数理計画法

第8回：双対問題と双対定理

復習

演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

課題1：次の線形計画問題を単体法を用いて解き、最適解を求める

minimize $z = x_1 + 2x_2$

subject to
$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

※注意：最小化問題です。原点は実行可能領域ではありません。

2段階単体法の代わりに右の問題を通常の単体法で解き
その最適解を元の問題の最適解と比較する

元の問題

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & -z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

罰則付問題

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \tilde{z} = -x_1 - 2x_2 - P(x_6 + x_7) \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{aligned}$$

P にはとても大きい数、例えば24000等を用いる

復習

2段階単体法の代わりに右の問題を通常の単体法で解き
その最適解を元の問題の最適解と比較する

元の問題

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & -z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

罰則付問題

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \tilde{z} = -x_1 - 2x_2 - P(x_6 + x_7) \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{aligned}$$

P にはとても大きい数、例えば24000等を用いる

$$\tilde{z} = -x_1 - 2x_2 - P(x_6 + x_7) = -x_1 - (2 - 3P)x_2 - Px_3 - Px_4 - 6P$$

P はとても大きい数

基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	
$\tilde{z}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	右辺
0	1	1	-1	0	0	1	0	4
0	-1	2	0	-1	0	0	1	2
0	0	1	0	0	1	0	0	3
1	1	2-3P	P	P	0	0	0	-6P

P はとても大きい数

基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	
$\tilde{z}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	右辺
0	1	1	-1	0	0	1	0	4
0	-1	2	0	-1	0	0	1	2
0	0	1	0	0	1	0	0	3
1	1	2-3P	P	P	0	0	0	-6P

基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	
$\tilde{z}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	右辺
0	3/2	0	-1	+1/2	0	1	-1/2	3
0	-1/2	1	0	-1/2	0	0	+1/2	1
0	+1/2	0	0	+1/2	1	0	-1/2	2
1	2-3P/2	0	P	1-P/2	0	0	-1+3P/2	-2-3P

基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	
$\tilde{z}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	右辺
0	1	0	-2/3	+1/3	0	+2/3	-1/3	2
0	0	1	-1/3	-1/3	0	+1/3	+1/3	2
0	0	0	+1/3	+1/3	1	-1/3	-1/3	1
1	0	0	+4/3	+1/3	0	-4/3+P	-1/3	-6

最適解：$x_1 = 2, x_2 = 2, \tilde{z} = -6 \Rightarrow z = 6$

復習

2段階単体法の代わりに右の問題を通常の単体法で解き
その最適解を元の問題の最適解と比較する

元の問題

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & -z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

最適解：$x_1 = 2, x_2 = 2, z = 6$

罰則付問題

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \tilde{z} = -x_1 - 2x_2 - P(x_6 + x_7) \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{aligned}$$

P にはとても大きい数、例えば24000等を用いる

最適解：$x_1 = 2, x_2 = 2, \tilde{z} = -6$

- Pの値を正しく決める方法が無い
- 条件数を悪化させる可能性が高い
- $P=\infty$では連立方程式が大きくなってしまう

双対問題

主問題	双対問題
maximize $z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	minimize $w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ subject to $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

双対問題

maximize

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$

subject to

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &\leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &\leq b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &\leq b_n
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

主問題

minimize

$$w = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_ny_n$$

subject to

$$\begin{aligned}
a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{n1}y_n &\geq c_1 \\
a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{n2}y_n &\geq c_2 \\
&\vdots \\
a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + \cdots + a_{nm}y_n &\geq c_m
\end{aligned}$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0$$

双対問題

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

n 行 m 列の係数行列と m 個の変数、
n 通りの制約式からなる主問題

m 行 n 列の係数行列と n 個の変数、
m 通りの制約式からなる双対問題

双対問題

maximize

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$

subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \leq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \leq b_n$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

minimize

$$w = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_ny_n$$

subject to

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{n1}y_n \geq c_1$$
$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{n2}y_n \geq c_2$$
$$\vdots$$
$$a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + \cdots + a_{nm}y_n \geq c_m$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0$$

主問題

双対問題

maximize

$$z = -4x_1 - 4x_2 - x_3$$

subject to

$$\begin{array}{rrrcr} -2x_1 & -2x_2 & +4x_3 & \leq & -2 \\ -2x_1 & & -2x_3 & \leq & -1 \\ x_1 & -4x_2 & +x_3 & \leq & -1 \end{array}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

minimize

$$w = -2y_1 - y_2 - y_3$$

subject to

$$\begin{array}{rrrcr} -2y_1 & -2y_2 & +y_3 & \geq & -4 \\ -2y_1 & & -4y_3 & \geq & -4 \\ 4y_1 & -2y_2 & +y_3 & \geq & -1 \end{array}$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

双対問題

主問題

maximize

$$z = -4x_1 - 4x_2 - x_3$$

subject to

$$\begin{array}{rrrcr} -2x_1 & -2x_2 & +4x_3 & \leq & -2 \\ -2x_1 & & -2x_3 & \leq & -1 \\ x_1 & -4x_2 & +x_3 & \leq & -1 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

双対問題

minimize

$$w = -2y_1 - y_2 - y_3$$

subject to

$$\begin{array}{rrrcr} -2y_1 & -2y_2 & +y_3 & \geq & -4 \\ -2y_1 & & -4y_3 & \geq & -4 \\ 4y_1 & -2y_2 & +y_3 & \geq & -1 \end{array}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

↑と同等の問題=→の双対問題

minimize

$$-z = 4x_1 + 4x_2 + x_3$$

subject to

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +2x_2 & -4x_3 & \geq & 2 \\ 2x_1 & & +2x_3 & \geq & 1 \\ -x_1 & +4x_2 & -x_3 & \geq & 1 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

↑と同等の問題

maximize

$$-w = 2y_1 + y_2 + y_3$$

subject to

$$\begin{array}{rrrcr} 2y_1 & 2y_2 & -y_3 & \leq & 4 \\ 2y_1 & & 4y_3 & \leq & 4 \\ -4y_1 & 2y_2 & -y_3 & \leq & 1 \end{array}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

双対問題

主問題

maximize

$$z = -4x_1 - 4x_2 - x_3$$

subject to

$$\begin{array}{rrrcr} -2x_1 & -2x_2 & +4x_3 & \le & -2 \\ -2x_1 & & -2x_3 & \le & -1 \\ x_1 & -4x_2 & +x_3 & \le & -1 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

maximize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$$

双対問題

minimize

$$w = -2y_1 - 2y_2 - y_3$$

subject to

$$\begin{array}{rrrcr} -2y_1 & -2y_2 & +y_3 & \ge & -4 \\ -2y_1 & & -4y_3 & \ge & -4 \\ 4y_1 & -2y_2 & +y_3 & \ge & -1 \end{array}$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

minimize

$$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}$$

↑と同等の問題=→の双対問題

minimize

$$-z = 4x_1 + 4x_2 + x_3$$

subject to

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +2x_2 & -4x_3 & \ge & 2 \\ 2x_1 & & +2x_3 & \ge & 1 \\ -x_1 & +4x_2 & -x_3 & \ge & 1 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

$$(-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} =$$

minimize

$$-z = -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

subject to

$$-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \ge -\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$$

↑と同等の問題

maximize

$$-w = 2y_1 + 2y_2 + y_3$$

subject to

$$\begin{array}{rrrcr} 2y_1 & 2y_2 & -y_3 & \le & 4 \\ 2y_1 & & 4y_3 & \le & 4 \\ -4y_1 & 2y_2 & -y_3 & \le & 1 \end{array}$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

maximize

$$-w = -\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

subject to

$$-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \le -\boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}$$

双対定理

右式のような線形計画問題とその双対問題が与えられているとき、$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$ がそれぞれ主問題、双対問題の実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、最適解である。

$$\exists \tilde{\boldsymbol{x}}, \exists \tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$
$$\Longrightarrow \forall \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

主問題	双対問題
maximize	minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$	$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to	subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

双対定理

右式のような線形計画問題とその双対問題が与えられているとき、$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$ がそれぞれ主問題、双対問題の実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、最適解である。

主問題	双対問題
maximize	minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$	$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to	subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

$$\exists\tilde{\boldsymbol{x}}, \exists\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$
$$\Longrightarrow \forall\boldsymbol{x}, \forall\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

証明：

$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$をそれぞれの問題の任意の実行可能解とする。

$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ の各項を不等式 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ で評価すれば次の関係式が得られる。

$$z = c_1x_1 + \cdots + c_mx_m \leq (a_{11}y_1 + \cdots + a_{n1}y_n)x_1 + \cdots + (a_{1m}y_1 + \cdots + a_{nm}y_n)x_m$$

同様に$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$と$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$から次の関係式が得られる。

$$w = b_1y_1 + \cdots + b_nx_n \geq (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m)y_1 + \cdots + (a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m)y_n$$

両式の右辺を比較すれば、一般に $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ の成立することが分かる。
$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$であれば任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$に対して次式が成立し定理が証明される。

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}$$

双対定理

maximize	minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$	$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to	subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$
主問題	双対問題

右式のような線形計画問題とその双対問題が与えられているとき、$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$ がそれぞれ主問題、双対問題の実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、最適解である。

$$\exists\tilde{\boldsymbol{x}}, \exists\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$

$$\Longrightarrow \forall\boldsymbol{x}, \forall\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

また、どちらか一方に最適解 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ が存在すれば、もう一方にも最適解 $\tilde{\boldsymbol{y}}$ が存在し、双方の最適解が与える目的関数値は等しい。

$$\exists\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}, \text{ for } \forall\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$$

$$\Longrightarrow \exists\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}, \text{ for } \forall\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$

主問題と双対問題の関係

maximize

$z = 2x_1 + x_2 + x_3$

subject to

$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & \leq & 4 \quad ① \\ 2x_1 & & 4x_3 & \leq & 4 \quad ② \\ -4x_1 & +3x_2 & -x_3 & \leq & 1 \quad ③ \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

最大化問題は、制約式の定める
上界に一番近い実行可能解を探す問題
2つの制約式から分かる上界の例:

$z \leq$ (①+②)/2= $2x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 \leq 4$

①②③の組み合わせで得られる関係式

$$y_1 \times ① + y_2 \times ② + y_3 \times ③$$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$ であれば、 $= (2y_1 + 2y_2 - 4y_3)x_1 + (2y_1 + 3y_3)x_2$

$$+(-y_1 + 4y_2 - y_3)x_3 \leq (4y_1 + 4y_2 + y_3)$$

関係式の係数が目的関数の係数より大きければ、 $z \leq 4y_1 + 4y_2 + y_3$ により
目的関数の上界を得ることができる。

$$\begin{array}{r} 2y_1 + 2y_2 - 4y_3 \geq 2 \\ 2y_1 + 3y_3 \geq 1 \\ -y_1 + 4y_2 - y_3 \geq 1 \end{array}$$

主問題と双対問題の関係

maximize

$z = 2x_1 + x_2 + x_3$

subject to

$$\begin{array}{rrrcrl} 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & \leq & 4 & ① \\ 2x_1 & & 4x_3 & \leq & 4 & ② \\ -4x_1 & +3x_2 & -x_3 & \leq & 1 & ③ \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

最大化問題は、制約式の定める
上界に一番近い実行可能解を探す問題
2つの制約式から分かる上界の例:

$z \leq$ (①+②)/2= $2x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 \leq 4$

①②③の組み合わせで得られる関係式

$y_1 \times$ ①$+ y_2 \times$② $+ y_3 \times$③

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$ であれば、 $= (2y_1 + 2y_2 - 4y_3)x_1 + (2y_1 + 3y_3)x_2$
$+(-y_1 + 4y_2 - y_3)x_3 \leq (4y_1 + 4y_2 + y_3)$

関係式の係数が目的関数の係数より大きければ、 $z \leq 4y_1 + 4y_2 + y_3$ により
目的関数の上界を得ることができる。

minimize

$w = 4y_1 + 4y_2 + y_3$

subject to

$$2y_1 + 2y_2 - 4y_3 \geq 2$$
$$2y_1 + 3y_3 \geq 1$$
$$-y_1 + 4y_2 - y_3 \geq 1$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

このとき、最も厳しい上界を求める問題、
すなわち $4y_1 + 4y_2 + y_3$ の最小化問題が
z の上限を求める問題に対応する。

主問題と双対問題の関係

maximize

$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$

subject to

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

主問題

minimize

$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$

subject to

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$

$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題

一般化して、
与えられた制約式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ から得られる次の関係式

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \qquad \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{x}$ に対して整理すれば、転置した関係式

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \qquad \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$$

の各行と目的関数の係数との比較から $\boldsymbol{y}$ の制約式

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$$

を得ることができる。このとき、

$$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq z$$

より、z の上界を得る。
最も厳しい上界、すなわち $w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ の最小化問題が
z の上限を求める問題に対応する。

同様に最小化問題に対応する双対問題を定めることができる。

双対問題と双対定理のまとめ

主問題	双対問題
maximize $z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	minimize $w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ subject to $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題は、
最大化問題の最小上界、
最小化問題の最大下界
を求める数理計画問題である。
行列表現を用いた一般的な表現は
左記の通り

双対定理

上式のような線形計画問題とその双対問題が与えられているとき、$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$ がそれぞれ主問題、双対問題の実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、これは、それぞれの問題の最適解である。

$$\exists \tilde{\boldsymbol{x}}, \exists \tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$
$$\Longrightarrow \forall \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

また、どちらか一方に最適解 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ が存在すれば、もう一方にも最適解 $\tilde{\boldsymbol{y}}$ が存在し、双方の最適解が与える目的関数値は等しい。

演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

次の線形計画問題の双対問題を求め、単体法を用いてこれを解き、
最適解の与える両者の目的関数値が等しいことを確認する

maximize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & -x_2 & \leq & 7 \\ 3x_1 & +x_2 & \leq & 10 \\ -x_1 & +2x_2 & \leq & 18 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

次の線形計画問題の双対問題を求め、単体法を用いてこれを解き、
最適解の与える両者の目的関数値が等しいことを確認する

maximize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & -x_2 & \leq & 7 \\ 3x_1 & +x_2 & \leq & 10 \\ -x_1 & +2x_2 & \leq & 18 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

minimize

$$w = 7y_1 + 10y_2 + 18y_3$$

subject to

$$\begin{array}{rrrcr} 2y_1 & +3y_2 & -y_3 & \geq & 1 \\ -y_1 & +y_2 & +2y_3 & \geq & 2 \end{array}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

等式標準形を求めて主問題を単体法で解き、双対問題は2段階単体法、
または罰則付単体法で解を求めてください。