数理計画法

第3回:単体法

復習
線形計画問題の標準形

- 線形計画問題の不等式標準形
  - 目的関数は最小化される
  - 制約式は「左辺: 変数と係数≧右辺: 定数」
  - 全ての変数は非負
- 線形計画問題の等式標準形
  - 目的関数は最小化される
  - 制約式は「左辺: 変数と係数=右辺: 定数」
  - 全ての変数は非負
- 全ての線形計画問題は標準形で表現できる

演習問題2

名前・学年・学籍番号を記入し、授業の感想とともに提出

ミックスジュース生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題：利益を最大化する2種類のミックスジュースの生産量は？

課題1：対応する線形計画問題の不等式標準形を示しなさい。

課題2：不等式標準形を等式標準形に書換えなさい。

課題3：総当たりによる解法を用いて最適解を求めなさい。

変数の定義を必ず書き出すこと

「トロピカル」の生産量:1日あたり x_1

「フレッシュ 」の生産量:1日あたり x_2

生産に必要な原材料の量は **制約式**

マンゴー液が $\boxed{3x_1+1x_2[\mathrm{L}]\leq 45\times 10^3[\mathrm{L}]}$

オレンジ液が $\boxed{1x_1+2x_2[\mathrm{L}]\leq 40\times 10^3[\mathrm{L}]}$

目的関数

得られる利益は $\boxed{600x_1+500x_2}$ 円

問題から導かれる素直な線形計画問題

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & 600x_1+500x_2 \\
\text{subject to} \quad & 3x_1+1x_2\leq 45\times 10^3 \\
& 1x_1+2x_2\leq 40\times 10^3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

問題から導かれる素直な線形計画問題

$$\begin{aligned} \text{maximize}\quad & 600x_1 + 500x_2 \\ \text{subject to}\quad & 3x_1 + 1x_2 \le 45\times 10^3 \\ & 1x_1 + 2x_2 \le 40\times 10^3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

線形計画問題の不等式標準形

目的関数は最小化される

-1倍して最小化問題に変形する

制約式は「左辺:変数と係数≧右辺:定数」

両辺を -1倍して不等号の向きを揃える

全ての変数は非負

問題から導かれる線形計画問題の**不等式標 準形**

$$\begin{aligned} \text{minimize}\quad & -600x_1 - 500x_2 \\ \text{subject to}\quad & -3x_1 - 1x_2 \ge -45\times 10^3 \\ & -1x_1 - 2x_2 \ge -40\times 10^3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

問題から導かれる素直な線形計画問題

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 600x_1 + 500x_2 \\ \text{subject to} \quad & 3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3 \\ & 1x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

線形計画問題の等式標準形

目的関数は最小化される

-1倍して最小化問題に変形する

制約式は「左辺:変数と係数≧右辺:定数」

変数を追加し、両辺を等しくする

全ての変数は非負

問題から導かれる線形計画問題の等式標準形

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & -600x_1 - 500x_2 \\ \text{subject to} \quad & 3x_1 + 1x_2 + x_3 = 45 \times 10^3 \\ & 1x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

演習課題2解答例

課題1: 対応する線形計画問題の不等式標準形を示しなさい。

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -600x_1 - 500x_2 \\ \\ \text{subject to} & -3x_1 - 1x_2 \geq -45000 \\ & -x_1 - 2x_2 \geq -40000 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

課題2: 不等式標準形を等式標準形に書換えなさい。

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -600x_1 - 500x_2 \\ \\ \text{subject to} & 3x_1 + 1x_2 + x_3 = 45000 \\ & 1x_1 + 2x_2 + x_4 = 40000 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

復習
標準形への変形

全ての線形計画問題は標準形で表現できる

- 両辺を -1倍して、最大化問題を最小化問題に変形する
- 〃 不等号の向きを揃える
- 一つの等式制約を2つの不等式制約に置き換える

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad x_1 + x_2 \geq 0, -x_1 - x_2 \geq 0$$

- 一つの自由変数を2つの非負変数に置き換える

$$x = x_1 - x_2 \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

- 変数を追加して不等式制約を等式制約に置き換える

$$x_1 + x_2 \leq 1 \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_3 \geq 0$$
$$x_1 + x_2 \geq 1 \qquad x_1 + x_2 - x_3 = 1, \quad x_3 \geq 0$$

演習課題2解答例

課題3: 総当たりによる解法を用いて最適解を求めなさい。

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to
$$
\begin{aligned}
3x_1 + 1x_2 + 1x_3 \qquad &= 45000 \\
1x_1 + 2x_2 \qquad + 1x_4 &= 40000
\end{aligned}
\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
$$

①
$$
\begin{aligned}
3x_1 + 1x_2 &= 45000 \\
1x_1 + 2x_2 &= 40000
\end{aligned}
$$

目的関数値 $-13,500,000$ 　 $x_1 = 10000$, $x_2 = 15000$

②
$$
\begin{aligned}
3x_1 + 1x_3 &= 45000 \\
1x_1 + 0x_3 &= 40000
\end{aligned}
$$

$x_1 = 40000$

$\cancel{x_3 = -75000}$

③
$$
\begin{aligned}
3x_1 + 0x_4 &= 45000 \\
1x_1 + 1x_4 &= 40000
\end{aligned}
$$

目的関数値 $-8,000,000$ 　 $x_1 = 15000$, $x_4 = 25000$

④
$$
\begin{aligned}
1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\
2x_2 + 0x_3 &= 40000
\end{aligned}
$$

目的関数値 $-10,000,000$ 　 $x_2 = 20000$, $x_3 = 25000$

⑤
$$
\begin{aligned}
1x_2 + 0x_4 &= 45000 \\
2x_2 + 1x_4 &= 40000
\end{aligned}
$$

$x_2 = 45000$

$\cancel{x_4 = -50000}$

⑥
$$
\begin{aligned}
1x_3 + 0x_4 &= 45000 \\
0x_3 + 1x_4 &= 40000
\end{aligned}
$$

目的関数値 0 　 $x_3 = 45000$, $x_4 = 40000$

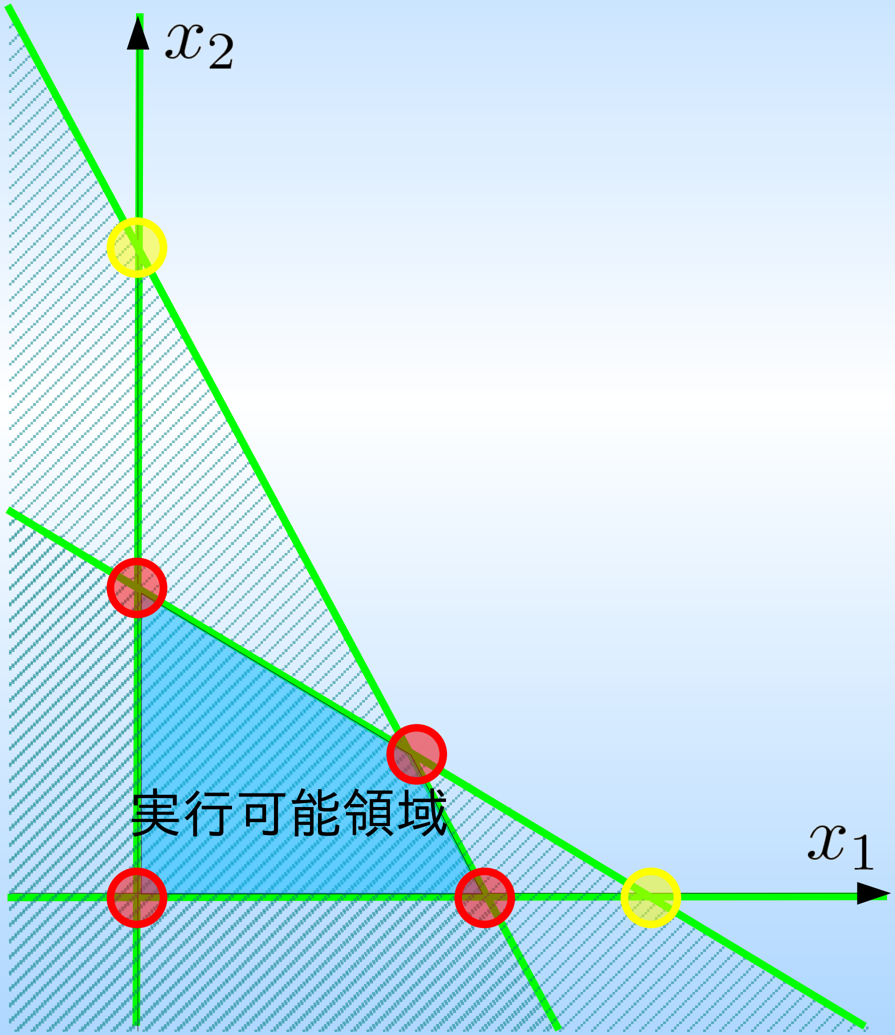
復習

- 等式標準形にもとづく総当たりによる解法

1. 等式制約と変数の数に対応して、
全ての組み合わせの連立方程式を解く
2. 変数の非負条件を満たす解について目的関数を求める
3. 最小(最大)の目的関数値を与える解が最適解となる。

- 利点(素朴な総当たり法に比べて)
  - 制約条件が非負条件に替り、方程式を解くだけで実行可能性を知ることができる。
- 問題点(それでも解決していない)
  - 連立方程式の組み合わせ数が爆発的に増加する
  - 不必要な連立方程式も解く必要がある

等式標準形の総当たり解法の問題点

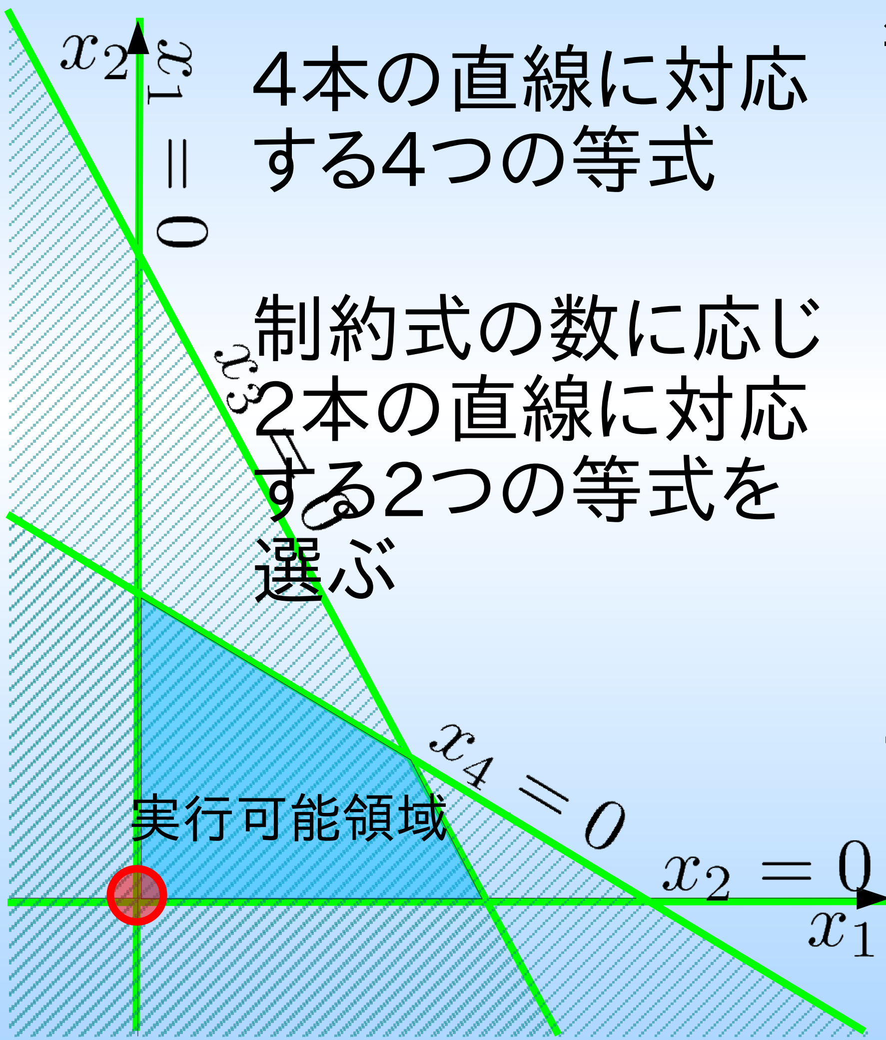


- 連立方程式の組合せ数が爆発的に増加する
  n 変数、N 制約式なら

$$ {}_nC_N = \frac{n!}{(n+1-N)!N!} $$

- 不必要な連立方程式も解く必要がある
  - 最適解の可能性がある
  - 最適解ではない

等式標準形の総当たり解法
交点を求める方法



4本の直線に対応する4つの等式

制約式の数に応じ2本の直線に対応する2つの等式を選ぶ

等式標準形(4変数、2制約式)

maximize

$600x_1 + 500x_2$

subject to

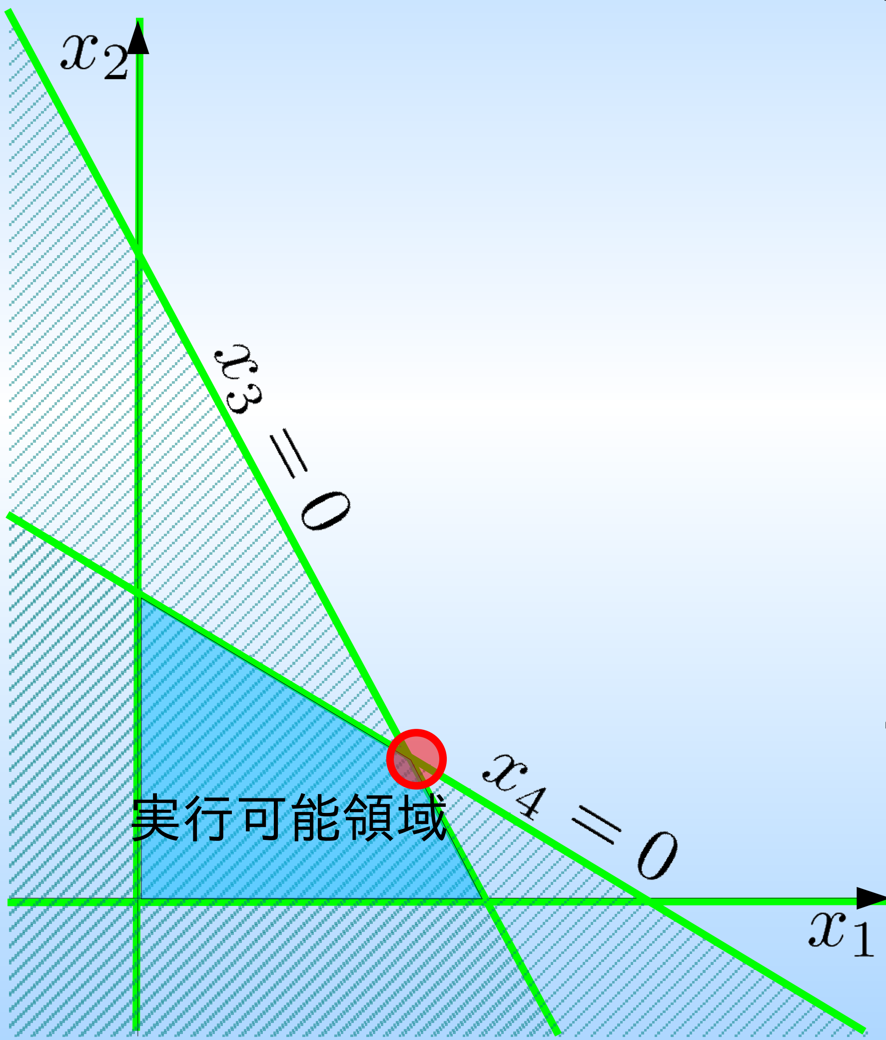
$$\cancel{3x_1+1x_2}+1x_3 = 45000$$
$$\cancel{x_1+2x_2} \qquad +1x_4 = 40000$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

2つの等式 $x_1 = 0, x_2 = 0$

は交点と連立方程式を与える

$$x_3 = 45000, x_4 = 40000$$

等式標準形の総当たり解法
交点を求める方法



等式標準形(4変数、2制約式)

maximize

$600x_1 + 500x_2$

subject to

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 1x_2 + \cancel{1x_3} \qquad &= 45000 \\
1x_1 + 2x_2 \qquad + \cancel{1x_4} &= 40000 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

2つの等式　$x_3 = 0, x_4 = 0$

は交点と連立方程式を与える

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 1x_2 &= 45000 \\
1x_1 + 2x_2 &= 40000
\end{aligned}
$$

$$x_1 = 10000, x_2 = 15000$$

等式標準形のもと交点を求める

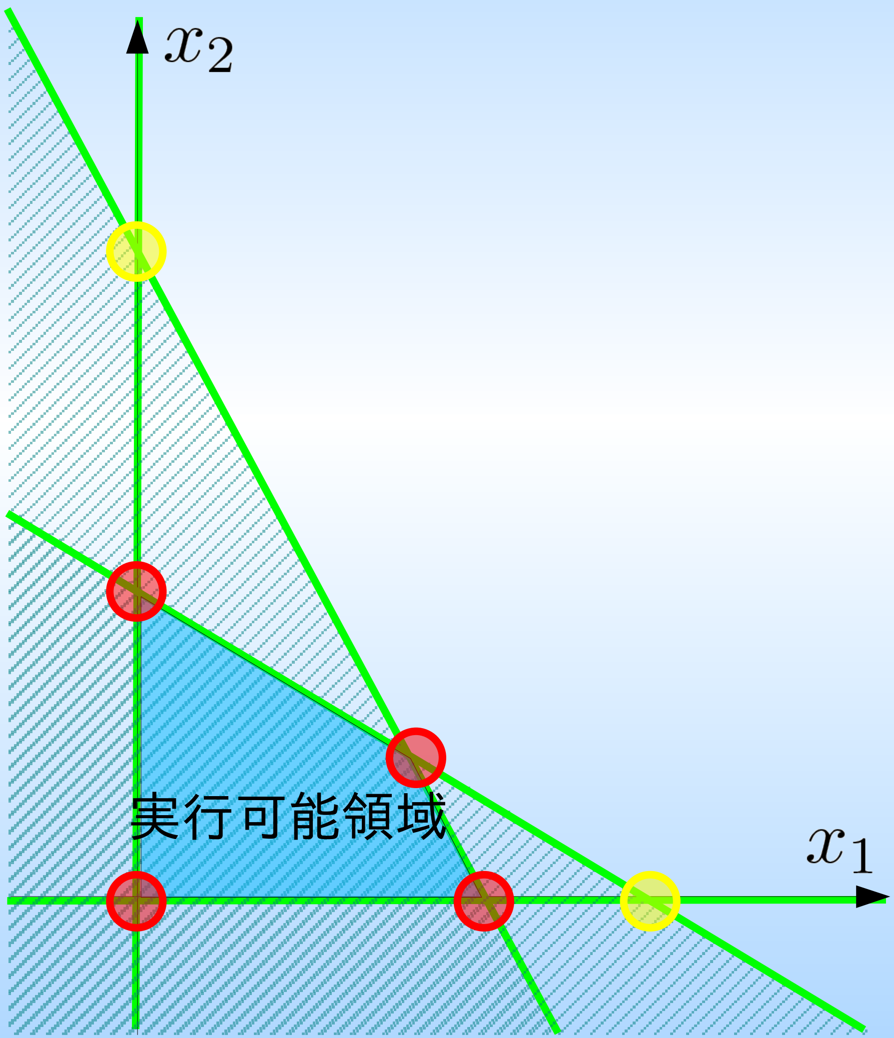
- 交点を求める

  1. いくつかの変数を選び、その値を 0 とする
     n 変数、N 制約式なら、$n-N$ 個の変数を選ぶ
     ※ 非基底変数と呼ぶ
  2. 残りの N 変数は、その値を連立方程式方程式を解いて定めることができる
     ※ 基底変数と呼ぶ

  ※ こうして定めた解を基本解と呼ぶ

  （1で選ぶ各変数に、2次元なら直線が対応している）

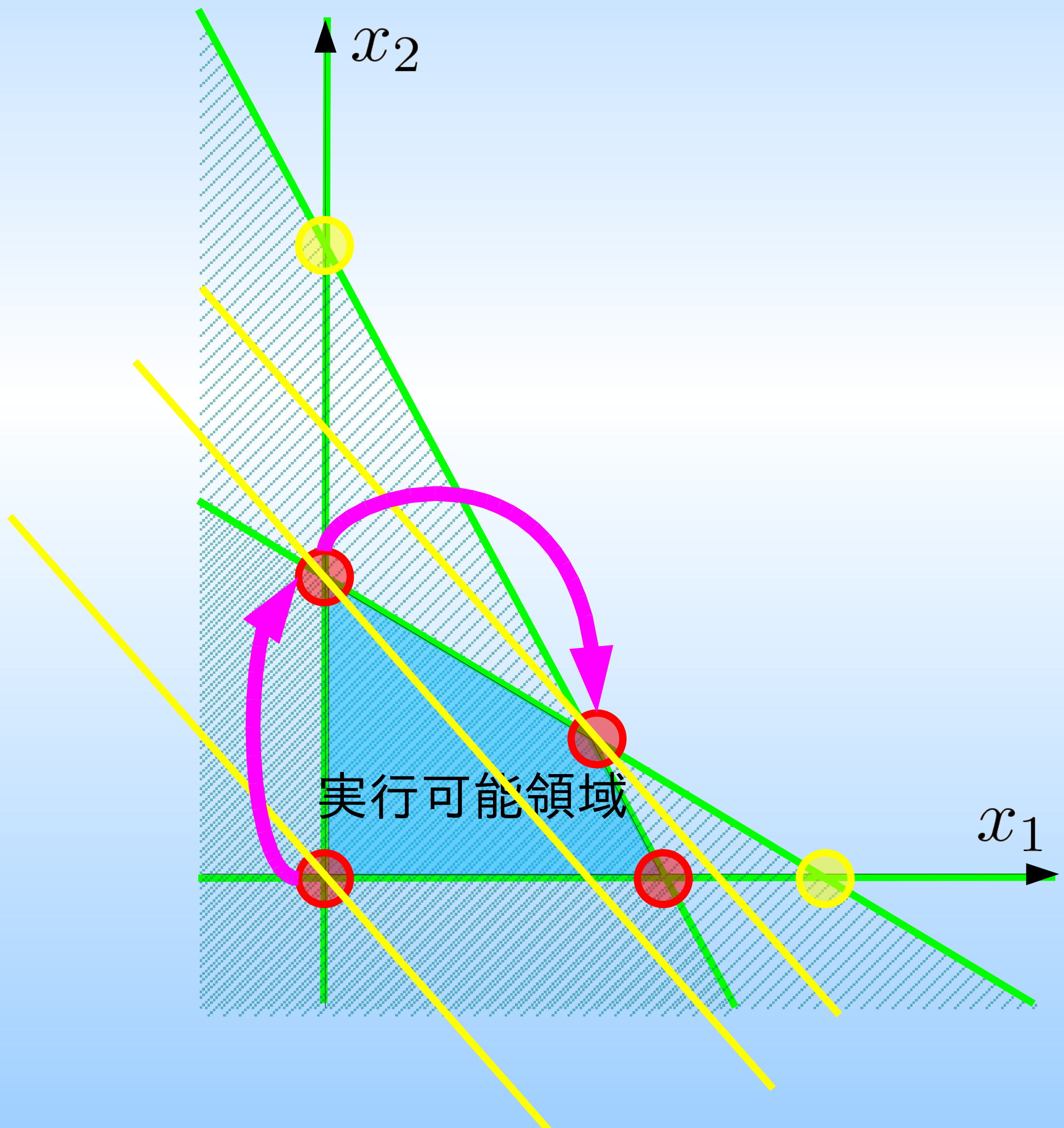
等式標準形の総当たり解法の問題点



- 全ての交点を求める際に不必要な連立方程式も解く必要がある
- 最適解は実行可能領域の端点に存在する
- 実行可能領域の端点だけを求めれば十分

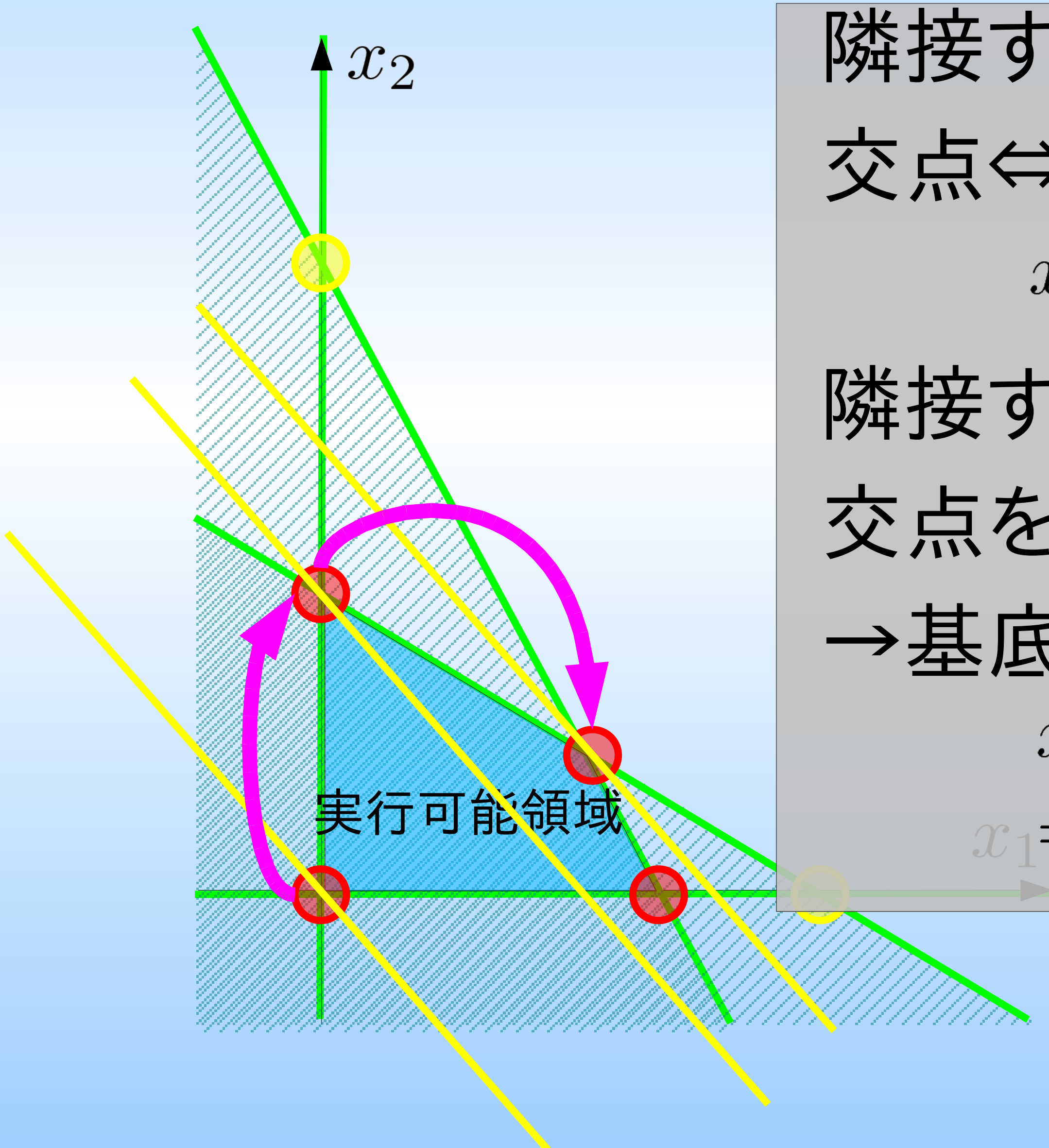
※実行可能解の端点だけを調べて最適解を探す方法→**単体法**

単体法の基本的なアイディア



- 実行可能領域の端点のうち、一つがあらかじめ分かっているものとし、これを最初の交点とする
- 隣接する端点のうち、目的関数を改善するものを選び、交点を更新する
- 最適点に辿りつくまで更新を繰り返す

単体法の基本的なアイディア



隣接する端点を求める

交点⇔基底/非基底変数の撰択

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3, x_4$$

隣接する交点＝

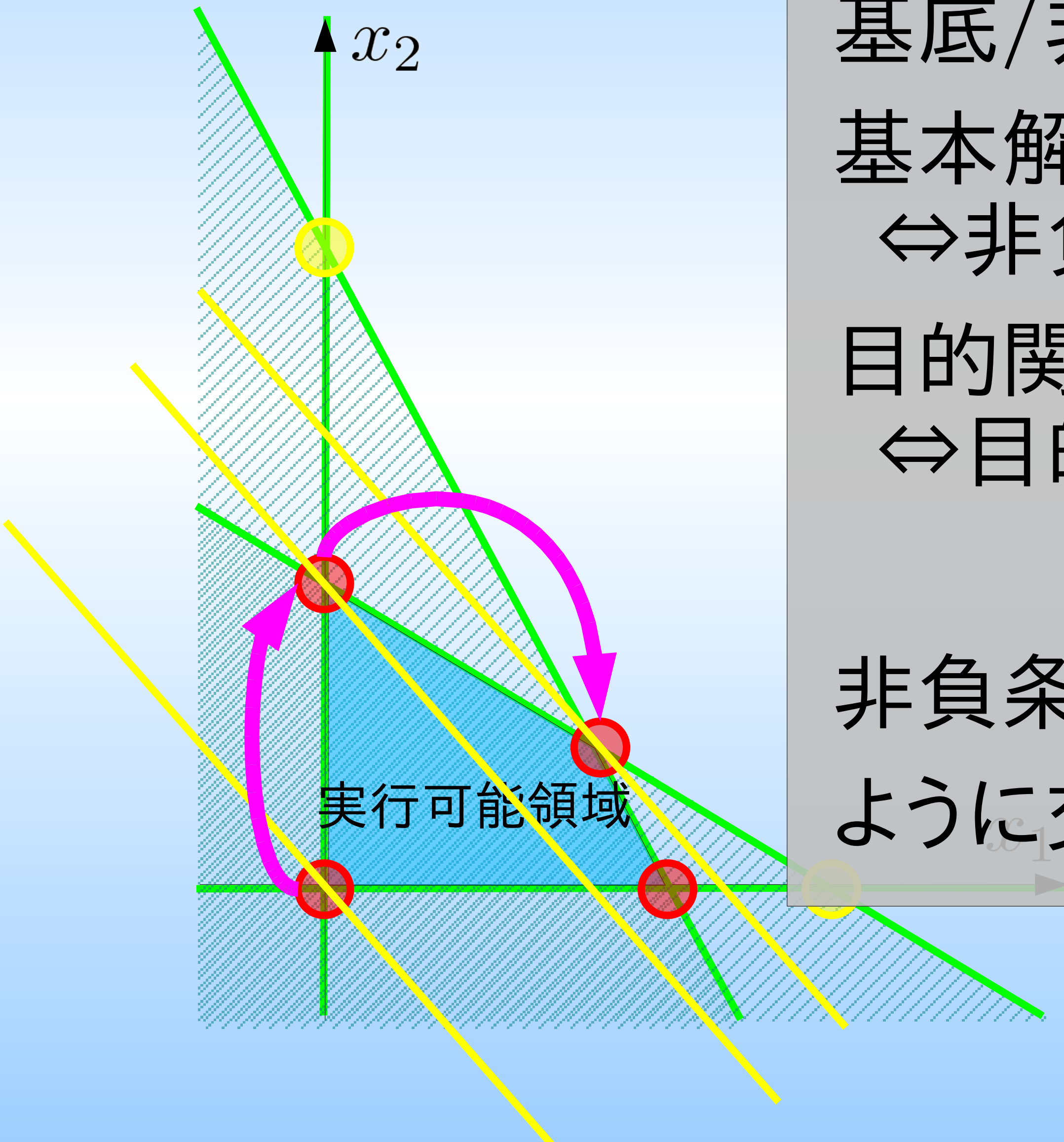
交点を成す直線が1つだけ異なる

→基底/非基底変数を1組替える

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3, x_4$$

$$\Longrightarrow x_1 = 0, x_2, x_3, x_4 = 0$$

単体法の基本的なアイディア



基底/非基底変数の交替候補

基本解が実行可能領域の端点
 ⇔非負条件を満たす

目的関数が改善する
 ⇔目的関数が減少する

非負条件を満し、目的関数が減る
ように交替させる変数を選ぶ

単体法

1. 目的関数を z として変数と見做し、制約式を追加
2. 基底変数に z を含み、基本解が非負条件を満たすように変数を選ぶ
3. 次の条件で基底/非基底変数の交替候補を選ぶ
   a. 交替後も非負条件を満す
   b. 交替により目的関数が改善する
4. 条件を満す候補がなくなるまで交替を繰り返す

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize } z \\
\text{subject to} \\
z + 600x_1 + 500x_2 = 0 \\
\quad 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 \qquad\quad = 45000 \\
\quad 1x_1 + 2x_2 \qquad\quad + 1x_4 = 40000 \\
\qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

非基底変数: $x_1 = 0, x_2 = 0$

基本解:

$(z, x_3, x_4) = (0, 45000, 40000)$

(例)

単体法

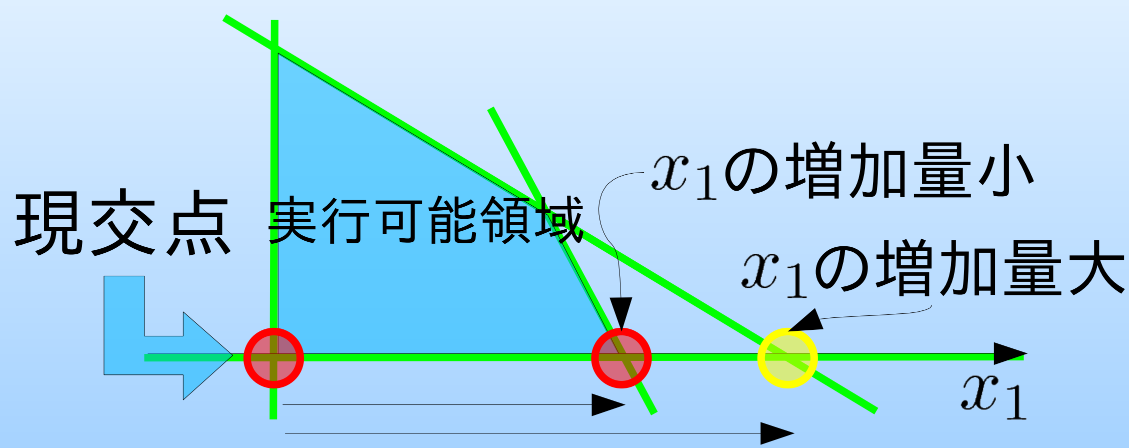
- x_1 とx_2が非基底変数

$$
\begin{array}{lrrrrl}
 & z+600x_1 & +500x_2 & & & = 0 \\
① & 3x_1 & +1x_2 & +x_3 & & = 45000 \\
② & 1x_1 & +2x_2 & & +x_4 & = 40000
\end{array}
$$

  残り部分が連立方程式

- 交替候補を非基底変数から探す
  x_1, x_2のどちらかが正になる、どちらでも z は減少
- x_1の最大増加量は
  ①で15000,②で40000
  x_2の最大増加量は
  ①で45000,②で20000

- 基底変数になる変数の値は増加する(0→非負)
- 非基底変数になる変数は次交点を成す直線(2次元の場合)に対応する
- 新しい基底変数の大小関係は下図の状況に対応する



シンプレックス表

- 交点の更新を表の上の操作で行う
  等式標準形からシンプレックス表を作る

例：

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize } z \\
&\text{subject to} \\
&\quad 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 \qquad\quad = 45000 \\
&\quad 1x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + 1x_4 = 40000 \\
&\qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \ \geq 0 \\
&z + 600x_1 + 500x_2 = 0
\end{aligned}
$$

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45000	
0	1	2	0	1	40000	
1	600	500	0	0	0	

全ての等式の係数と右辺の定数を記入する

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45000	
0	1	2	0	1	40000	
1	600	500	0	0	0	

非基底変数
値は 0 (零)

基本解

全ての非負変数が非負(非基底変数はゼロ)なので、
基本解は実行可能解

- 基底変数/非基底変数の交替候補を探す
- 目的関数を含む等式(最下段)において、係数が正の非基底変数が基底変数になれば、目的関数は減少する
- 非基底変数の係数が大きいほど、目的関数は速く減少するものと考えて

ここでは x_1 を次の基底変数の候補とする

•基底変数/非基底変数の交替候補を探す
•目的関数を含む等式(最下段)において、係数が正の非基底変数が基底変数になれば、目的関数は減少する
•非基底変数の係数が大きいほど、目的関数は速く減少するものと考えて

ここでは x_1を次の基底変数の候補とする

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量	
0	3	1	1	0	45000	15000	$= 45000/3$
0	1	2	0	1	40000	40000	$= 40000/1$
1	600	500	0	0	0		

•各制約式の定数を x_1 の係数で割って最大増加量を求める
•最小の最大増加量を与える制約式の基底変数を次の非基底変数の候補とする

ここでは x_3 を次の非基底変数の候補　とする

ここでは x_1 を次の基底変数の候補とする

ここでは x_3 を次の基底変数の候補とする

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45000	
0	1	2	0	1	40000	
1	600	500	0	0	0	

$\times 1/3$

新しい基底変数に関して連立方程式を解く

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	1	2	0	1	40000	
1	600	500	0	0	0	

$-\times 1$

$-\times 600$

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	5/3	-1/3	1	25000	
1	0	300	-200	0	-9E6	

新しい基底変数に関して連立方程式を解く

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	基本解 定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	5/3	-1/3	1	25000	
1	0	300	-200	0	-9E6	

全ての非負変数が非負なので、基本解は実行可能解

目的関数の式に正の係数を持つ非基底変数は唯一つ

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量	
0	1	1/3	1/3	0	15000	45000	$= 15000/(1/3)$
0	0	5/3	-1/3	1	25000	15000	$= 25000/(5/3)$
1	0	300	-200	0	-9E6		

新しい基底変数に関して連立方程式を解く

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	5/3	-1/3	1	25000	
1	0	300	-200	0	-9E6	

$\times 3/5$

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	1	-1/5	3/5	15000	
1	0	300	-200	0	-9E6	

$- \times 1/3$

$- \times 300$

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	0	2/5	-1/5	10000	
0	0	1	-1/5	3/5	15000	
1	0	0	-140	-180	-135E5	

シンプレックス表

基本解

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	0	2/5	-1/5	10000	
0	0	1	-1/5	3/5	15000	
1	0	0	-140	-180	-135E5	

全ての非負変数が非負なので、基本解は実行可能解

目的関数の式に正の係数を持つ非基底変数は無いので、これ以上の改善はできない。

この時点で最適解が基本解として得られている

$$x_1 = 10000$$
$$x_2 = 15000$$
$$x_3 = 0$$
$$x_4 = 0$$
$$z = -13,500,000$$

単体法(simplex method)
最も基本的な単体法の手順

1. 目的関数を変数として含む制約式を構成する
2. 基本解が実行可能解となる基底/非基底変数を選ぶ
3. 目的関数を減少する新しい基底変数を選ぶ
4. 基底変数の最大増加量を小さくする非基底変数を選ぶ、
5. 基底変数・非基底変数の交換で得た連立方程式を解く
6. 目的関数を増加できる限り変数の交換を繰り返す
7. 目的関数を改善できなくなったら最適解が求まっている

問題点

　最初の基本解撰択法、改善の停止と最適性の対応

次回：巡回と最小添字規則

次々回以降：単体法の改良

演習問題

名前･学年･学籍番号を記入

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g	珈琲牛乳(100g	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料･珈琲牛乳の1日当り生産量は？

上記の最適化問題について、

課題1: 単体法を用いて最適解を求めなさい

課題2：グラフを描き、課題1で辿った端点を示しなさい

課題3：授業の感想･意見があれば書いてください