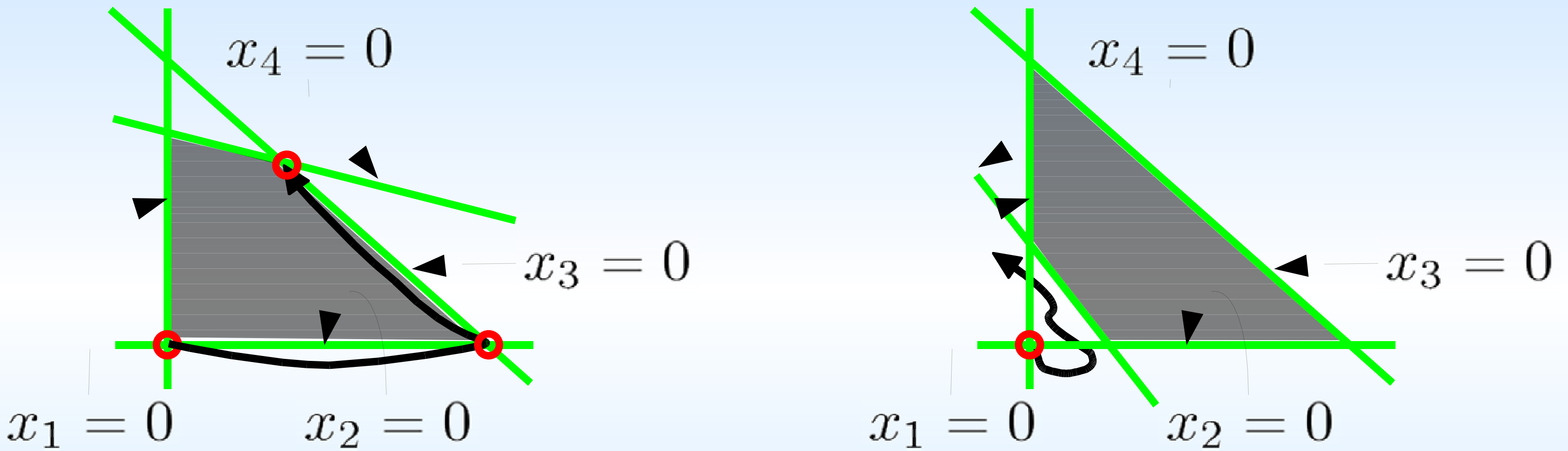
数理計画法

第6回：単体法の2段解法（原点が実行可能領域に含まれない場合）

復習

単体法(simplex method)の利用のためには初期基底解となる実行可能領域の端点の情報が必要



2段階単体法(2stage simplex method)
第1段階：初期基底解を求めるための線形計画問題を解く
第2段階：前段階で得た初期基底解で元の線形計画問題を解く

2段階単体法(2stage simplex method)

第1段階：初期基底解を求めるための線形計画問題を解く

元の線形計画問題の等式標準形

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z \\ \text{subject to} & \begin{array}{rcl} a_1x_1+a_2x_2+x_3 & & = p_1 \\ b_1x_1+b_2x_2 & -x_4 & = p_2 \\ c_1x_1+c_2x_2 & & = p_3 \\ z+d_1x_1+d_2x_2 & & = 0 \end{array} \end{array}$$

に以下の操作を施して補助問題を作る。

(1)スラック変数の係数が正でない制約式に人工変数を加える

(2)係数が -1 の人工変数だけから成る人工目的関数を定める

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \tilde{z}(= -x_5 - x_6) \\ \text{subject to} & \begin{array}{rcl} a_1x_1+a_2x_2+x_3 & & = p_1 \\ b_1x_1+b_2x_2 & -x_4 \boxed{+x_5} & = p_2 \\ c_1x_1+c_2x_2 & \boxed{+x_6} & = p_3 \\ z+d_1x_1+d_2x_2 & & = 0 \\ \boxed{\tilde{z} \quad +x_5 \quad +x_6} & & \boxed{= 0} \end{array} \end{array}$$

補助問題の最適解において基底解が $x_5 = x_6 = 0$ を満たせば

元の問題の初期基底解として利用できる

2段階単体法(2stage simplex method)

第1段階：初期基底解を求めるための線形計画問題を解く

元の線形計画問題の等式標準形

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & z \\
\text{subject to} & a_1x_1 + a_2x_2 + x_3 = p_1 \\
& b_1x_1 + b_2x_2 - x_4 = p_2 \\
& c_1x_1 + c_2x_2 = p_3 \\
& z + d_1x_1 + d_2x_2 = 0
\end{array}
$$

等式標準形では $p_1, p_2, \ldots$ は常に非負
→原点でスラック変数が非負条件を満たすためには係数も非負であることが必要

に以下の操作を施して補助問題を作る。

(1)スラック変数の係数が正でない制約式に人工変数を加える

(2)係数が -1 の人工変数だけから成る人工目的関数を定める

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \tilde{z}(= -x_5 - x_6) \\
\text{subject to} & a_1x_1 + a_2x_2 + x_3 = p_1 \\
& b_1x_1 + b_2x_2 - x_4 \boxed{+x_5} = p_2 \\
& c_1x_1 + c_2x_2 \boxed{+x_6} = p_3 \\
& z + d_1x_1 + d_2x_2 = 0 \\
& \boxed{\tilde{z} + x_5 + x_6 = 0}
\end{array}
$$

補助問題の最適解において基底解が $x_5 = x_6 = 0$ を満たせば元の問題の初期基底解として利用できる

2段階単体法(2stage simplex method)

第1段階：初期基底解を求めるための線形計画問題を解く

元の線形計画問題の等式標準形

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & z \\
\text{subject to} & a_1x_1+a_2x_2+x_3 \qquad\qquad = p_1 \\
& b_1x_1+b_2x_2 \qquad\quad -x_4 = p_2 \\
& c_1x_1+c_2x_2 \qquad\qquad\quad = p_3 \\
& z+d_1x_1+d_2x_2 \qquad\qquad = 0
\end{array}
$$

に以下の操作を施して補助問題を作る。

(1)スラック変数の係数が正でない制約式に人工変数を加える

(2)係数が -1 の人工変数だけから成る人工目的関数を定める

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \tilde{z}(=-x_5-x_6) \\
\text{subject to} & a_1x_1+a_2x_2+x_3 \qquad\qquad\qquad = p_1 \\
& b_1x_1+b_2x_2 \qquad\quad -x_4 \boxed{+x_5} = p_2 \\
& c_1x_1+c_2x_2 \qquad\qquad\quad \boxed{+x_6} = p_3 \\
& z+d_1x_1+d_2x_2 \qquad\qquad\qquad = 0 \\
& \tilde{z}-(b_1+c_1)x_1-(b_2+c_2)x_2+x_4=-p_2-p_3
\end{array}
$$

simplex表を用いた単体法の実行のためには、表の各行の基底変数は一つまでにすることが必要

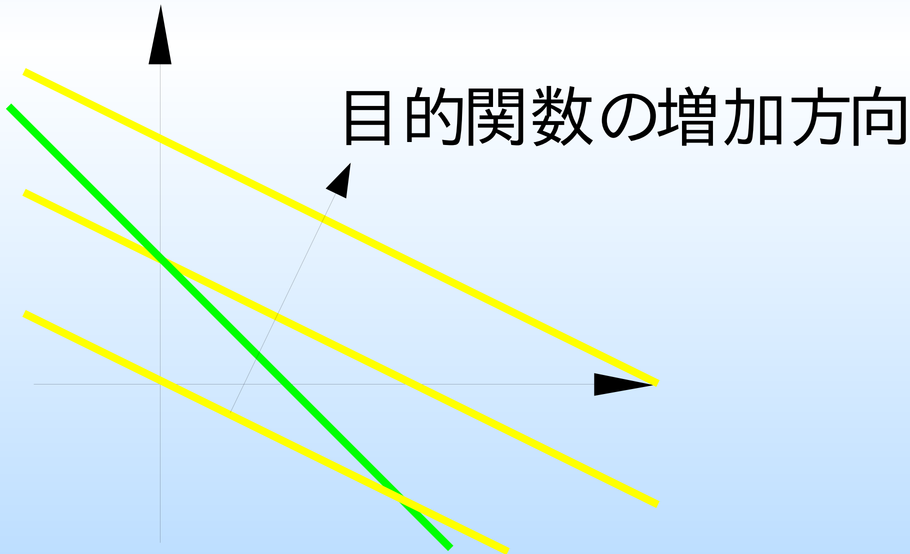
※係数は1でなくても良い

補助問題の最適解において基底解が $x_5=x_6=0$ を満たせば元の問題の初期基底解として利用できる

maximize $z = x_1 + 2x_2$

subject to
$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 &\geq -1 \\ x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

課題1：　グラフを描き、原点が実行可能領域ではないことを確認してください。



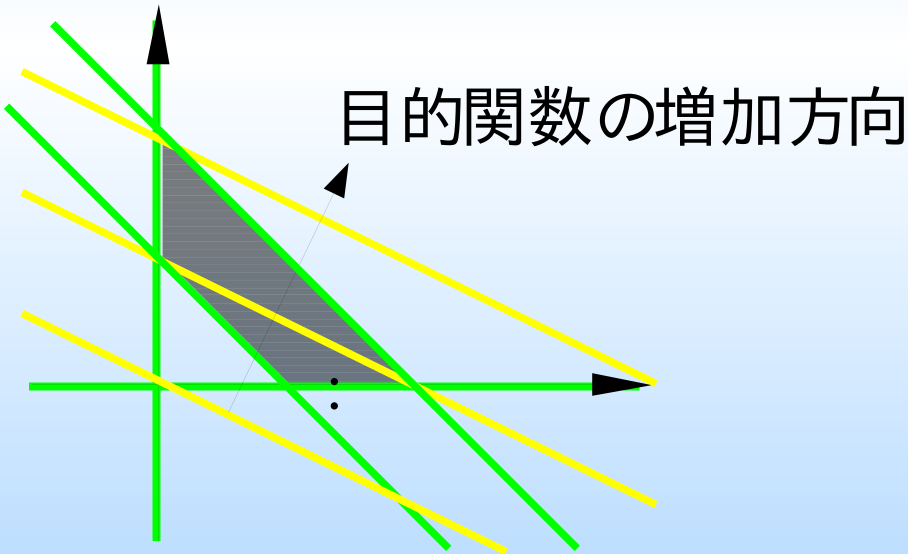
maximize $z = x_1 + 2x_2$

subject to $\cancel{x_1 - x_2 \geq -1}$ $-x_1 - x_2 \geq -2$

$x_1 + x_2 \geq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

課題1：　グラフを描き、原点が実行可能領域ではないことを確認してください。



等式標準形

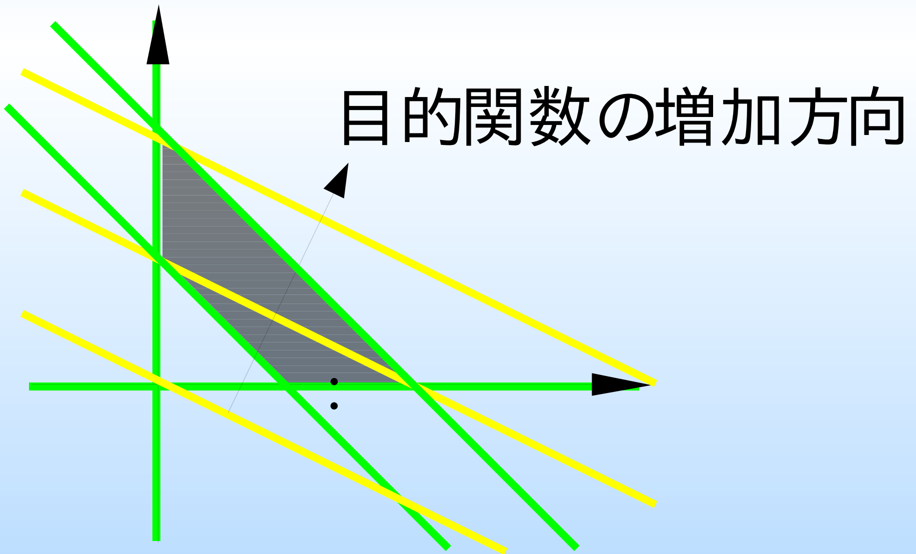
maximize $\quad z = x_1 + 2x_2$

subject to $\quad x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$$x_1 + x_2 - x_4 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

課題1： グラフを描き、原点が実行可能領域ではないことを確認してください。



等式標準形

maximize $z = x_1 + 2x_2$

subject to

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 + x_2 - x_4 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

補助問題

maximize $\tilde{z} = -x_5 (= x_1 + x_2 - x_4 - 1)$

subject to

$$x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 2$$
$$x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$
$$(\tilde{z} - x_1 - x_2 + x_4 = -1)$$

補助問題のsimplex表

基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数		
$\tilde{z}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺	
0	1	1	1	0	0	2	
0	1	1	0	-1	1	1	
1	-1	-1	0	1	0	1	

補助問題

maximize $\tilde{z} = -x_5 (= x_1 + x_2 - x_4 - 1)$

subject to

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$
$$(\tilde{z} - x_1 - x_2 + x_4 = -1)$$

補助問題のsimplex表

基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	
$\tilde{z}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺
0	1	1	1	0	0	2
0	1	1	0	-1	1	1
1	-1	-1	0	1	0	-1

基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺
0	0	0	1	1	-1	1
0	1	1	0	-1	1	1
1	0	0	0	0	1	0

補助問題の最適解 $(\tilde{z}, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 1, 0, 1, 0, 0)$

2段階単体法(2stage simplex method)
第2段階：補助問題の最適解を元の問題の初期基底解として利用する

補助問題

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} && \tilde{z} = -x_5 (= x_1 + x_2 - x_4 - 1) \\
&\text{subject to} && x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 2 \\
& && x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\
& && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\
& && (\tilde{z} - x_1 - x_2 + x_4 = -1)
\end{aligned}
$$

補助問題の最終段階のsimplex表

基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数		
$\tilde{z}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺	
0	0	0	1	1	-1	1	
0	1	1	0	-1	1	1	
1	0	0	0	0	1	0	

補助問題の最適解　$(\tilde{z}, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 1, 0, 1, 0, 0)$

simplex表に対応する制約式

$$
\begin{aligned}
+x_3 - x_4 - x_5 &= 1 \quad \leftarrow ①-②-x_5 \\
x_1 + x_2 \qquad - x_4 + x_5 &= 1 \quad \leftarrow ②+x_5 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

x_5を無視すれば元の制約式と同等

元の線形計画問題

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} && z = x_1 + 2x_2 \\
&\text{subject to} \ ① && x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
& \qquad\qquad ② && x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
& && x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

2段階単体法(2stage simplex method)
第2段階：補助問題の最適解を元の問題の初期基底解として利用する

補助問題の最終段階のsimplex表

基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数		
$\tilde{z}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺	
0	0	0	1	1	-1	1	
0	1	1	0	-1	1	1	
1	0	0	0	0	1	0	

補助問題の最適解 $(\tilde{z}, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 1, 0, 1, 0, 0)$

simplex表に対応する制約式

$$
\begin{aligned}
+x_3 - x_4 - x_5 &= 1 \quad \leftarrow ①-②-x_5 \\
x_1 + x_2 \qquad - x_4 + x_5 &= 1 \quad \leftarrow ②+x_5 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

x_5を無視すれば元の制約式と同等

補助問題の最終段階のsimplex表に対応する、元の線形計画問題と同等な線形計画問題

maximize $z = x_1 + 2x_2$

subject to
$$
\begin{aligned}
+x_3 - x_4 &= 1 \\
x_1 + x_2 \qquad - x_4 &= 1 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

初期基底解 $z = x_1 + 2x_2 = 1, x_1 = 1, x_3 = 1$（非基底解 $x_2 = x_4 = 0$ ）

2段階単体法(2stage simplex method)
第2段階：補助問題の最適解を元の問題の初期基底解として利用する

補助問題の最終段階のsimplex表

基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数		
$\tilde{z}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺	
0	0	0	1	1	-1	1	
0	1	1	0	-1	1	1	
1	0	0	0	0	1	0	

補助問題の最終段階のsimplex表に対応する、元の線形計画問題と同等な線形計画問題

maximize $z = x_1 + 2x_2 = (-x_2 + x_4 + 1) + 2x_2 = x_2 + x_4 + 1$

subject to

$$+x_3 - x_4 = 1$$
$$x_1 + x_2 \qquad - x_4 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

目的関数から基底変数を除く

初期基底解 $z = x_1 + 2x_2 = 1, x_1 = 1, x_3 = 1$（非基底解　$x_2 = x_4 = 0$）

第2段階の初期 simplex表

基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数		
z	x_1	x_2	x_3	x_4	右辺	
0	0	0	1	1	1	
0	1	1	0	-1	1	
1	0	-1	0	-1	1	

通常の単体法の手順で最適解を求める

2段階単体法(2stage simplex method)
第2段階：補助問題の最適解を元の問題の初期基底解として利用する

第2段階の初期 simplex表

基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数		
z	x_1	x_2	x_3	x_4	右辺	
0	0	0	1	1	1	
0	1	1	0	-1	1	
1	0	-1	0	-1	1	

通常の単体法の手順で最適解を求める

基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数		
	x_1	x_2	x_3	x_4	右辺	増加量
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	-1	1	-1
1	1	0	0	-2	2	

基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数		
	x_1	x_2	x_3	x_4	右辺	
0	0	0	1	1	1	
0	1	1	1	0	2	
1	1	0	2	0	4	

第2段階の最適解 $(z, x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 0, 2, 0, 1)$

2段階単体法(2stage simplex method)
第2段階：補助問題の最適解を元の問題の初期基底解として利用する

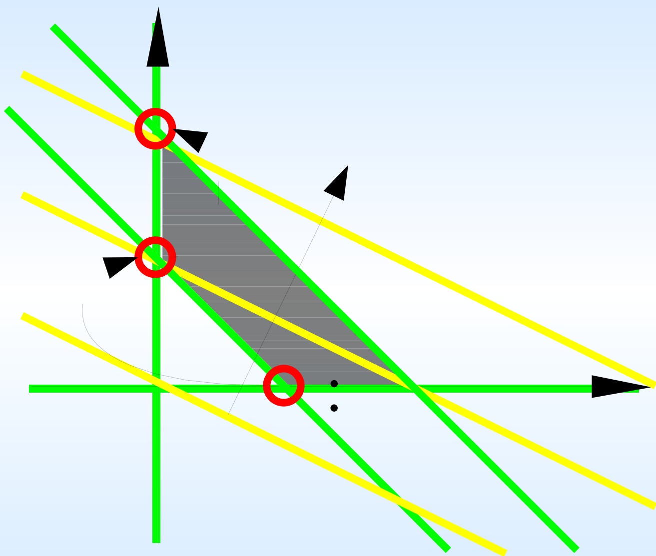
第2段階の初期 simplex表

基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	x_4	右辺
0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	-1	1
1	0	-1	0	-1	1

通常の単体法の手順で最適解を求める

基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	
	x_1	x_2	x_3	x_4	右辺
0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	-1	1
1	1	0	0	-2	2

基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	
	x_1	x_2	x_3	x_4	右辺
0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	2
1	1	0	2	0	4



第2段階の最適解 $(z, x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 0, 2, 0, 1)$

2段階単体法(2stage simplex method)

第1段階：初期基底解を求めるための線形計画問題を解く

・元の問題の等式標準形に以下の操作を施し補助問題を作る。
(1)スラック変数の係数が正でない制約式に人工変数を加える
(2)係数が -1 の人工変数だけから成る人工目的関数を定める

・補助問題の最適解を単体法を用いて求める

※初期基底変数はsimplex表の目的関数から消去しておく
※最適値が 0 ならば元の問題の初期基底解として利用できる

第2段階：補助問題の最適解を初期基底解として、元の問題と同等の線形計画問題を解く

・補助問題の最終段階のsimplex表に対応する制約式から人工変数を取り除き、元の目的関数と併せて元の問題と同等の線形計画問題を作りその最適解を単体法を用いて求める

※初期基底変数はsimplex表の目的関数から消去しておく
※補助問題のsimplex表に目的関数の行を加えて利用する

線形計画問題の行列表現

maximize

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$

subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n$$

maximize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = (c_1, c_2, \dots, c_m)$$

基底変数： $\{x'_1, \dots, x'_n\} \subset \{x_1, \dots, x_m\}$

非基底変数：$\{x'_{n+1}, \dots, x'_m\} = \{x_1, \dots, x_m\} \setminus \{x'_1, \dots, x'_n\}$

演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

課題1：次の線形計画問題を単体法を用いて解き、最適解を求める

minimize $z = x_1 + 2x_2$

subject to
$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

課題2：グラフを描き、どのような経過を辿り最適解を得たのか示す

※注意：最小化問題です。原点は実行可能領域ではありません。