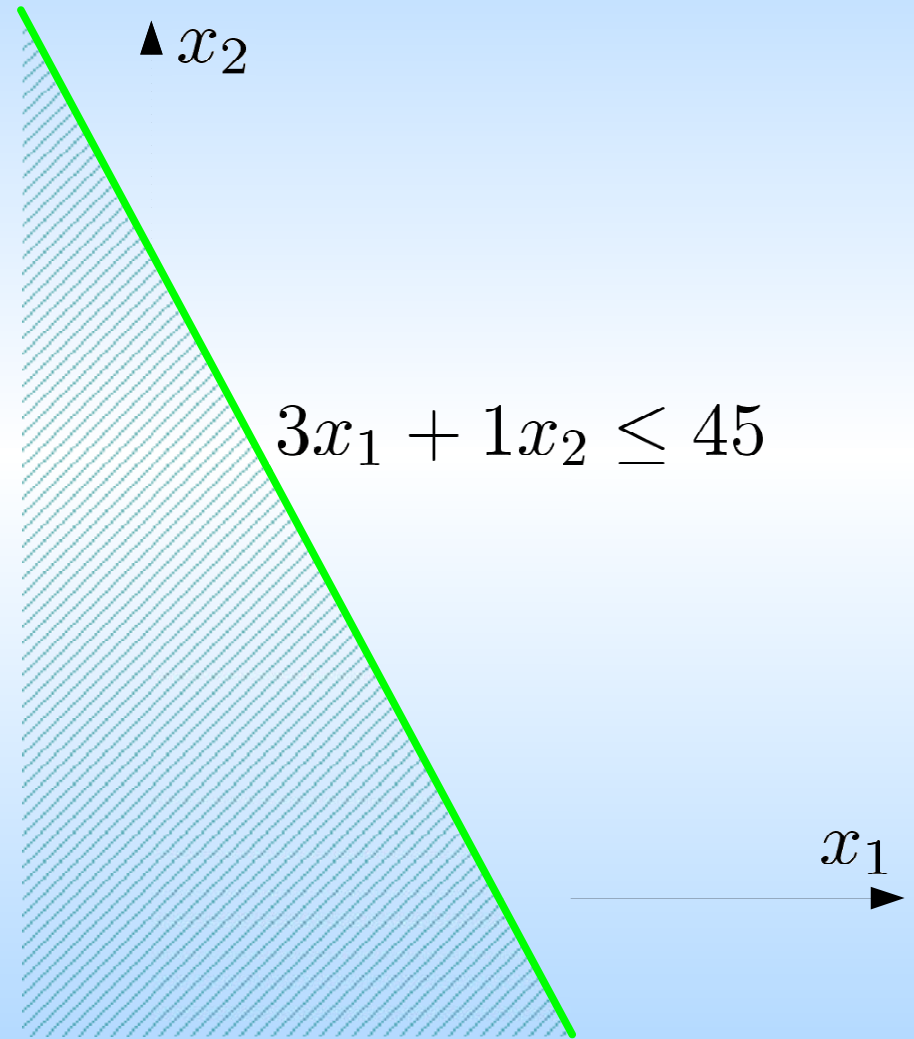
$$3x_1 + 1x_2 \leq 45$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

制約式をグラフで表現する



## グラフを利用した解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

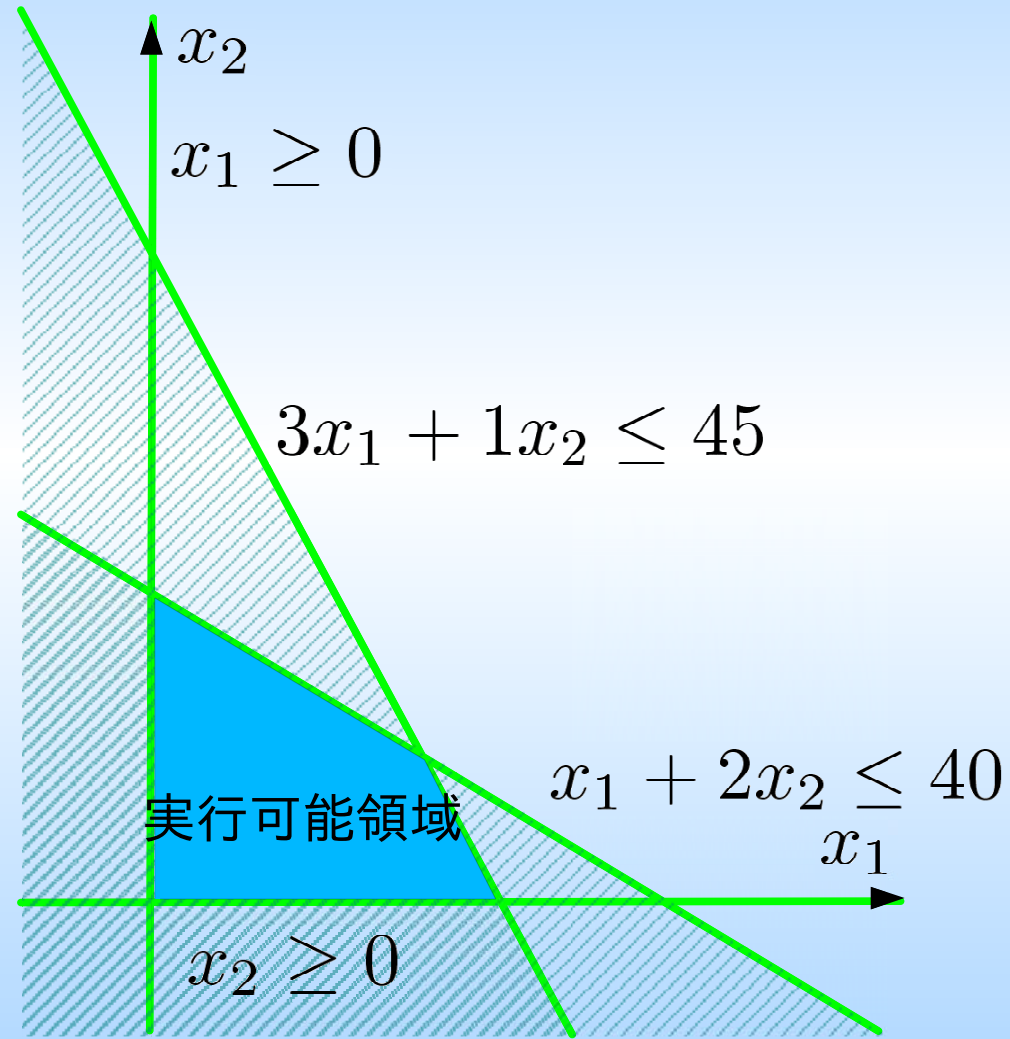
$$3x_1 + 1x_2 \leq 45$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

制約式をグラフで表現する



# グラフを利用した解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

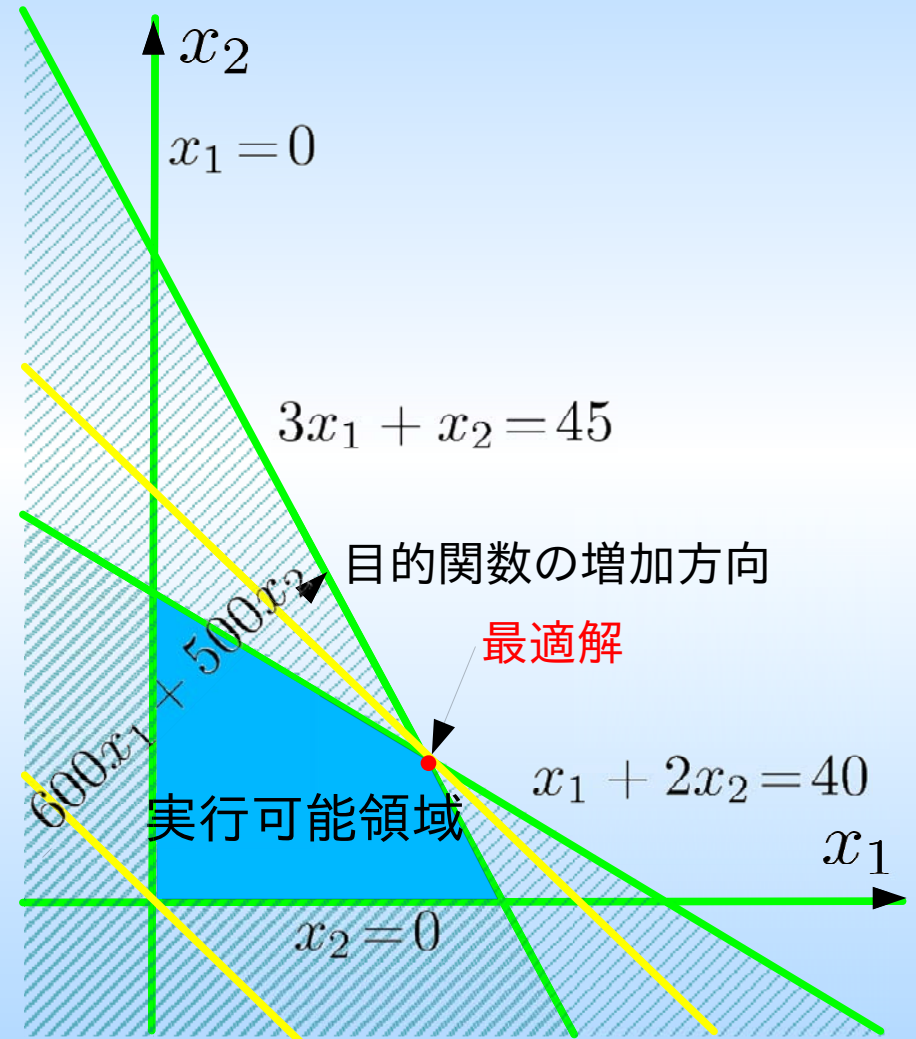
$$3x_1 + 1x_2 \leq 45$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

制約式をグラフで表現する  
目的関数をグラフで表現する



## グラフを利用した解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

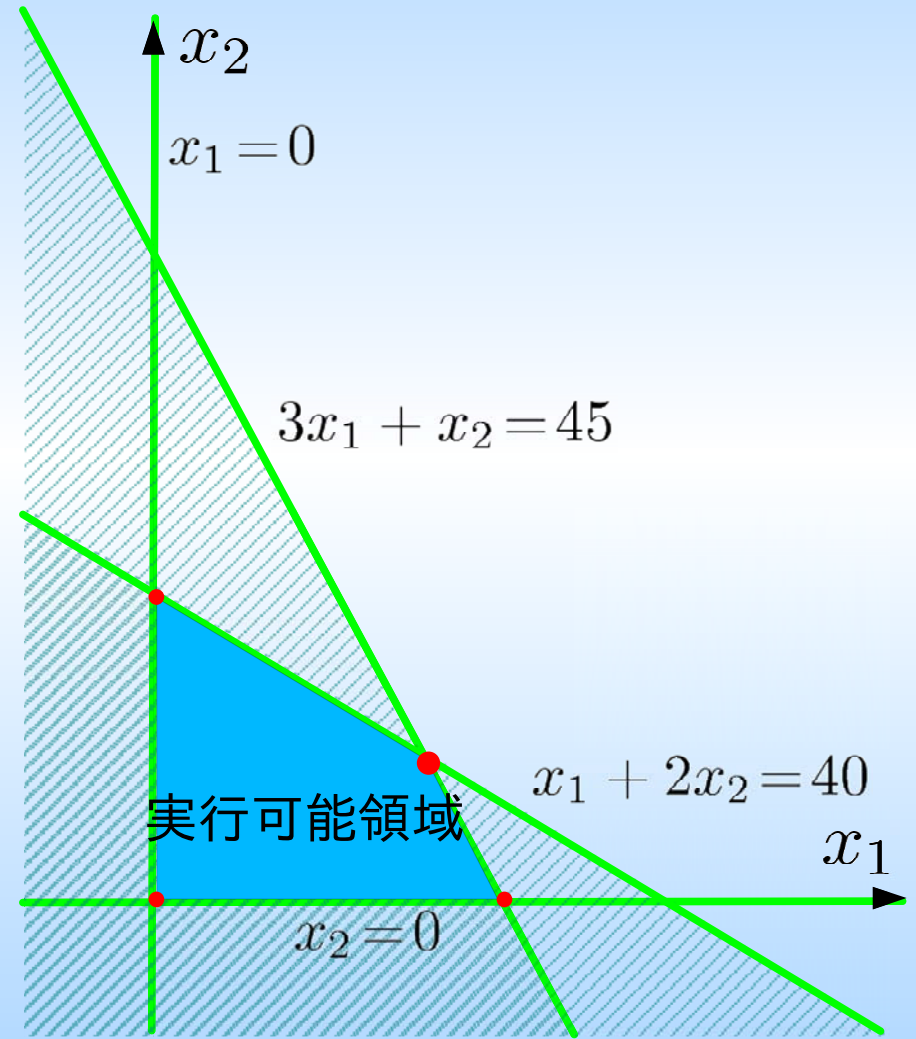
$$3x_1 + 1x_2 \leq 45$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

制約式をグラフで表現する  
目的関数をグラフで表現する  
線形計画問題の最適解は  
実行可能領域の端点の一つ





# グラフを利用した解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

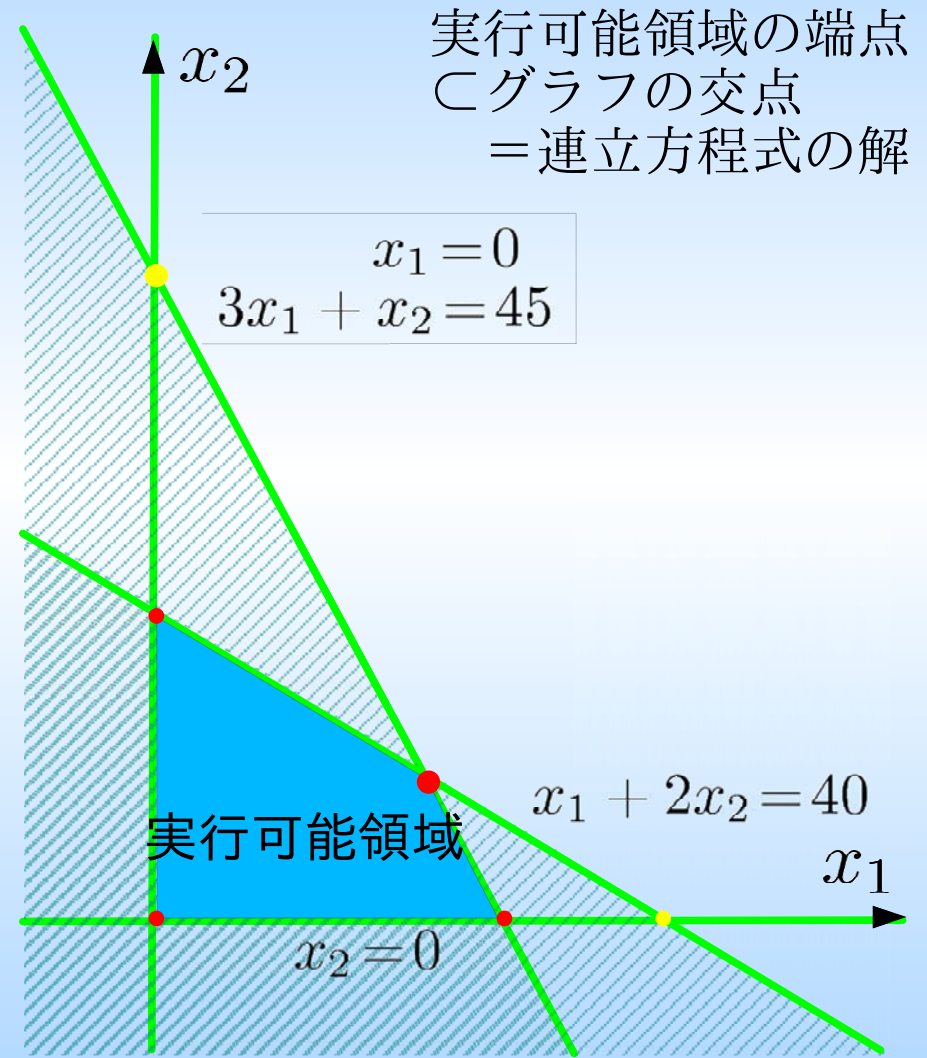
制約式に対応する方程式

$$3x_1 + 1x_2 = 45$$

$$x_1 + 2x_2 = 40$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$





## グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

方程式	$x_1$	$x_2$	目的関数値	実行可能？
①②	10	15	¥13,500	○
①③	0	45		×
①④	15	0	¥9,000	○
②③	0	20	¥10,000	○
②④	40	0		×
③④	0	0	¥0	○

制約式に対応する方程式

$$\textcircled{1} \quad 3x_1 + 1x_2 = 45$$

$$\textcircled{2} \quad x_1 + 2x_2 = 40$$

$$\textcircled{3} \quad x_1 = 0$$

$$\textcircled{4} \quad x_2 = 0$$

- 制約式に対応する方程式を書き出す
- 全組合せの連立方程式で交点を求める
- 交点の実行可能領域にあることを確認する
- 実行可能な交点での最大の目的関数値を探す

見つかった交点が最適解

# 線形計画問題の素朴な解法

## グラフを用いた解法

- 

- 

## 交点を総当たりする解法

- 

- 

- 

次回：線形計画問題の標準形  
次々回：単体法

## 演習問題

A4用紙を横にを使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

### コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の  
1日当り生産量は？

課題1： maximize ... subject to ... の形式で  
線形計画問題を表現しなさい。

課題2： グラフを用いる解法・交点を総当たりする解法で最適解を  
求めなさい。

