2007数理計画法

学習教育目標と科目との対応について

学習･教育目標(C):

数学、自然科学等の基礎的知識と情報工学に関する専門的な知識を有し、それらを情報社会における諸問題の探求･解決へ自主的･継続的に応用できる人材を育成する。

キーワード: 離散数学および確率･統計を含めた数学的知識

1. 線形計画問題を標準形に定式化し, 単体法および関連する解法を用いて最適解を求めることができる.
2. 線形計画法における双対性について理解し, 線形計画問題の解法に応用できる.
3. 線形計画法における自己双対型内点法を理解し, 問題の解法に適用できる.

授業の内容・スケジュール：

第1回: 数理計画問題･線形計画問題とは何か	10月3日
第2回: 線形計画問題の標準形	10月10日
第3回: 単体法の原理	10月17日
第4回: 単体法の実践	10月24日
第5回: 罰則付単体法と 2段解法	10月31日
第6回: 線形計画問題の行列表現	11月7日
第7回: 改訂単体法と単体法の実装	11月14日
第8回: 双対問題と双対定理	11月21日
第9回: 相補性定理と双対変数	11月28日
第10回:線形計画問題と多面体	12月5日
第11回:内点法の原理	12月12日
第12回:ニュートン法	12月19日
第13回:内点法の実践	1月9日
第14回:演習	1月16日
第15回:期末試験	1月23日

教科書･参考書

- 教科書：田村明久･村松正和「最適化法」
  (共立出版, 2002年, 定価2900円＋税)
  - 1章,2章を教科書に用いる. 10月1日から生協に入荷済
- 参考書：金谷健一「これなら分かる最適化数学」
  共立出版、2005年、
- 参考書：伊理正夫「線形計画法」
  共立出版、1986年、
- 参考書：今野浩「カーマーカー特許とソフトウェア
  ：数学は特許になるか」
  中央公論社、1995年、

数理計画法

第1回：数理計画問題・線形計画問題とは何か

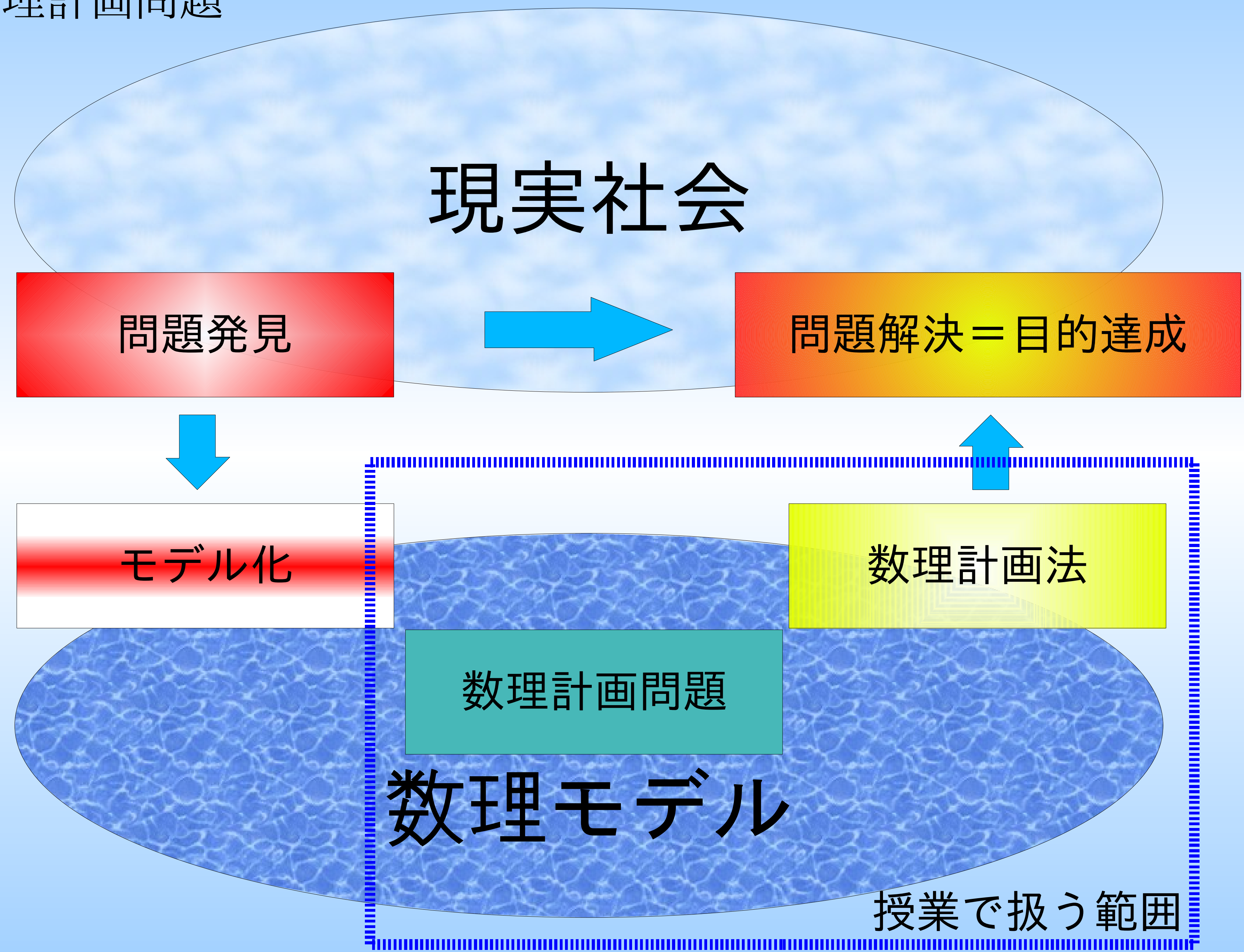
数理計画法＝数理計画問題－問題+法
線形計画法＝線形計画問題－問題+法

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z = f(x_1, \ldots, x_n) \\ \text{subject to} & g(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in X \end{array}$$

与えられた制約式のもとである関数を最大化する問題

線形計画問題⊂数理計画問題⊂最適化問題

数理計画問題



数理計画法による目的達成の手順

1. 問題発見
   操作できるものは何か（変数と制約式）
   得られた結果をどう評価するのか（目的関数）
2. モデル化
   同じ問題でもモデル化の方法は多様
   違う問題でも類似数理モデルに共通の方法が使える
3. 数理計画法
   問題の種類に応じた方法、効率の良い方法、コストの低い方法、手間の多い方法…
4. 目的達成
   最適解を実行することはできるのか、
   得られる結果は目的に合ったものか、

数理モデルと数理計画問題の分類

- 数理モデル作成の例
- 数理計画問題の類別
- 線形計画問題とは何か

数理モデル作成の例

ミックスジュース生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題：利益を最大化する2種類のミックス
　　　ジュースの生産量は？

変数　　：生産量 トロピカルミックス x_1
　　　　　　　　 フレッシュミックス x_2

制約式　：供給量 マンゴー液 $3x_1 + 1x_2 \leq 45$
　　　　　　　　 オレンジ液 $x_1 + 2x_2 \leq 40$

目的関数：利益 $600x_1 + 500x_2$

負の生産量が無いことに注意

数理計画問題の表現と用語

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

最大化(minimize:最小化)

目的関数(objective func.)

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &\leq 45 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 40 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

制約式(constraints)

最適解(optimal solution)　目的関数の最大値を与える解

※大域的/局所的最適解:　あとで、

最適値(optimal value)　最適解をとる目的関数の値

実行可能解(feasible solution)　制約式を満たす解

実行可能領域(feasible region)　実行可能解の集合

数理計画問題の表現と分類

- 変数の性質による分類
  - 連続型: (実数)
  - 離散型: (整数)
- 条件(制約式、目的関数) の性質による分類
  線形、非線形、微分可･不可、連続、不連続、
  区分線形…

授業で扱うのは、
  連続変数による線形関数の数理計画問題

→線形計画問題

線形計画問題と素朴な解法

ミックスジュース生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題:利益を最大化する2種類のミックスジュースの生産量は?

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &\leq 45 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 40 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

変数:生産量
トロピカルミックス x_1
フレッシュミックス x_2

目的関数も制約式も全て1次関数であり線形

グラフを利用した解法

maximize

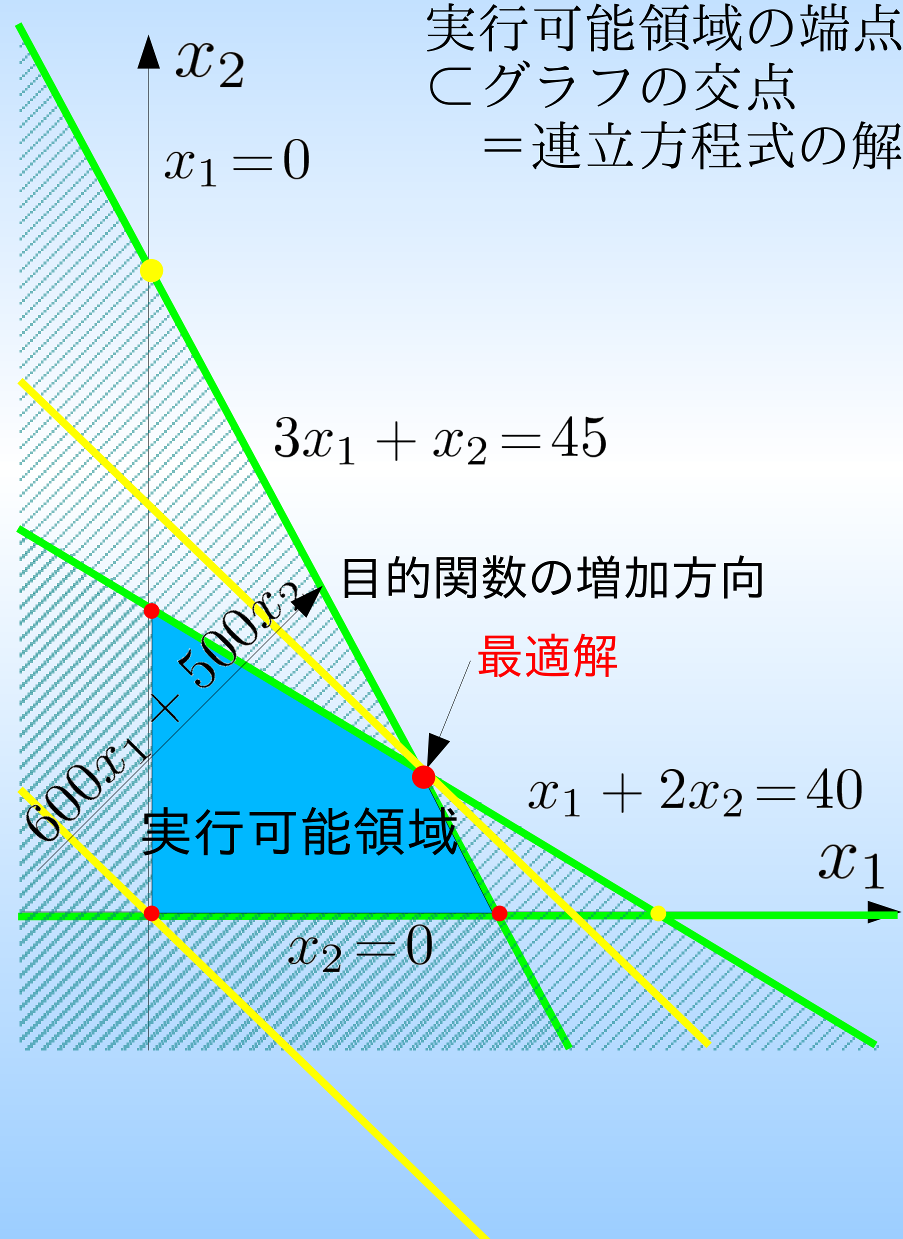
$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &\le 45 \\ x_1 + 2x_2 &\le 40 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

制約式に対応する方程式

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45 \\ x_1 + 2x_2 &= 40 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$



グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &\leq 45 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 40 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

制約式に対応する方程式

① $3x_1 + 1x_2 = 45$
② $x_1 + 2x_2 = 40$
③ $x_1 = 0$
④ $x_2 = 0$

方程式	x_1	x_2	目的関数値	実行可能？
①②	10	15	¥13,500	○
①③	0	45		×
①④	15	0	¥9,000	○
②③	0	20	¥10,000	○
②④	40	0		×
③④	0	0	¥0	○

1. 制約式に対応する方程式を書き出す
2. 全組合せの連立方程式で交点を求める
3. 交点が実行可能領域にあることを確認する
4. 実行可能な交点での最大の目的関数値を探す

見つかった交点が最適解

線形計画問題の素朴な解法

グラフを用いた解法

- 2～3変数までの問題に適用可能
  3変数の問題ではグラフは3次元
  実行可能領域は多面体
  現実社会の問題は数十～数百万変数
- 計算機アルゴリズムとして構成し難い

交点を総当たりする解法

- 多変数の問題に適用可能
  n変数の問題でn元連立方程式を問いて交点を求める
  機械的に交点を計算するアルゴリズムが考えられる
- 交点の実行可能性を調べる手間がある
- 変数が増えると無駄な交点計算が増える

次回：線形計画問題の標準形
次々回：単体法