数理計画法

第3回：単体法(simplex method)

復習

線形計画問題の不等式標準形
- 目的関数は最小化される
- 制約式は左辺が大きい不等式
- 全ての変数は非負

線形計画問題の等式標準形
- 目的関数は最小化される
- 制約式は右辺が非負の等式
- 全ての変数は非負

全ての線形計画問題は標準形で表現できる

- 両辺を -1倍して、最大化問題を最小化問題に変形する
- 〃 不等号の向きを揃える
- 一つの等式制約を2つの不等式制約に置き換える

$x_1 + x_2 = 0 \qquad x_1 + x_2 \geq 0, -x_1 - x_2 \geq 0$

- 一つの自由変数を2つの非負変数に置き換える

$x = x_1 - x_2 \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

- 非負変数を追加して不等式制約を等式制約に置き換える

$x_1 + x_2 \leq 1 \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_3 \geq 0$

$x_1 + x_2 \geq 1 \qquad x_1 + x_2 - x_3 = 1, \quad x_3 \geq 0$

復習

等式標準形にもとづく総当たりによる解法

•等式制約と変数の数に対応して、
全ての組み合わせの連立方程式を解く
•変数の非負条件を満たす解について目的関数を求める
•最小（最大）の目的関数値を与える解が最適解となる。

問題点、

・連立方程式の組み合わせ数が爆発的に増加する
・不必要な連立方程式も解く必要がある

第3回：単体法(simplex method)

演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

ミックスジュース生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題：利益を最大化する2種類のミックスジュースの生産量は？

課題1： 対応する線形計画問題の不等式標準形を示しなさい。

課題2： 不等式標準形を等式標準形に書換えなさい。

課題3： 総当たりによる解法を用いて最適解を求めなさい。

演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

ミックスジュース生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題：利益を最大化する2種類のミックスジュースの生産量は？

課題1： 対応する線形計画問題の不等式標準形を示しなさい。

maximize
$$z = 600x_1 + 500x_2$$
subject to
$$3x_1 + 1x_2 \leq 45000$$
$$1x_1 + 2x_2 \leq 40000$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

ミックスジュース生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題：利益を最大化する2種類のミックスジュースの生産量は？

課題2： 不等式標準形を等式標準形に書換えなさい。

maximize

$$z = 600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 + x_3 = 45000$$
$$1x_1 + 2x_2 + x_4 = 40000$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

演習問題

課題3： 総当たりによる解法を用いて最適解を求めなさい。

maximize

$$z = 600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 \qquad\quad &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 \qquad\quad + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

① $\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 &= 40000 \end{aligned}$ ④ $\begin{aligned} 1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\ 2x_2 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$

② $\begin{aligned} 3x_1 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$ ⑤ $\begin{aligned} 1x_2 + 0x_4 &= 45000 \\ 2x_2 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$

③ $\begin{aligned} 3x_1 + 0x_4 &= 45000 \\ 1x_1 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$ ⑥ $\begin{aligned} 1x_3 + 0x_4 &= 45000 \\ 0x_3 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$

演習問題

課題3： 総当たりによる解法を用いて最適解を求めなさい。

maximize

$$z = 600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 & & = 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 & + 1x_4 & = 40000 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

① $x_1 = 10000$, $x_2 = 15000$

② $\cancel{x_1 = 40000}$, $\cancel{x_3 = -75000}$

③ $x_1 = 15000$, $x_4 = 25000$

④ $x_2 = 20000$, $x_3 = 25000$

⑤ $\cancel{x_2 = 45000}$, $\cancel{x_4 = -50000}$

⑥ $x_3 = 45000$, $x_4 = 40000$

演習問題

課題3： 総当たりによる解法を用いて最適解を求めなさい。

maximize

$$z = 600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 \qquad\qquad &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

① $\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 10000 \\ x_2 &= 15000 \\ z &= 13{,}500{,}000 \end{aligned}}$

④ $x_2 = 20000$
$x_3 = 25000$
$z = 10{,}000{,}000$

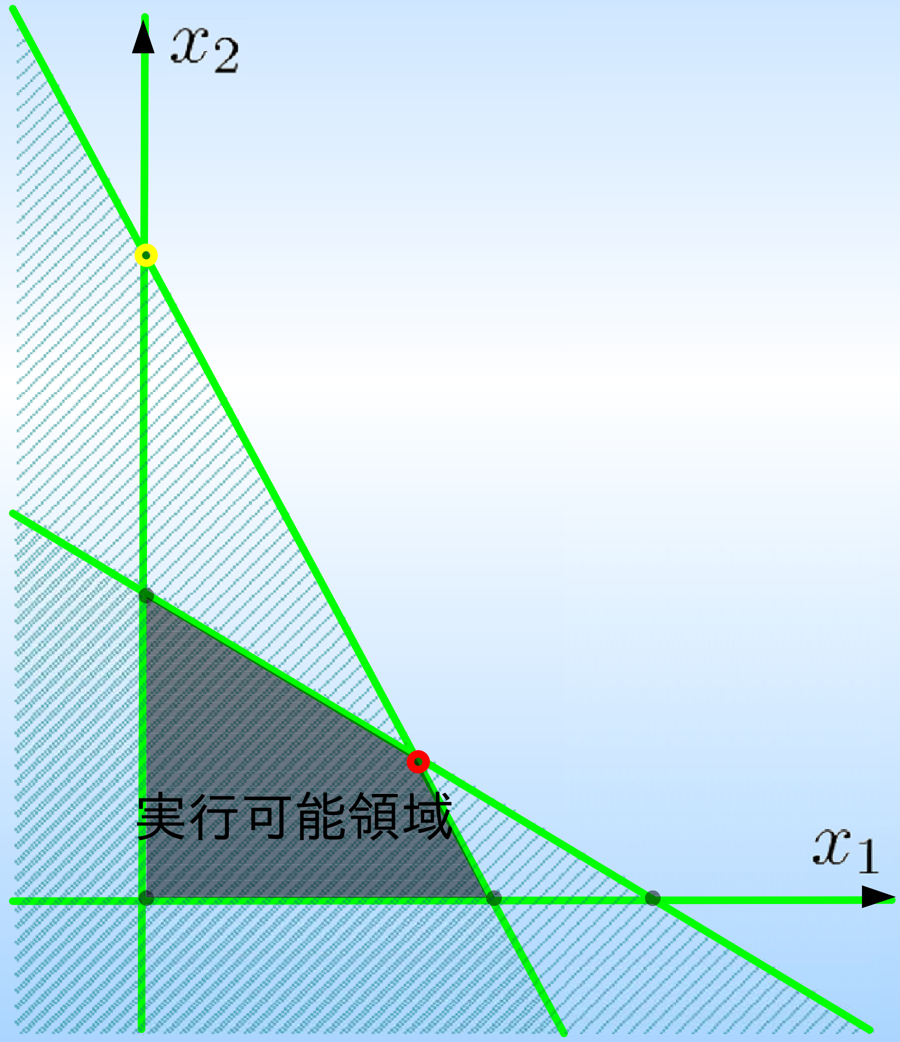
③ $x_1 = 15000$
$x_4 = 25000$
$z = 8{,}000{,}000$

⑥ $x_3 = 45000$
$x_4 = 40000$
$z = 0$

等式標準形にもとづく総当たりによる解法の問題点

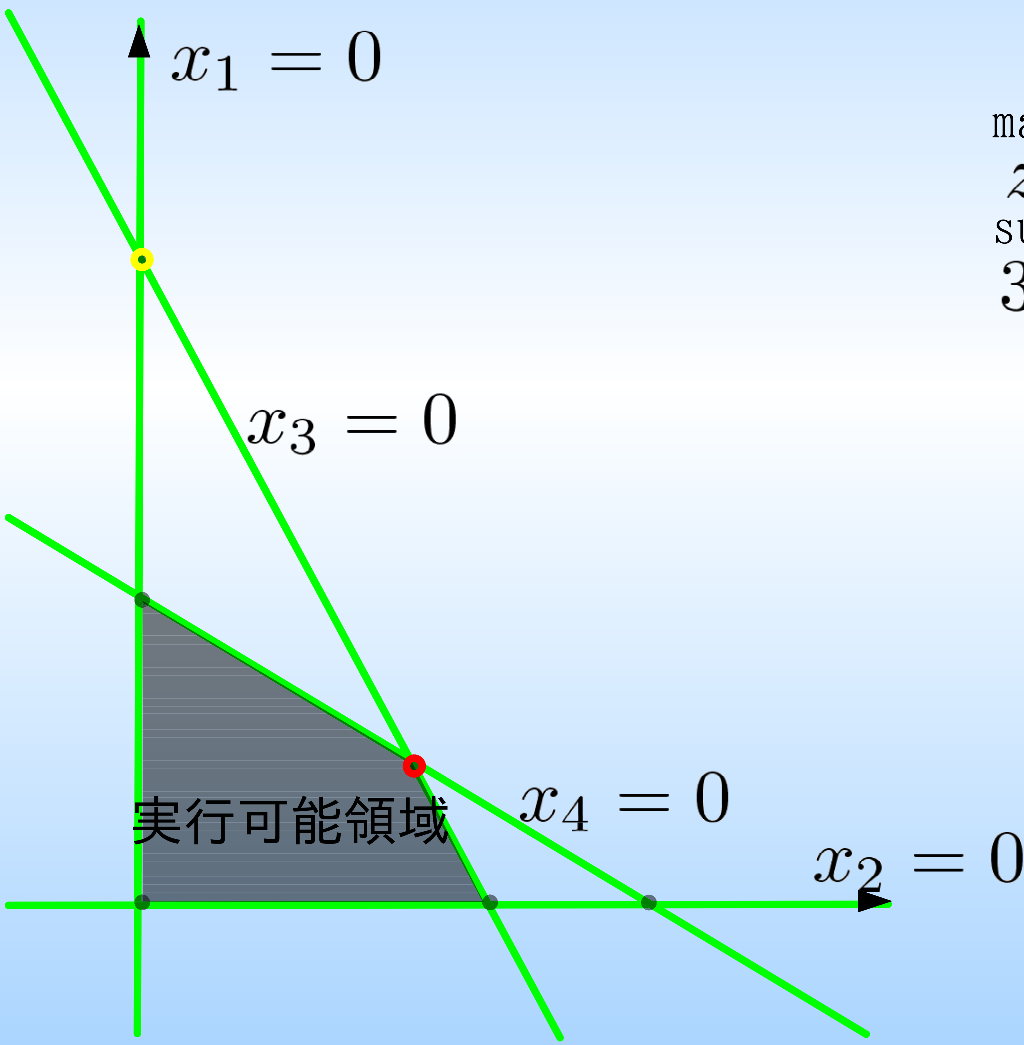
・連立方程式の組み合わせ数が爆発的に増加する

・不必要な連立方程式も解く必要がある



等式標準形にもとづく総当たりによる解法の問題点

・連立方程式の組み合わせ数が爆発的に増加する
・不必要な連立方程式も解く必要がある



maximize

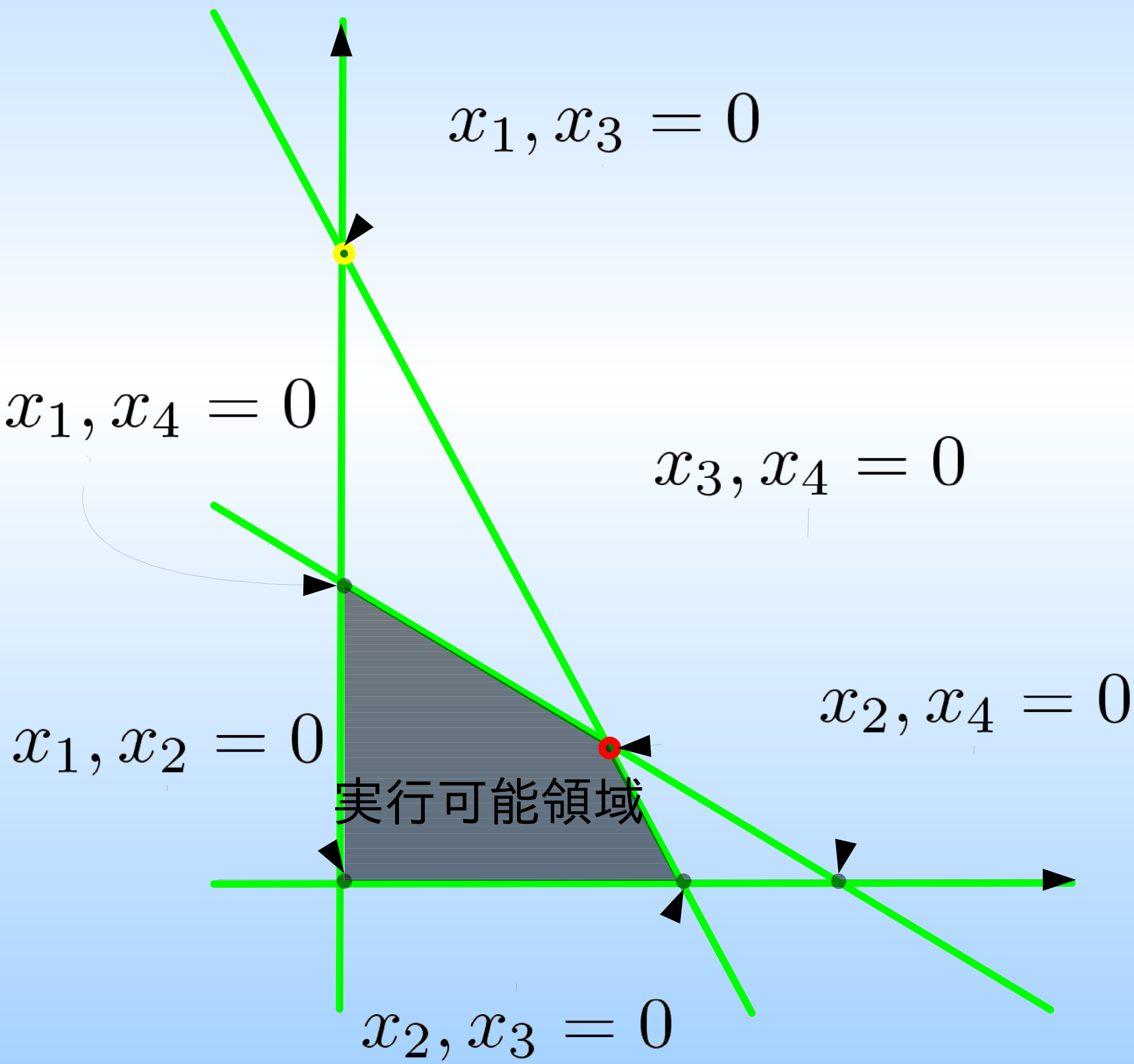
$$z = 600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45000$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 40000$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

等式標準形にもとづく総当たりによる解法の問題点

・連立方程式の組み合わせ数が爆発的に増加する
・不必要な連立方程式も解く必要がある



maximize

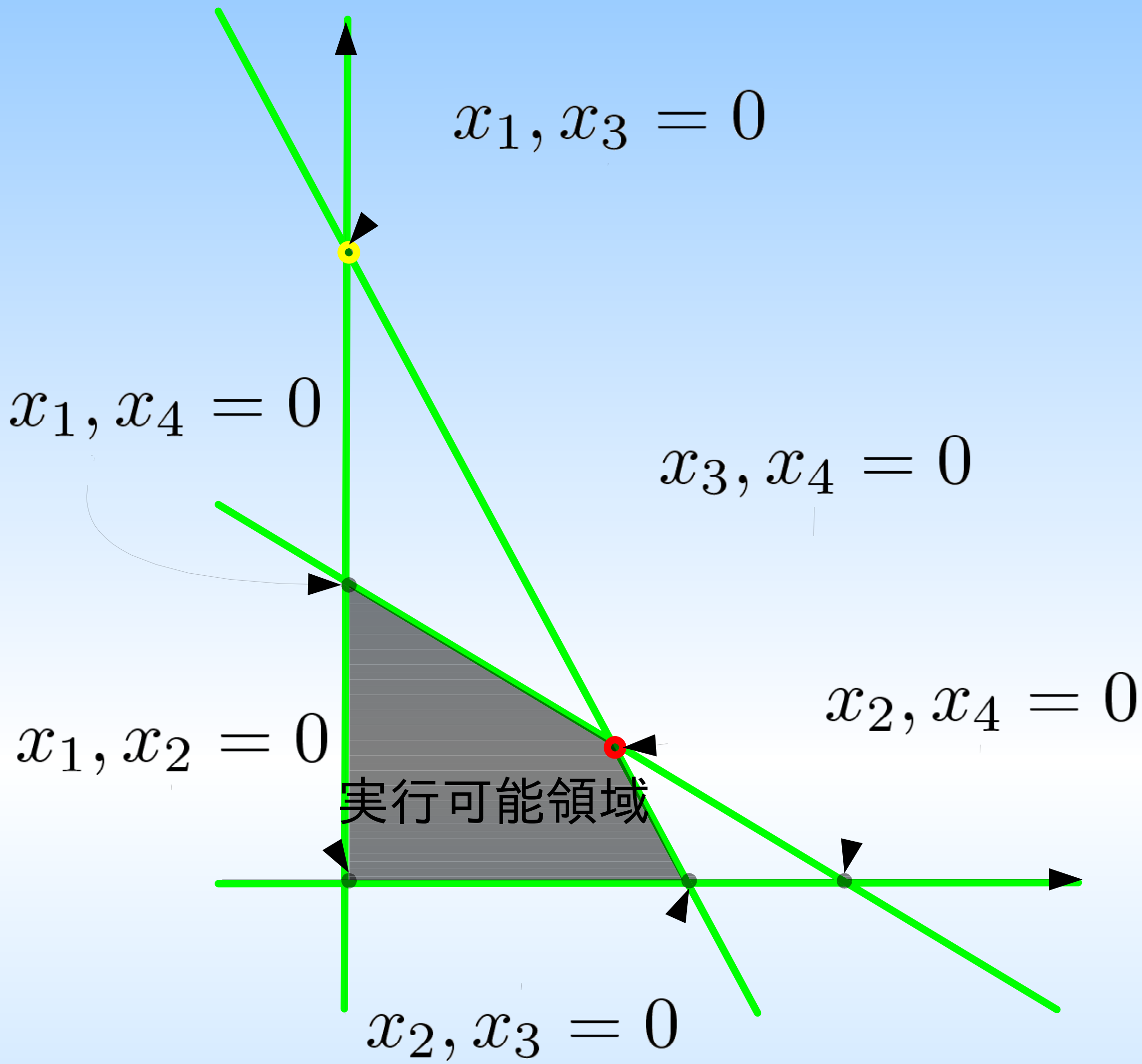
$$z = 600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45000$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 40000$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

実行可能領域の端点だけ
目的関数値を改善する端点だけ

を辿りたい。



maximize

$$z = 600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45000$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 40000$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

実行可能領域の端点だけ
目的関数値を改善する端点だけ

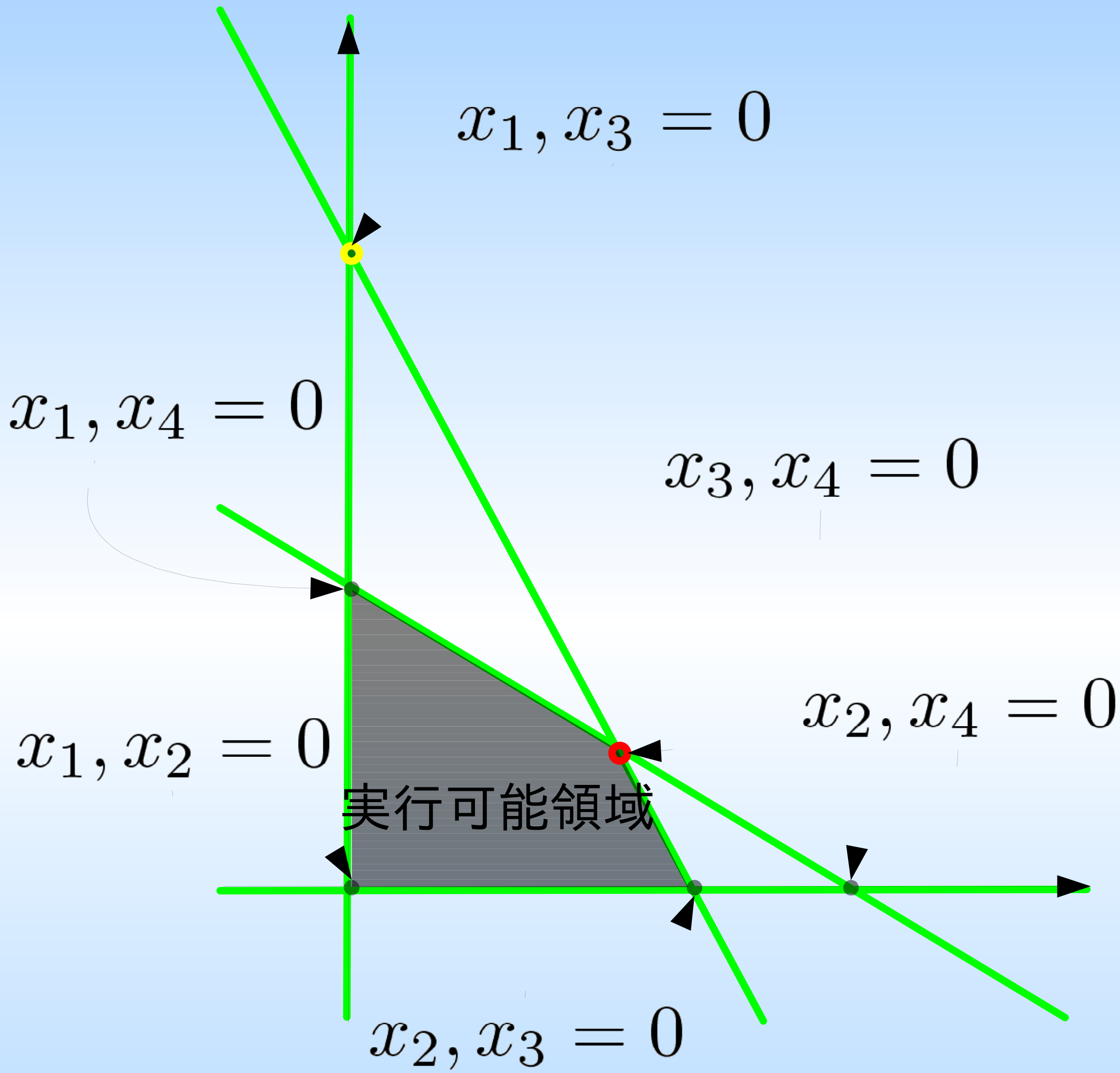
を辿りたい。

選択した連立方程式の変数
＝基底変数、
ゼロにして無視した変数
＝非基底変数解
選択した連立方程式の解
＝基本解

実行可能領域の
目的関数値を改善する
隣接端点を順番に辿る。

基本解が非負条件を満たす
z を増加する
基底・非基底変数を一つずつ入れ替える

単体法(simplex method)



① z を非負変数として制約式を示す

maximize

$$z(= 600x_1 + 500x_2)$$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 45000 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 40000 \\ z - 600x_1 - 500x_2 &= 0 \\ z, x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

② z の式を含み非負制約を満たす基本解を解とする連立方程式を選ぶ

基底変数:z, x_3, x_4 非基底変数: x_1, x_2

基本解: (z, x_1, x_2, x_3, x_4)

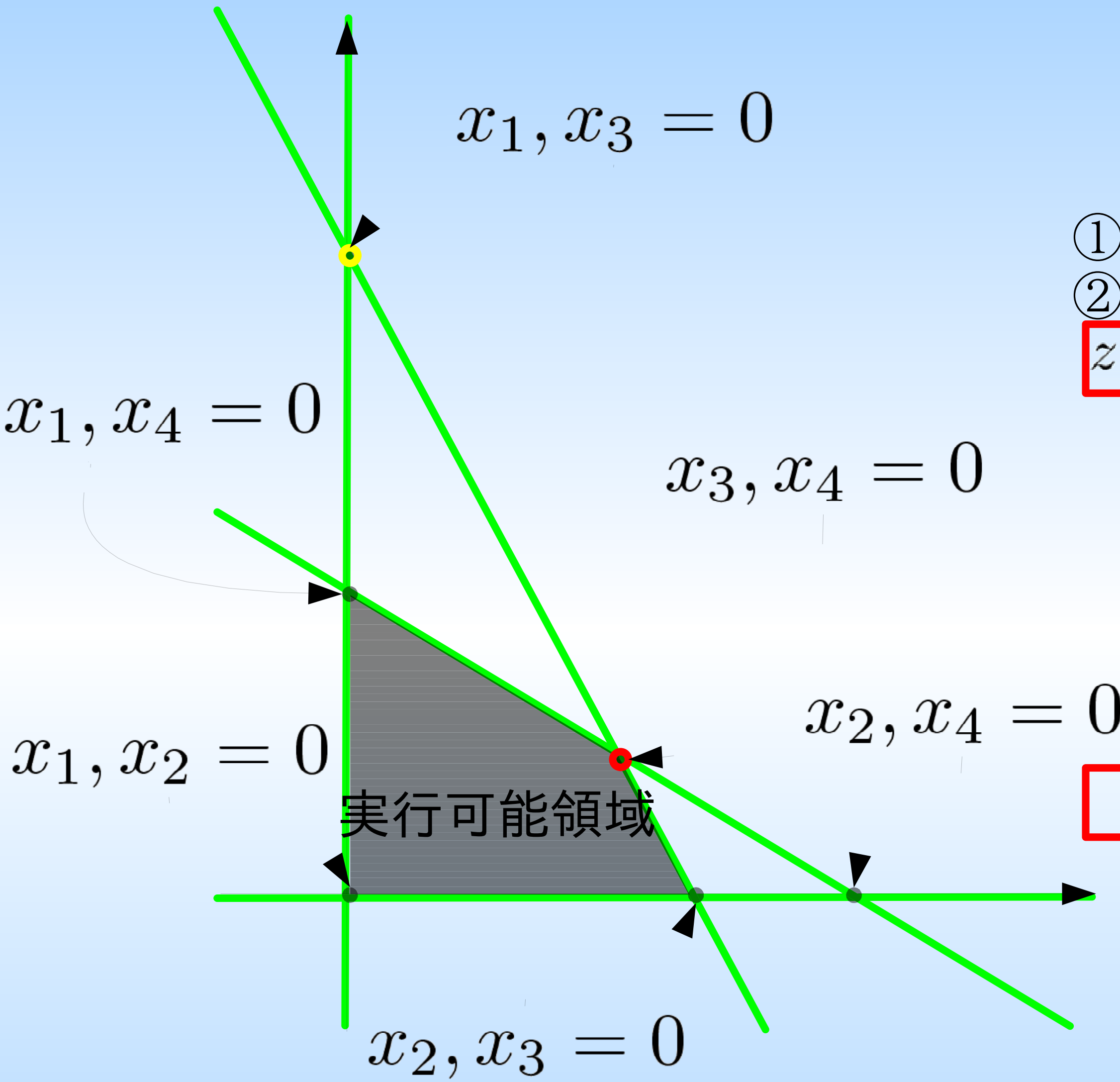
$$= (0, 0, 0, 45000, 40000)$$

③次の条件を満たす基底・非基底変数1つずつの交換対を探す

•交換後の基本解が非負条件を満たす
•交換により z が増加する

④条件を満たす組合せが見つからなくなるまで③を繰り返す

単体法(simplex method)



変数の選択方法繰り返す

非基底変数

$$
\begin{array}{lrrrrl}
① & 3x_1 + & x_2 & + x_3 & & = 45000 \\
② & x_1 + & x_2 & & + x_4 & = 40000 \\
& z - 600x_1 - & 500x_2 & & & = 0
\end{array}
$$

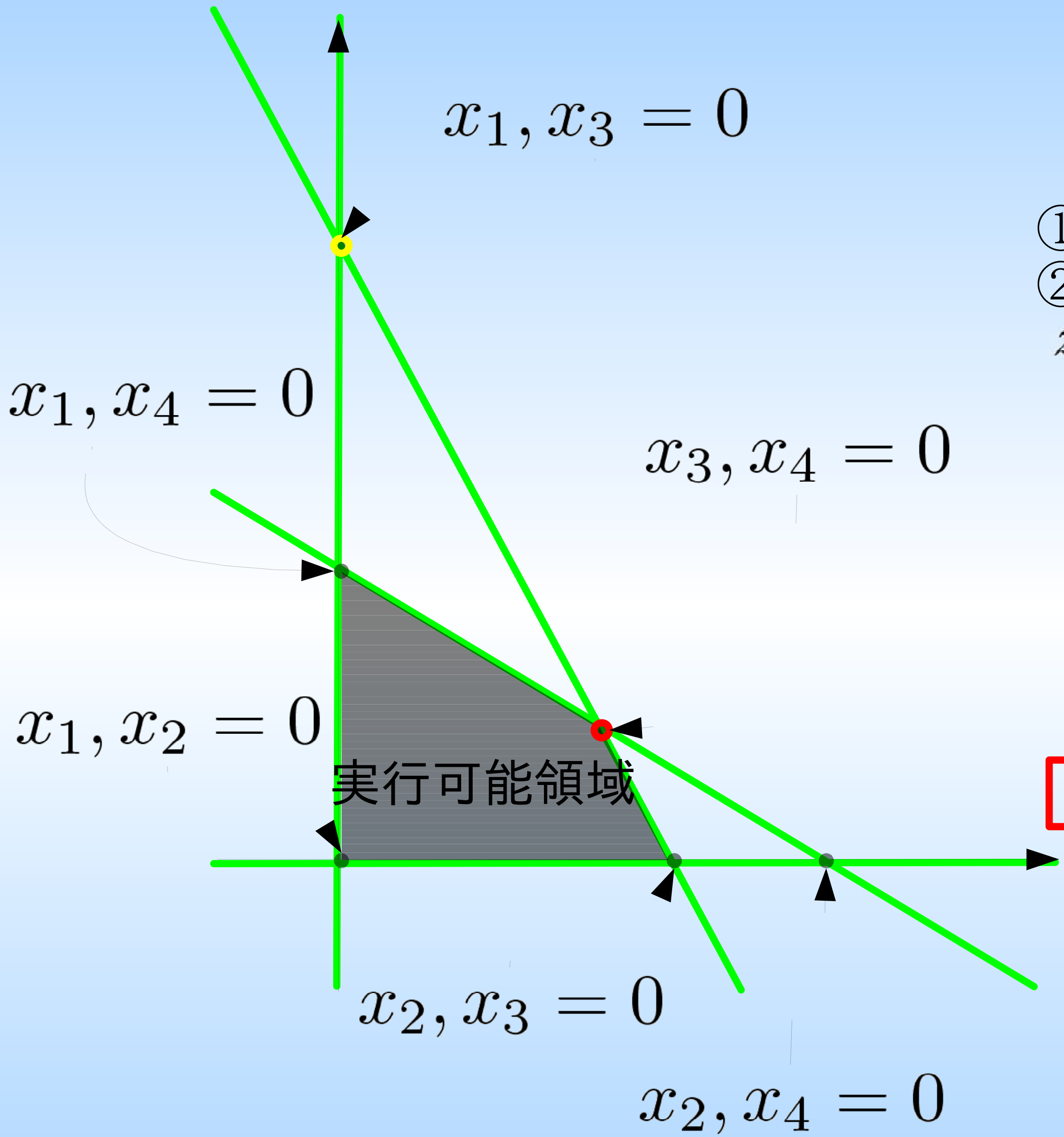
連立方程式は対角化して解いてしまう。
(今回はたまたま、変形の必要が無かった)

交換する変数を探す。
非基底変数→基底変数:
x_1でも、x_2でも、z は増加
①式での x_1 の増加上限 15000
②式での x_1 の増加上限 40000

①式での x_2の増加上限 45000
②式での x_2の増加上限 40000

x_1を基底変数、x_3を非基底変数にする

単体法(simplex method)



変数の選択方法繰り返す

非基底変数

$$
\begin{array}{lrl}
① & 3x_1 + x_2 + x_3 & = 45000 \\
② & x_1 + x_2 + x_4 & = 40000 \\
 & z - 600x_1 - 500x_2 & = 0
\end{array}
$$

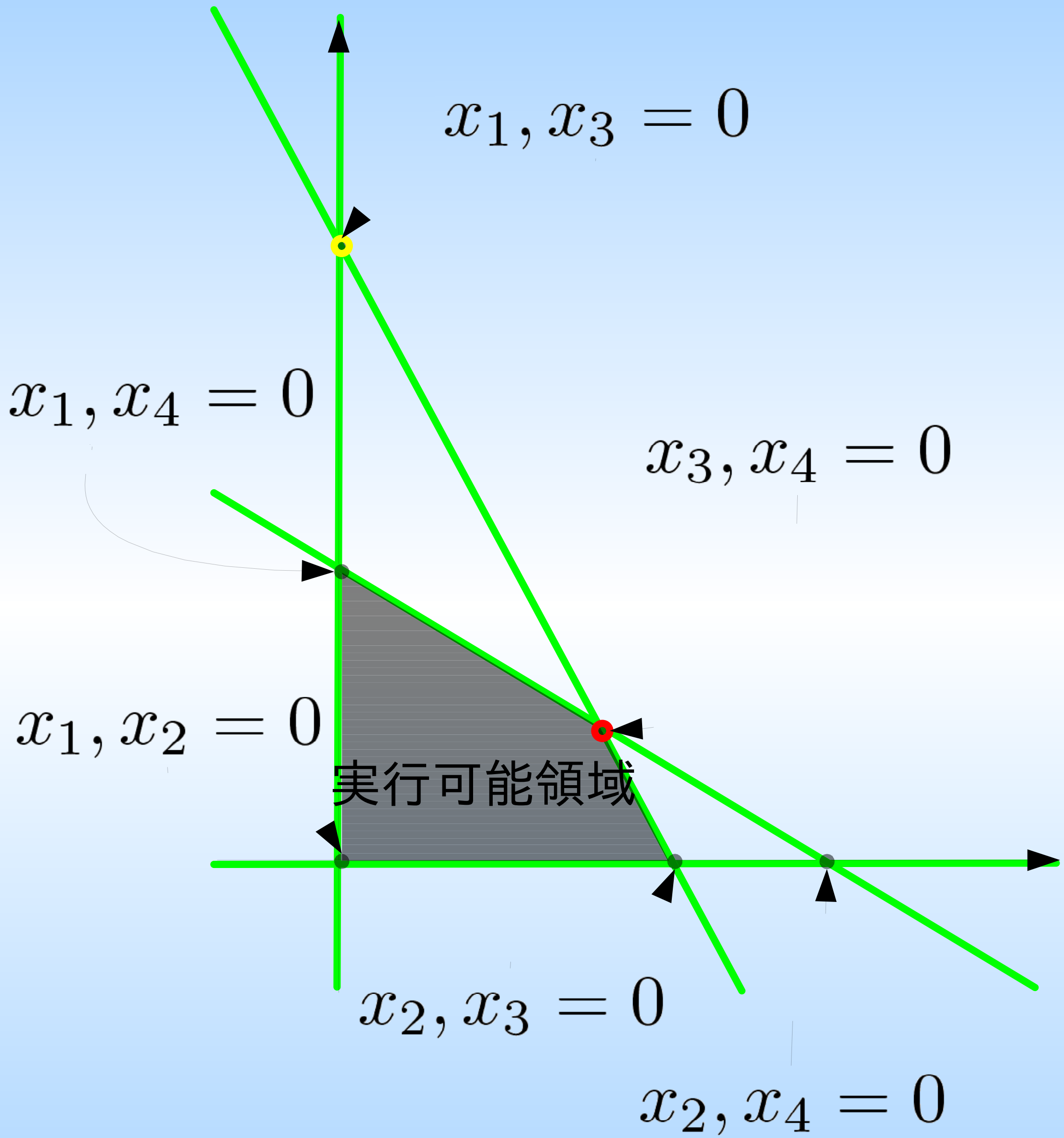
連立方程式は対角化して解いてしまう。

$$
\begin{array}{l}
x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 15000 \\
\frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + x_4 = 25000 \\
\boxed{z - 300x_2 + 200x_3 = 9 \times 10^6}
\end{array}
$$

交換する変数を探す。
非基底変数→基底変数:
z は x_2 で増加、x_3 で減少

x_2 を基底変数に、x_4 を非基底変数にする

単体法(simplex method)



変数の選択方法繰り返す

非基底変数

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad + \frac{1}{3}x_2 \quad + \frac{1}{3}x_3 \quad &= 15000 \\
\frac{2}{3}x_2 \quad - \frac{1}{3}x_3 + x_4 &= 25000 \\
z \quad - 300x_2 + 200x_3 \quad &= 9 \times 10^6
\end{aligned}
$$

連立方程式は対角化して解いてしまう。

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 &= 2500 \\
x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 &= 37500 \\
z \quad +50x_3 + 450x_4 &= 20250000
\end{aligned}
$$

交換する変数を探す。
非基底変数→基底変数:
z はx_3でも、x_4でも減少

今の基本解が最適解

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximiaze} & z(=600x_1+500x_2) \\
\text{subject to} & 3x_1+x_2+x_3=45000 \\
& x_1+x_2+x_4=40000 \\
& z-600x_1-500x_2=0 \\
& z,x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0
\end{array}
$$

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45000	
0	1	1	0	1	40000	
1	-600	-500	0	0	0	

↓

非基底変数　基本解

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45000	
0	1	1	0	1	40000	
1	-600	-500	0	0	0	

全ての変数が非負（非基底変数はゼロ）なので、基本解は実行可能解

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45000	
0	1	1	0	1	40000	
1	-600	-500	0	0	0	

↓

非基底変数　　基本解

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45000	
0	1	1	0	1	40000	
1	$\boxed{-600}$	$\boxed{-500}$	0	0	0	

目的関数が速く増加する変数を新しい基底変数に選ぶ

↓

非基底変数　　基本解

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45000	15000
0	1	1	0	1	40000	40000
1	-600	-500	0	0	0	

新しい基底変数の最大増加量を求め最も小さい増加量の式を選ぶ

↓

非基底変数　　　　　　基本解

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	$\boxed{1}$	0	45000	15000
0	1	1	0	1	40000	40000
1	-600	-500	0	0	0	

新しい非基底変数を定め、連立方程式を解く

↓

非基底変数　　　　基本解

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
×1－	0	1	1/3	1/3	0	15000	
	0	1	1	0	1	40000	
×600＋	1	-600	-500	0	0	0	

↓

非基底変数　　　　基本解

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	2/3	- 1/3	1	25000	
1	0	$\boxed{-300}$	200	0	9000000	

目的関数が増加する変数を新しい基底変数に選ぶ

↓

非基底変数　　　　基本解

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	1	1	0	1	40000	
1	-600	-500	0	0	0	

×1−

×600＋

↓

非基底変数　　　　基本解

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	2/3	- 1/3	$\boxed{1}$	25000	
1	0	-300	200	0	9000000	

新しい非基底変数を定め、連立方程式を解く

↓

非基底変数　基本解

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	1	- 1/2	1.5	37500	
1	0	-300	200	0	9000000	

×1/3−

×300＋

↓

非基底変数　基本解

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	2/3	- 1/3	$\boxed{1}$	25000	
1	0	-300	200	0	9000000	

新しい非基底変数を定め、連立方程式を解く

↓

非基底変数　基本解

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	1	- 1/2	1.5	37500	
1	0	-300	200	0	9000000	

×1/3－

×300＋

↓

非基底変数　基本解

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	0	1/2	0	2500	
0	0	1	- 1/2	1.5	37500	
1	0	0	50	450	20250000	

これ以上目的関数を改善できなくなれば、最適解が求まっている

単体法(simplex method)

最も基本的な単体法による解法

•目的関数を変数として含む制約式を構成する、
•実行可能解を基本解とする連立方程式を与えるような
基底変数と非基底変数を選ぶ、
•目的関数を増加する新しい基底変数の候補を選ぶ、
•新しい基底変数の最大増加量を小さくするような
新しい非基底変数の候補を選ぶ、
•基底変数･非基底変数の交換で得た連立方程式を解く
•目的関数を増加できる限り変数の交換を繰り返す、
•目的関数を改善できなくなったら最適解が求まっている。

問題点、

・最初の実行可能解の選択法
・目的関数を改善できなくなる

次回：巡回と最小添字規則
次々回以降：単体法の改良

演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の
1日当り生産量は？

課題1： 単体法を用いて最適解を求めなさい。

課題2： グラフを描き、課題1で辿った端点の経路を示しなさい。