数理計画法

第5回:巡回と最小添字規則, 2段解法
(単体法がうまくいかない場合)

授業の内容・スケジュール：

第1回：数理計画問題・線形計画問題とは何か

第2回：線形計画問題の標準形

第3回：単体法

第4回：巡回と最小添字規則

~~第5回：演習~~

第6回：2段解法

第7回：改訂単体法

第8回：双対問題

第9回：双対定理，双対シンプレックス法

~~第10回：演習~~

第11回：線形計画問題と多面体

第12回：自己双対型内点法の原理

第13回：自己双対型内点法の実践

~~第14回：演習~~

第15回：期末試験

教科書:

田村明久・村松正和「最適化法」

(共立出版, 2002年, 定価2900円+税)の1章,2章を教科書に用いる.

11月28日に入荷しました。

参考書

金谷健一「これなら分かる最適化数学」

共立出版、2005年、

伊理正夫「線形計画法」

共立出版、1986年、

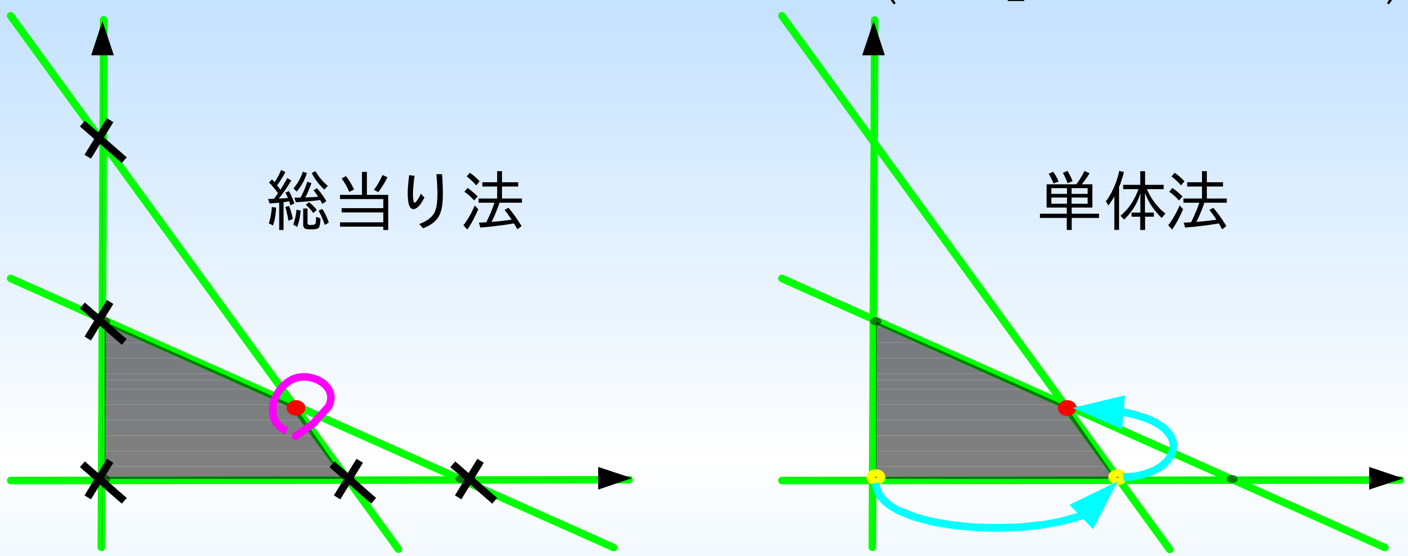
今野浩「カーマーカー特許とソフトウェア:数学は特許になるか」

中央公論社、1995年、

復習

線形計画問題の基本解法である「単体法(simplex method)」

- 原理



単体法：目的関数を最適値に近づける隣接端点を選び
実行可能領域の端点から最適解を探る方法

- 表を使った機械的(でプログラムにし易そう)な実行方法

等式標準形から simplex 表を作成し、単体法の操作を simplex 表の上で実行する。

生産に必要な原材料と利益

原材料	製品 A	製品 B	最大供給量
原料 a	3	1	6
原料 b	2	1	4
原料 c	0	1	2
利益	3円	2円	

問題：利益を最大化する製品 A、B の生産量は？

問題に対応する標準形を書き出す

不等式標準形

maximize

$$z = 3x_1 + 2x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\le 6 \\ 2x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

等式標準形

maximize

$$z$$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + \quad x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + \quad x_2 + x_4 &= 4 \\ x_2 + x_5 &= 2 \\ z - 3x_1 - 2x_2 \quad &= 0 \\ z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

等式標準形
maximize

z

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + \quad x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + \quad x_2 + x_4 &= 4 \\ x_2 + x_5 &= 2 \\ z - 3x_1 - 2x_2 \qquad &= 0 \\ z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

等式標準形に対応する simplex 表を準備する

simplex 表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺	
0	3	1	1	0	0	6	
0	2	1	0	1	0	4	
0	0	1	0	0	1	2	
1	-3	-2	0	0	0	0	

基本解として x_1, x_2 を座標軸にとった原点を考える。
→ z, x_3, x_4, x_5 を基底変数、x_1, x_2 を非基底変数とする
※ z はいつでも基底変数
※ 基本解が実行可能(＝全ての変数が非負)であることを確認する

基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数		
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺	
0	3	1	1	0	0	6	
0	2	1	0	1	0	4	
0	0	1	0	0	1	2	
1	-3	-2	0	0	0	0	

・実行可能領域の境界を辿り、目的関数を増加させる隣の基本解を探す
※ 隣の基本解→基底変数、非基底変数を1つずつ交換した基本解
・非基底変数→基底変数とした場合に目的関数を増加させる変数を選ぶ
→目的関数の制約式において負の係数を持つ変数を選ぶ

基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数		
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺	
0	3	1	1	0	0	6	
0	2	1	0	1	0	4	
0	0	1	0	0	1	2	
1	-3	-2	0	0	0	0	

・非基底変数→基底変数とした場合に目的関数を増加させる変数を選ぶ
→目的関数の制約式において負の係数を持つ変数を選ぶ
※ 複数の候補がある場合は？→一概には言えない

基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数		
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺	
0	3	1	1	0	0	6	
0	2	1	0	1	0	4	
0	0	1	0	0	1	2	
1	-3	-2	0	0	0	0	

・基底変数→非基底変数とする変数を選ぶ
※ 非基底変数となることで、基本解における変数の値は 0 となる
→その分だけ基底変数となる変数(今回は x_1)が変化する
※ 基底変数となる変数の変化量を求める

基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数		
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		x_1の増加量
0	3	1	1	0	0	6	2
0	2	1	0	1	0	4	2
0	0	1	0	0	1	2	∞？
1	-3	-2	0	0	0	0	

・新しい基底変数からなる連立方程式を解き基本解を求める
→基底変数の係数が 1 となるように掃き出し操作をする

基底変数	~~非基底変数~~ 基底変数	非基底変数	~~基底変数~~ 非基底変数	基底変数	基底変数		
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		x_1の増加量
0	3	1	1	0	0	6	2
0	2	1	0	1	0	4	2
0	0	1	0	0	1	2	∞？
1	-3	-2	0	0	0	0	

−×2
+×3

基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数		
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	3/3=1	1/3	1/3	0	0	6/3=2	
0	2	1	0	1	0	4	
0	0	1	0	0	1	2	
1	-3	-2	0	0	0	0	

基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数		
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	1	1/3	1/3	0	0	2	
0	0	1/3	-2/3	1	0	0	
0	0	1	0	0	1	2	
1	0	-1	1	0	0	6	

・新しい基底変数からなる連立方程式を解き基本解を求める
→基底変数の係数が 1 となるように掃き出し操作をする

基底変数	基底変数	~~非基底変数~~ 基底変数	非基底変数	~~基底変数~~ 非基底変数	基底変数		
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		x_2の増加量
0	1	1/3	1/3	0	0	2	6
0	0	1/3	-2/3	1	0	0	増えない？0
0	0	1	0	0	1	2	2
1	0	-1	1	0	0	6	

基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数		
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	1	0	1	-1	0	2	
0	0	1	-2	3	0	0	
0	0	0	2	-3	1	2	
1	0	0	-1	3	0	6	

−×1/3

−×1

+×1

増えない

最適解ではない

・新しい基底変数からなる連立方程式を解き基本解を求める
→基底変数の係数が 1 となるように掃き出し操作をする

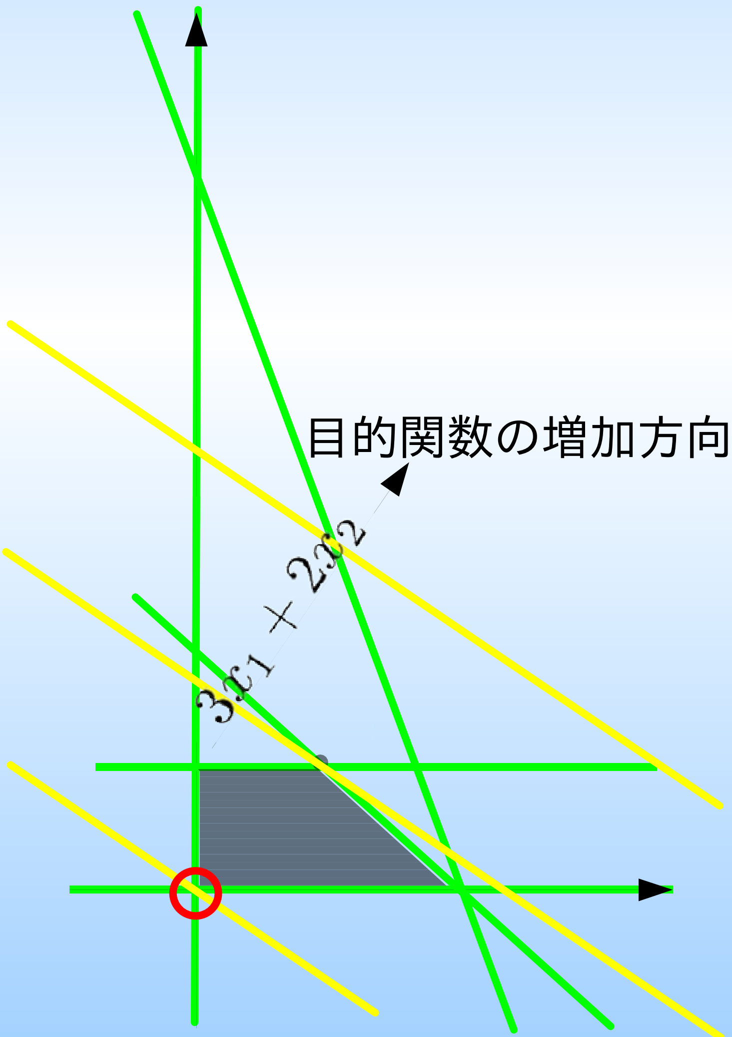
基底変数	基底変数	基底変数	基底変数 ~~非基底変数~~	非基底変数	非基底変数 ~~基底変数~~		
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		x_2の増加量
0	1	0	1	-1	0	2	2
0	0	1	-2	3	0	0	0
0	0	0	2	-3	1	2	1
1	0	0	-1	3	0	6	

−×1
+×2
+×1

基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数		
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	1	0	0	½	½	1	
0	0	1	0	0	1	2	
0	0	0	1	-3/2	½	1	
1	0	0	0	0	1	8	

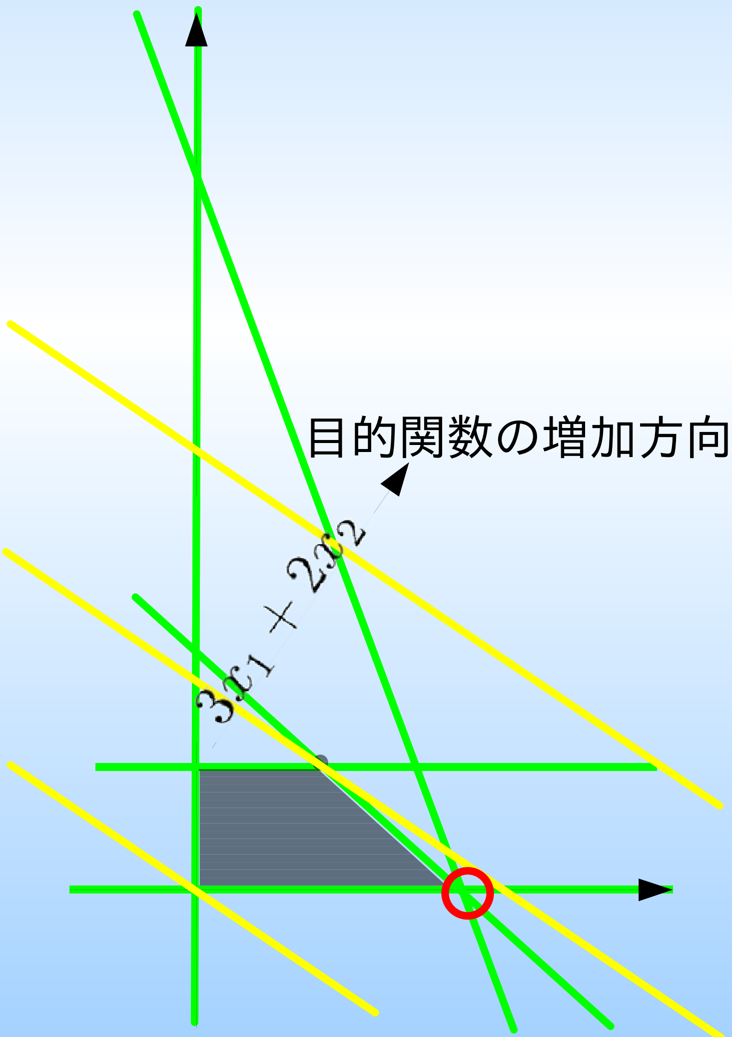
最適解

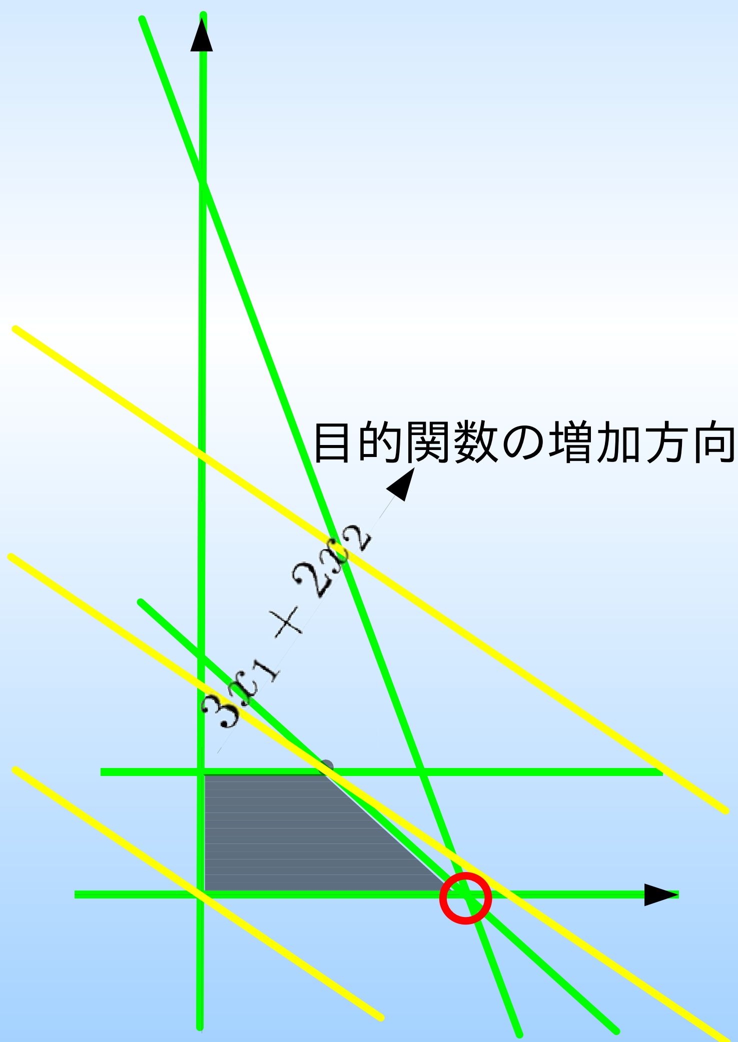
基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺
0	3	1	1	0	0	6
0	2	1	0	1	0	4
0	0	1	0	0	1	2
1	-3	-2	0	0	0	0



基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺
0	3	1	1	0	0	6
0	2	1	0	1	0	4
0	0	1	0	0	1	2
1	-3	-2	0	0	0	0

基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	1	1/3	1/3	0	0	2
0	0	1/3	-2/3	1	0	0
0	0	1	0	0	1	2
1	0	-1	1	0	0	6

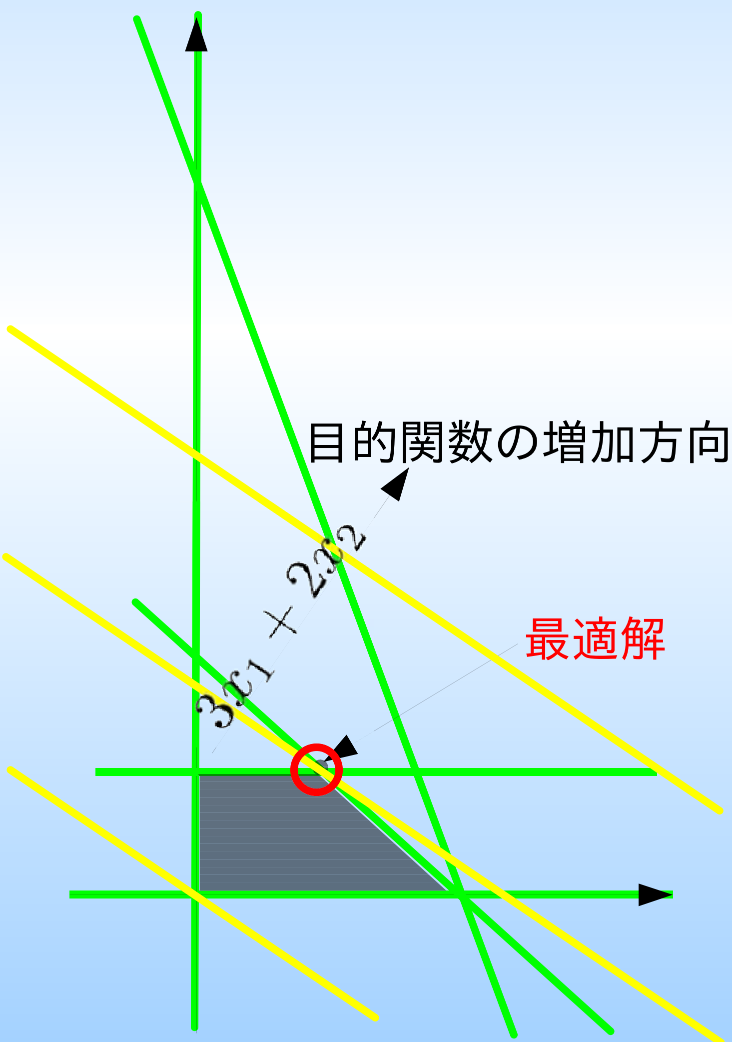




基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺
0	3	1	1	0	0	6
0	2	1	0	1	0	4
0	0	1	0	0	1	2
1	-3	-2	0	0	0	0

基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	1	1/3	1/3	0	0	2
0	0	1/3	-2/3	1	0	0
0	0	1	0	0	1	2
1	0	-1	1	0	0	6

基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	1	0	1	-1	0	2
0	0	1	-2	3	0	0
0	0	0	2	-3	1	2
1	0	0	-1	3	0	6

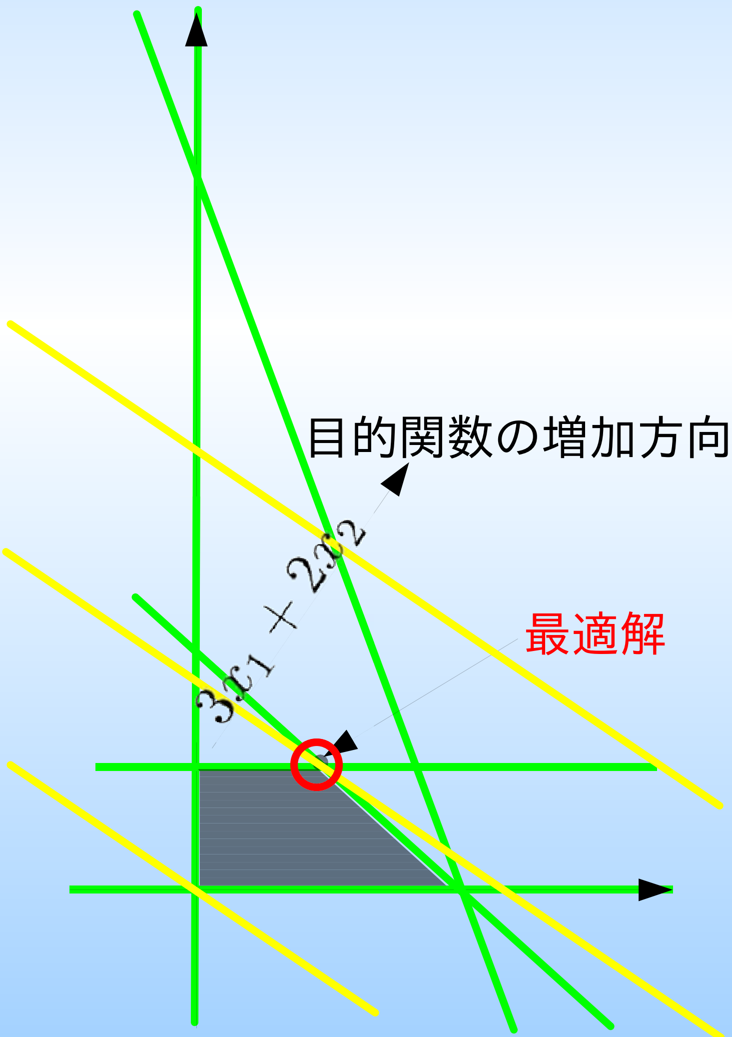


基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺
0	3	1	1	0	0	6
0	2	1	0	1	0	4
0	0	1	0	0	1	2
1	-3	-2	0	0	0	0

基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	1	1/3	1/3	0	0	2
0	0	1/3	-2/3	1	0	0
0	0	1	0	0	1	2
1	0	-1	1	0	0	6

基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	1	0	1	-1	0	2
0	0	1	-2	3	0	0
0	0	0	2	-3	1	2
1	0	0	-1	3	0	6

基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	1	0	0	½	½	1
0	0	1	0	0	1	2
0	0	0	1	-3/2	½	1
1	0	0	0	0	1	8



基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺
0	3	1	1	0	0	6
0	2	1	0	1	0	4
0	0	1	0	0	1	2
1	-3	-2	0	0	0	0

基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	1	1/3	1/3	0	0	2
0	0	1/3	-2/3	1	0	0
0	0	1	0	0	1	2
1	0	-1	1	0	0	6

基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	1	0	1	-1	0	2
0	0	1	-2	3	0	0
0	0	0	2	-3	1	2
1	0	0	-1	3	0	6

基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	1	0	0	½	½	1
0	0	1	0	0	1	2
0	0	0	1	-3/2	½	1
1	0	0	0	0	1	8

退化(degenerate)

基底関数・非基底関数の交換で目的関数値が増加しない

n 個の基底変数を持つ問題において実行可能領域の端点は n 個の平面の交点として表現できる。
ある交点で n+1 個以上の平面が交差しているときに退化が現われる。

巡回(cycling)

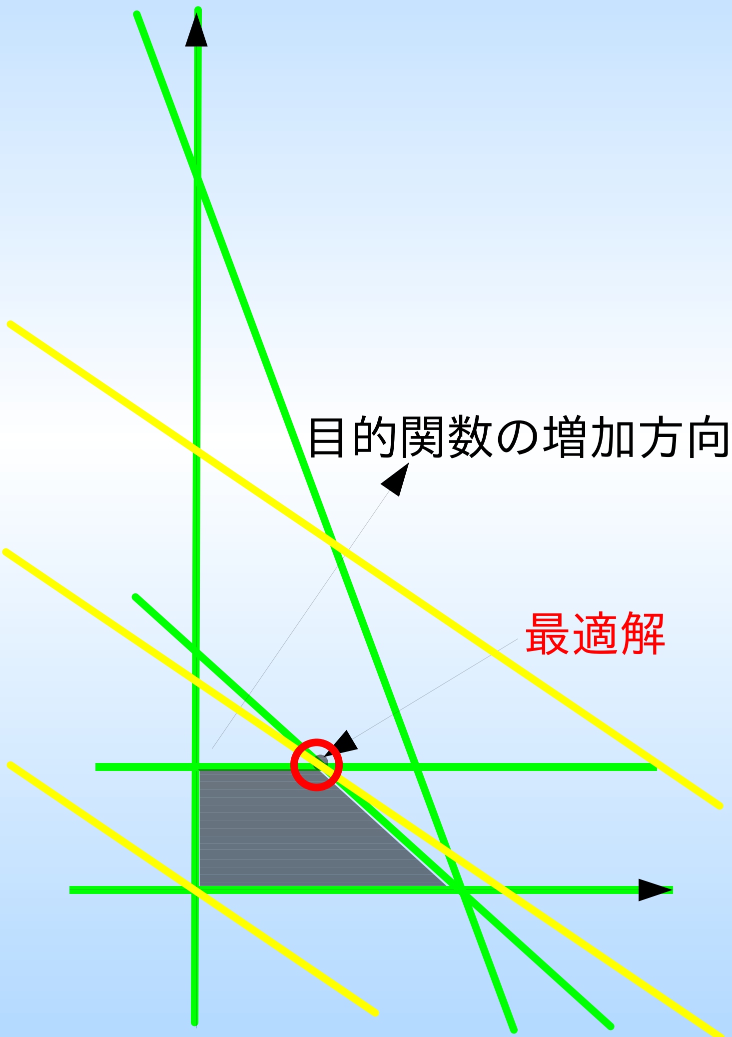
退化したまま単体法が終了しない

交差している平面の数が n よりもさらに大きくなると、退化したままで基底変数と非基底変数の交換を繰り返すことになる。
場合によっては退化した変数の組み合わせから抜け出せなくなる。

最小添字規則(smallest subscript rule)

変数に順序をつけておき、選択肢が複数あるときは順序に従って選ぶ

原点が実行可能領域に有る場合



等式標準形において、slack 変数の係数が全て正であれば slack 変数を基底変数とした基本解が実行可能解となり初期解に利用できる。

不等式標準形

maximize

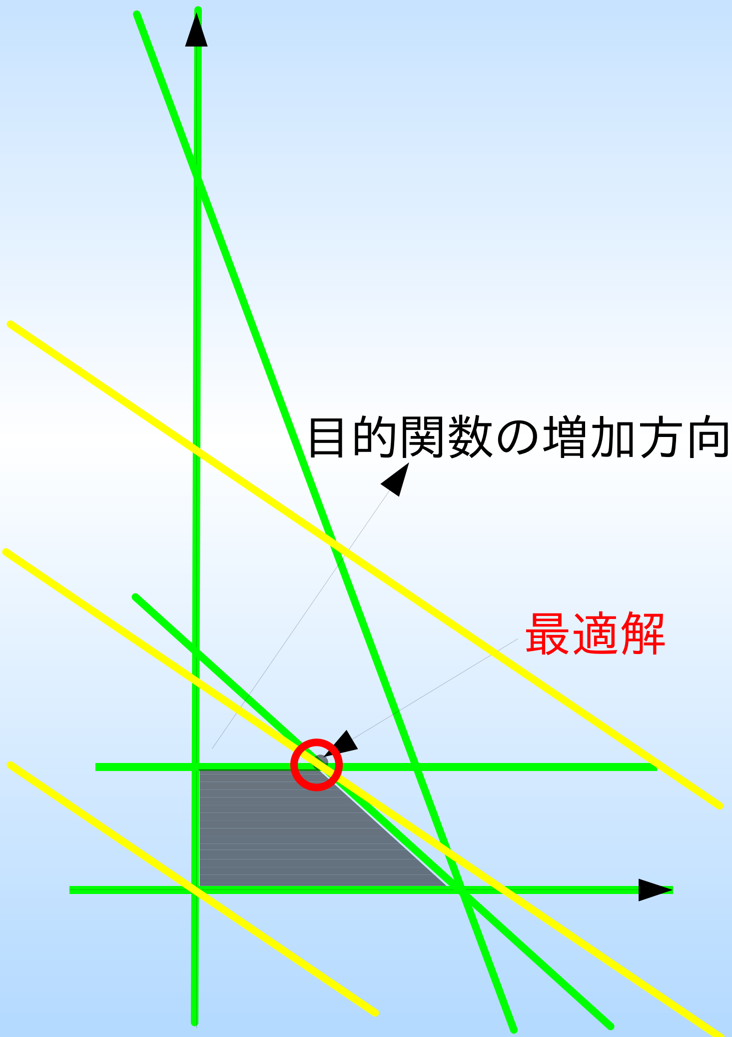
$$z = 3x_1 + 2x_2$$

subject to

$$3x_1 + x_2 \leq 6$$
$$2x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

原点が実行可能領域に無い場合

~~等式標準形において、slack 変数の係数が全て正であれば slack 変数を基底変数とした基本解が実行可能解となり初期解に利用できる。~~



不等式標準形

maximize

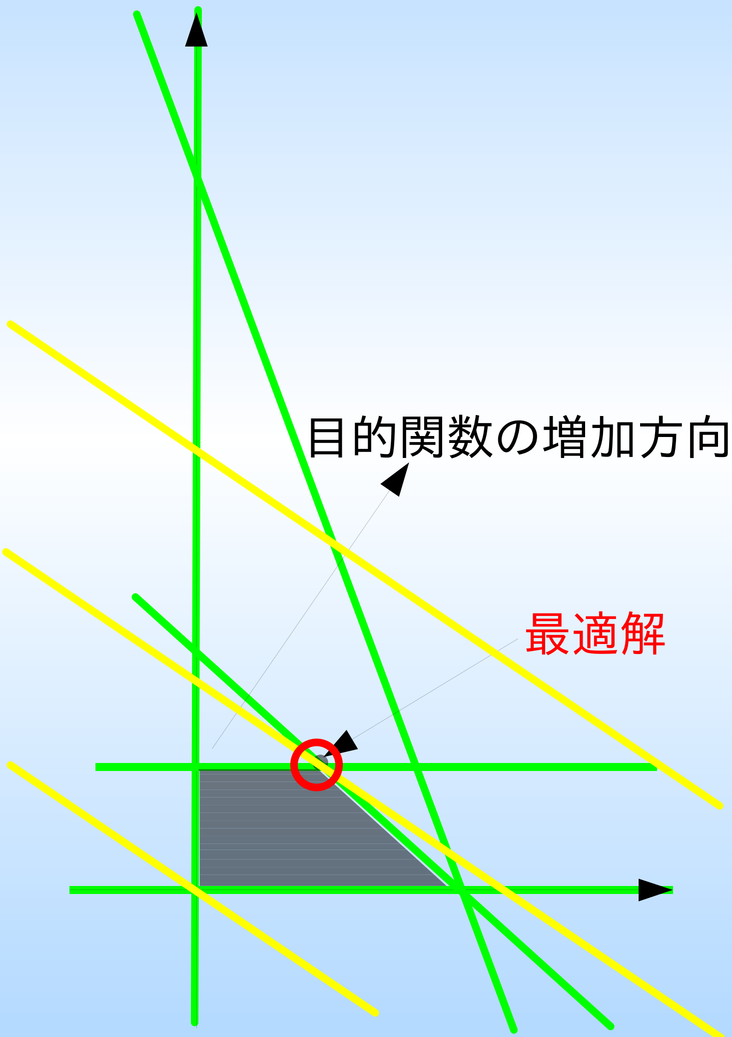
$$z = -x_1 + x_2$$

subject to

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$9x_1 - 5x_2 = 15$$
$$x_1 - 2x_2 \geq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

原点が実行可能領域に無い場合

~~等式標準形において、slack 変数の係数が全て正であれば slack 変数を基底変数とした基本解が実行可能解となり初期解に利用できる。~~



等式標準形

maximize

$$z = -x_1 + x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ 9x_1 - 5x_2 \qquad &= 15 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

2段階単体法

原点を実行可能領域に含む人工線形計画問題を作り
人工問題の最適解から元の問題の初期解を得る。

等式標準形

maximize

$$z = -6x_1 + 6x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

人工問題の等式標準形

maximize

$$z = -x_5 - x_6$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 + x_5 &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 + x_6 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

人工問題は z, x_3, x_5, x_6 を基底変数、 x_1, x_2, x_4 を非基底変数とした基本解を実行可能領域に含む。→ (x_1, x_2) の原点から単体法を実行できる。
人工問題の最適解が $z = 0 \Rightarrow x_5 = x_6 = 0$ であれば、その基本解は元の問題で実行可能領域に含まれる。

2段階単体法

原点を実行可能領域に含む人工線形計画問題を作り
人工問題の最適解から元の問題の初期解を得る。

1段目の単体法

人工問題の等式標準形

maximize

$$z = -x_5 - x_6$$

subject to

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 6 \\
-5x_1 + 9x_2 \qquad + x_5 &= 15 \\
-6x_1 + 3x_2 - x_4 + x_6 &= 1 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0
\end{aligned}$$

人工問題の等式標準形

maximize

$$z$$

subject to

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 6 \\
-5x_1 + 9x_2 \qquad + x_5 &= 15 \\
-6x_1 + 3x_2 - x_4 + x_6 &= 1 \\
z + 11x_1 - 12x_2 + x_4 &= -18 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0
\end{aligned}$$

人工問題は z, x_3, x_5, x_6 を基底変数、 x_1, x_2, x_4 を非基底変数とした基本解を実行可能領域に含む。→ (x_1, x_2) の原点から単体法を実行できる。
人工問題の最適解が $z = 0 \Rightarrow x_5 = x_6 = 0$ であれば、その基本解は元の問題で実行可能領域に含まれる。

初期のsimplex表

基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	定数
0	2	3	1	0	0	0	6
0	-5	9	0	0	1	0	15
0	-6	3	0	-1	0	1	3
1	11	-12	0	1	0	0	-18

終了時のsimplex表

基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	定数
0	1	0	3/11	0	-1/11	0	3/11
0	0	0	-13/11	1	8/11	-1	9/11
0	0	1	5/33	0	2/33	0	20/11
1	0	0	0	0	0	1	0

こうして得た人工問題の基本解は元の問題の実行可能領域の端点になっている。さらに目的関数を元に戻して、simplex 法を実行することで、元の問題の最適解を得ることができる。

演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

maximize $\quad z = x_1 + 2x_2$

subject to
$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 &\geq -1 \\ x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

課題1： グラフを描き、原点が実行可能領域ではないことを確認してください。

課題2： 2段階 simplex 法の第1段階を用いて実行可能領域の端点を見つけてください。

hint　2段階 simplex 法の第1段階では、

1. 等式標準形を導く
2. 正の係数の slack 変数を持たない制約式に人工変数を追加する
3. 人工変数に負の係数をつけて加えた人工目的関数の最大化問題を解く

という手順が必要です。