

# 数理計画法

## 第2回：線形計画問題の標準形

# 復習

数理計画法 = 数理計画問題 - 問題 + 法

## 数理計画問題

maximize  $z = f(x_1, \dots, x_n)$   
subject to  $g(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (x_1, \dots, x_n)^T \in X$

与えられた制約式のもとである関数を最大化する問題

## 線形計画問題

$f(x_1, \dots, x_n)$  や  $g(x_1, \dots, x_n)$  が線形な場合

線形計画法 = 線形計画問題 - 問題 + 法

グラフを利用した解法

グラフの交点を総当たりする解法

## 演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

### コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の  
1日当り生産量は？

課題1： maximize ... subject to ... の形式で  
線形計画問題を表現しなさい。

課題2： グラフを用いる解法・交点を総当たりする解法で最適解を  
求めなさい。

## グラフを利用した解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800$$

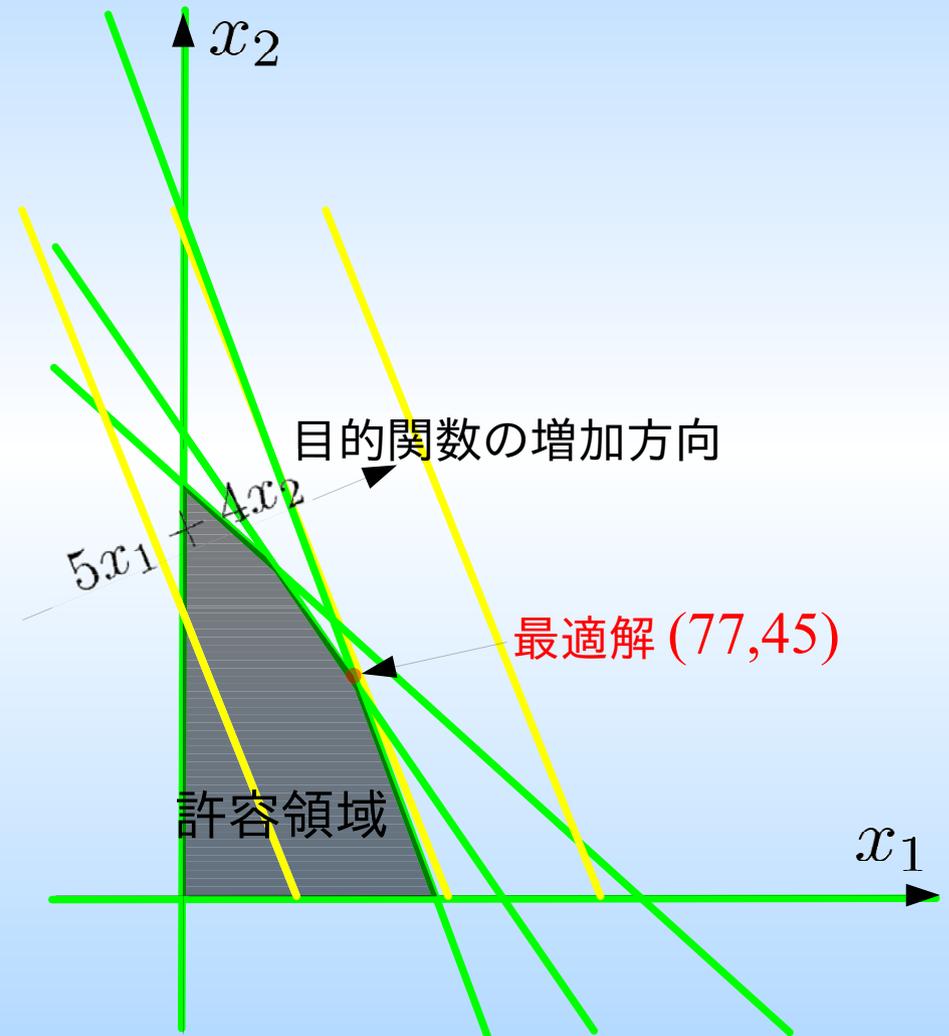
$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

最適解：コーヒ飲料 77kg

コーヒ牛乳 45kg

最適値：565千円



## グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$\textcircled{1} \quad 15x_1 + 11x_2 = 1650$$

$$\textcircled{2} \quad 10x_1 + 14x_2 = 1400$$

$$\textcircled{3} \quad 9x_1 + 20x_2 = 1800$$

$$\textcircled{4} \quad x_1 = 0$$

$$\textcircled{5} \quad x_2 = 0$$

方程式	$x_1$	$x_2$	目的関数値	実行可能?
①②	77	45	565	○
①③				×
①④				×
①⑤	110	0	550	○
②③	1400/37	2700/37	110.81	○
②④				×
②⑤				×
③④	0	90	360	○
③⑤				×
④⑤	0	0	0	○

線形計画問題の素朴な解法  
グラフを用いた解法

- 
- 

交点を総当たりする解法

- 
- 
- 

## 数理計画法

第2回:線形計画問題の標準形

# 線形計画問題の不等式標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は左辺が大きい不等式
- 全ての変数は非負

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

minimize

$$-5x_1 - 4x_2$$

subject to

$$-15x_1 - 11x_2 \geq -1650$$

$$-10x_1 - 14x_2 \geq -1400$$

$$-9x_1 - 20x_2 \geq -1800$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

演習1課題1

不等式標準形

# 全ての線形計画問題は標準形で表現できる

- 目的関数は最小化される
- 制約式は左辺が大きい不等式
- 全ての変数は非負

両辺を  $-1$ 倍して、

- 最小化問題に変形する

$$\text{maximize } 5x_1 + 4x_2 \quad \text{minimize } -5x_1 - 4x_2$$

- 不等号の向きを揃える

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \quad -9x_1 - 20x_2 \geq -1800$$

等式制約を2つの不等式制約に置き換える

$$x_1 + x_2 = 0 \quad x_1 + x_2 \geq 0, -x_1 - x_2 \geq 0$$

自由変数を2つの非負変数の差に置き換える

$$x = x_1 - x_2 \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

# 線形計画問題の等式標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は右辺が非負の等式
- 全ての変数は非負

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

minimize

$$-5x_1 - 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 + x_3 = 1650$$

$$10x_1 + 14x_2 + x_4 = 1400$$

$$9x_1 + 20x_2 + x_5 = 1800$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

演習1課題1

等式標準形

# 全ての線形計画問題は標準形で表現できる

- 目的関数は最小化される
- 制約式は右辺が非負の等式
- 全ての変数は非負

不等式標準形で用いた変形に加えて、

変数を追加して不等式制約を等式制約(と追加した変数の非負条件)に置き換える

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \quad 9x_1 + 20x_2 + x_3 = 1800$$
$$x_3 \geq 0$$

$$9x_1 + 20x_2 \geq 1800 \quad 9x_1 + 20x_2 - x_4 = 1800$$
$$x_4 \geq 0$$

※元の不等式の成否は追加された変数の非負条件に対応する。

※ $x_3$ をslack変数、 $x_4$ をsurplus変数と呼ぶこともある。

## 等式標準形のもとでの総当たり解法

minimize

$$-5x_1 - 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 + x_3 = 1650$$

$$10x_1 + 14x_2 + x_4 = 1400$$

$$9x_1 + 20x_2 + x_5 = 1800$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

等式標準形

- 3つの方程式によって定めることのできる3つの変数を選ぶ。
- 対応する連立方程式を解き、変数の値を定める。

$x_1, x_2, x_3$  であれば、

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650 \\ 10x_1 + 14x_2 &= 1400 \\ 9x_1 + 20x_2 &= 1800 \end{aligned}$$

$$x_1 = 1400/37$$

$$x_2 = 2700/37$$

$$x_3 = 10350/37$$

## 等式標準形のもとでの総当たり解法

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

x1	x2	x3	x4	x5	条件	目的関数
		1650	1400	1800		0
	150		-700	-1200	×	
	100	550		-200	×	
	90	660	140			360
110			300	810		550
140		-450		540	×	
200		-1350	-600		×	
77	45			207		565
4400/67	4050/67		-6900/67		×	
1400/37	2700/37	10350/37				17800/37

※元の不等式制約には変数の非負条件が対応するので、  
 全ての変数が非負の場合だけを考えれば良い

## 線形計画問題の標準形

### 等式標準形にもとづく総当たりによる解法

- 等式制約と変数の数に対応して、  
      全ての組み合わせの連立方程式を解く
- 変数の非負条件を満たす解について目的関数を求める
- 最小(最大)の目的関数値を与える解が最適解となる。

### 問題点、

- ・ 連立方程式の組み合わせ数が爆発的に増加する
- ・ 不必要な連立方程式も解く必要がある

次回：単体法

次々回：巡回と最小添字規則

## 演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

### ミックスジュース生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題：利益を最大化する2種類のミックスジュースの生産量は？

課題1： 対応する線形計画問題の不等式標準形を示しなさい。

課題2： 不等式標準形を等式標準形に書換えなさい。

課題3： 総当たりによる解法を用いて最適解を求めなさい。