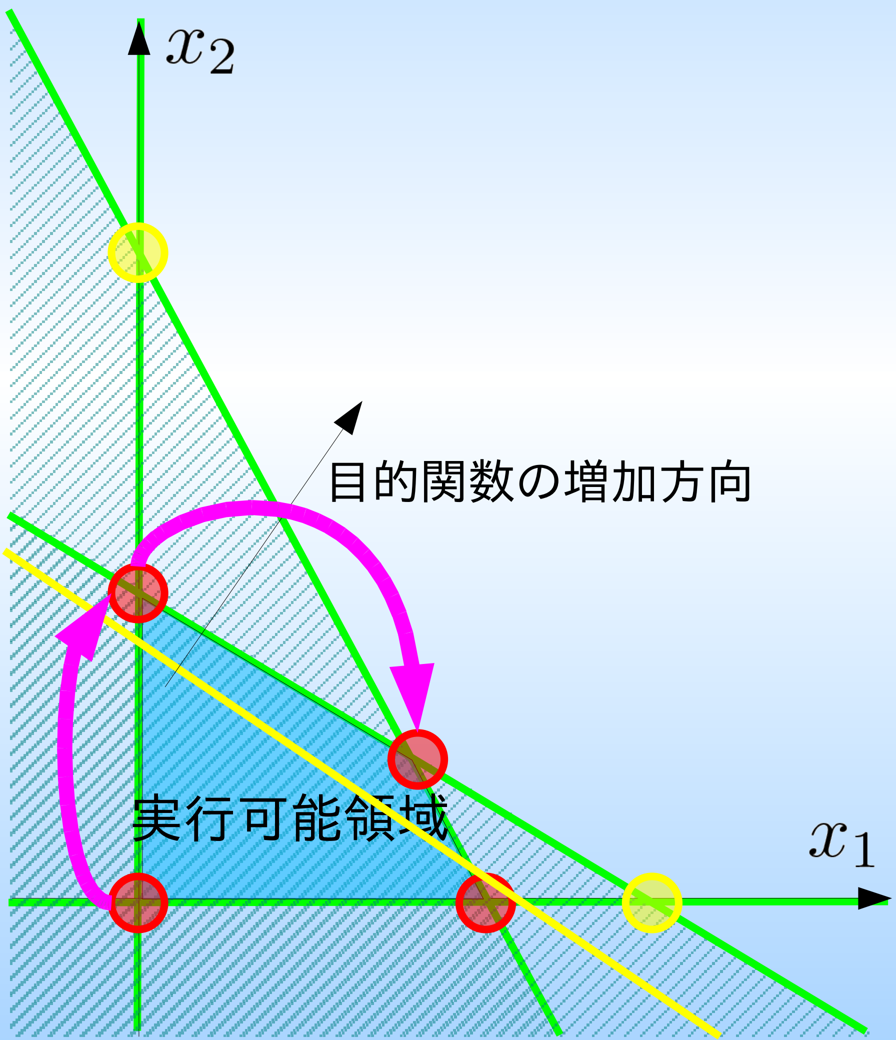
# 数理計画法

## 第6回：単体法の2段解法
## （2段目）

# 復習:単体法の2段解法

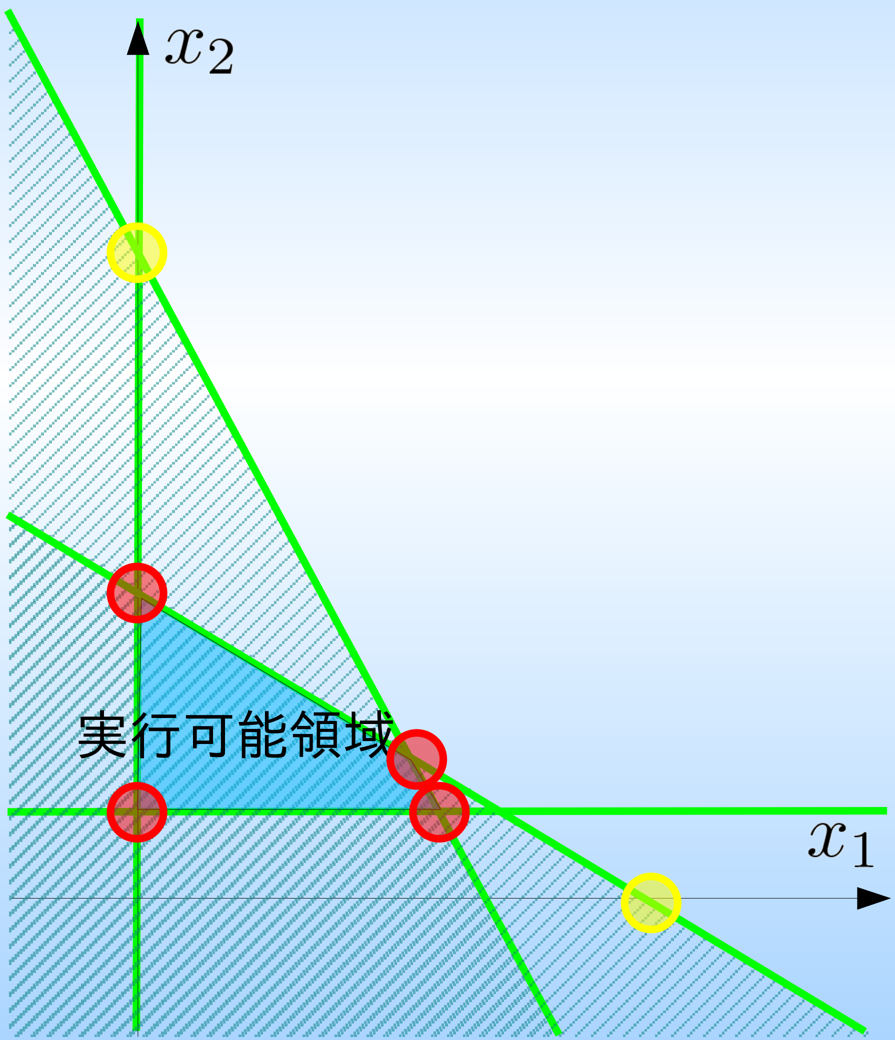



•原点が実行可能領域に有る場合

maximize
$600x_1 + 500x_2$
subject to
$3x_1 + x_2 \leq 45 \times 10^3$
$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$
$x_1, x_2 \geq 0$

等式標準形において、slack 変数の係数が全て正であれば slack 変数を基底変数とした基本解が実行可能解となり初期解に利用できる。

# 復習:単体法の2段解法




- 原点が実行可能領域に無い場合

maximize
$600x_1 + 500x_2$
subject to
$3x_1 + x_2 \leq 45 \times 10^3$
$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$
$x_2 \geq 10 \times 10^3$
$x_2 - x_5 = 10 \times 10^3$
$x_1, x_2 \geq 0$

~~等式標準形において、slack 変数の係数が全て正であれば slack 変数を基底変数とした基本解が実行可能解となり初期解に利用できる。~~

# 復習:単体法の2段解法

minimize $x_6$

subject to

$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 + x_3 &= 45 \\
x_1 + 2x_2 + x_4 &= 40 \\
x_2 - x_5 + x_6 &= 10 \\
z + 6x_1 + 5x_2 &= 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0
\end{aligned}
$$

1. 等式標準形の制約式のうち、slack変数の係数が正でないものを探す
2. 1 で見つかった式に人工変数を加え新しい等式制約式を得る
3. 人工変数の総和を目的関数とする最小化問題を単体法を用いて解く
4. 3 で得た最適値が0であれば、最適解を元の問題の初期解として採用する

# 復習:単体法の2段

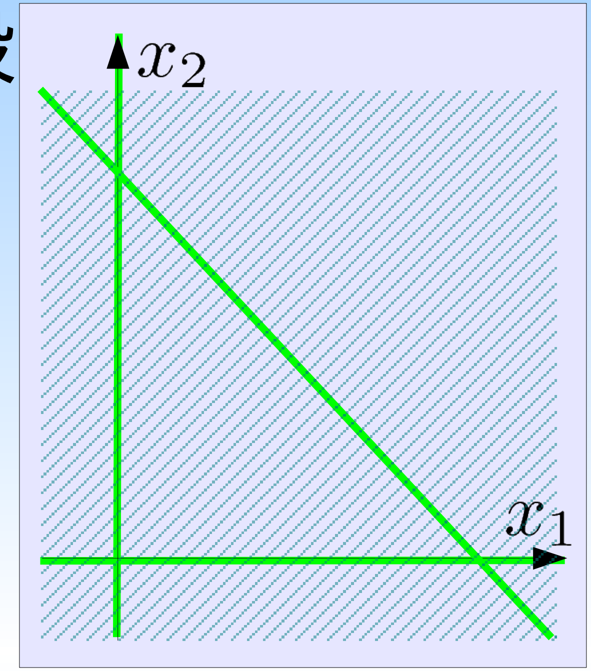
minimize $z = x_1 + 2x_2$

subject to

$$x_1 + x_2 \le 1$$

$$x_1 + x_2 \ge 1$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$




課題1: グラフを描き、原点が実行可能領域ではないことを確認する。

課題2: 2段階 simplex 法の第1段階を用いて実行可能領域の端点を見つける。

# 復習:単体法の2段解法

**等式標準形**

minimize $z$

subject to

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 1\\
x_1 + x_2 - x_4 &= 1\\
z - x_1 - 2x_2 &= 0\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

**人工問題**

minimize $z(= x_5)$

subject to

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\quad &= 1\\
x_1 + x_2 - x_4 + x_5 &= 1\\
z \qquad\qquad\quad - x_5 &= 0\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

課題1: グラフを描き、原点が実行可能領域ではないことを確認する。

課題2: 2段階 simplex 法の第1段階を用いて実行可能領域の端点を見つける。

# 復習:単体法の2段解法

- 人工問題の等式標準形からsimplex 表を準備する

人工問題

minimize $z(=x_5)$

$= -x_1 - x_2 + x_4 + 1$

subject to

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 \quad\quad\quad &= 1 \\ x_1+x_2 \quad -x_4+x_5 &= 1 \\ z+x_1+x_2 \quad -x_4 \quad\quad &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

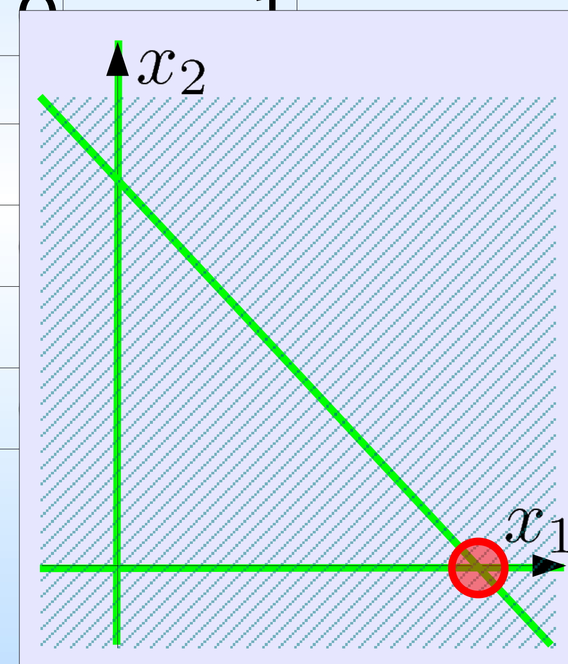
- simplex 表

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| 1 | 1 | 0 | −1 | 1 | 1 | |
| 1 | 1 | 0 | −1 | 0 | 1 | |

# 復習:単体法の2段解法

| z | $x_1$ ~~非~~ | $x_2$ 非 | $x_3$ 非 | $x_4$ 非 | $x_5$ | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | $/1 = 1$ |
| 0 | 1 | 1 | 0 | −1 | 1 | 1 | $/1 = 1$ |
| 1 | 1 | 1 | 0 | −1 | 0 | 1 | |

| z | $x_1$ | $x_2$ 非 | $x_3$ 非 | $x_4$ 非 | $x_5$ | | 量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | | | |
| 0 | 0 | 0 | −1 | −1 | | | |
| 1 | 0 | 0 | −1 | −1 | | | |




- 最適解を得る

$$z = 0, x_1 = 1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0$$

- 最適値=0 なので、これを初期解に用いることができる

# 単体法の2段解法の原理

- 原点を初期解とする
  ＝slack変数を基底変数、それ以外を非基底変数にする

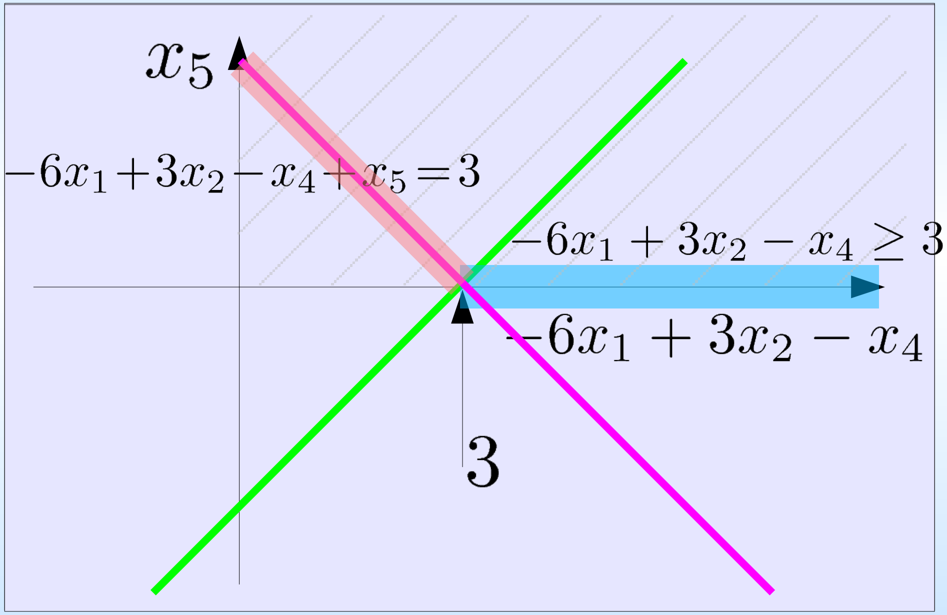
等式標準形

minimize

$$z = -6x_1 + 6x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 \phantom{+ x_3} &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$




- 原点が実行可能領域に無い
  ＝基底変数の非負条件が満たされない
  例: $-6x_1 + 3x_2 - x_4 = 3$

$$x_1, x_2, x_3 = 0 \Rightarrow x_4 = -3 < 0$$

# 単体法の2段解法、2段目

等式標準形

minimize

$$z = -6x_1 + 6x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

人工問題の等式標準形

minimize

$$z$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 + \boxed{x_5} &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 + \boxed{x_6} &= 3 \\ z - 11x_1 + 12x_2 - x_4 &= 18 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

- slack変数の係数が負なので「slack変数を基底変数、それ以外を非基底変数」とすると、非負条件を満たせない。→2段解法を利用する

# 単体法の2段解法、2段目

- 初期のsimplex表

| $z$ | $x_1$ 非 | $x_2$ 非 | $x_3$ | $x_4$ 非 | $x_5$ | $x_6$ | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 | |
| 0 | -5 | 9 | 0 | 0 | 1 | 0 | 15 | |
| 0 | -6 | 3 | 0 | -1 | 0 | 1 | 3 | |
| 1 | -11 | 12 | 0 | -1 | 0 | 0 | 18 | |

- 1段目終了時のsimplex表

| $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ 非 | $x_4$ | $x_5$ 非 | $x_6$ 非 | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 3/11 | 0 | -1/11 | 0 | 3/11 | |
| 0 | 0 | 0 | -13/11 | 1 | 8/11 | -1 | 9/11 | |
| 0 | 0 | 1 | 5/33 | 0 | 0 | 0 | 20/11 | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | |

- 人工問題の最適解

$$(z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 3/11, 20/11, 0, 9/11, 0, 0)$$

# 単体法の2段解法、2段目

- 人工問題の最適解から人工変数を除けば、
  $$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3/11, 20/11, 0, 9/11)$$
  基底変数: $x_1, x_2, x_4$　　非基底変数: $x_3$

等式標準形

```
minimize
```

$$z = -6x_1 + 6x_2$$

```
subject to
```

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

基底変数の連立方程式

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 &= 3 \end{aligned}$$

の解は、人工問題の最適解

$$\begin{aligned} x_1 &= 3/11 \\ x_2 &= 20/11 \\ x_4 &= 9/11 \end{aligned}$$

- 基底変数を $x_1, x_2, x_4$ 非基底変数を $x_3$ として、単体法の手順を開始すれば良い

# 単体法の2段解法、2段目

- 基底変数: $x_1, x_2, x_4$ 非基底変数: $x_3$
  元の等式標準形からsimplex表を作る

| $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ 非 | $x_4$ | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 3 | 1 | 0 | 6 | |
| 0 | -5 | 9 | 0 | 0 | 15 | |
| 0 | -6 | 3 | 0 | -1 | 3 | |
| 1 | 6 | -6 | 0 | 0 | 0 | |

- 一度連立方程式を解いて、基本解を得る

| $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ 非 | $x_4$ | 定数 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 3/11 | 0 | 3/11 |
| 0 | 0 | 1 | 5/33 | 0 | 20/11 |
| 0 | 0 | 0 | -13/11 | 1 | 9/11 |
| 1 | 0 | 0 | -8/11 | 0 | 102/11 |

- 非基底変数の係数が全て負なので最適解

# 単体法の2段解法、2段目

- 元の標準形まで戻らなくても、
  人工問題の最終段階の simplex 表を削って

| $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ 非 | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 3/11 | 0 | -1/11 | 0 | 3/11 | |
| 0 | 0 | 0 | -13/11 | 1 | 8/11 | -1 | 9/11 | |
| 0 | 0 | 1 | 5/33 | 0 | 0 | 0 | 20/11 | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | |

- 基本解を得ることができる

| $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ 非 | $x_4$ | 定数 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 3/11 | 0 | 3/11 |
| 0 | 0 | 0 | -13/11 | 1 | 9/11 |
| 0 | 0 | 1 | 5/33 | 0 | 20/11 |

- 目的関数値の段は、定義より計算

$$z = -6x_1 + 6x_2 = -6(-\frac{3}{11}x_3 + \frac{3}{11}) + 6(-\frac{5}{33}x_3 + \frac{20}{11}) = \frac{8}{11}$$

# 単体法の2段解法、2段目

- 元の標準形まで戻らなくても、人工問題の最終段階の simplex 表を削って基本解を得ることができる

| $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ 非 | $x_4$ | 定数 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 3/11 | 0 | 3/11 |
| 0 | 0 | 0 | -13/11 | 1 | 9/11 |
| 0 | 0 | 1 | 5/33 | 0 | 20/11 |

- 目的関数値の段は、定義より計算

$$z = -6x_1 + 6x_2 = -6(-\frac{3}{11}x_3 + \frac{3}{11}) + 6(-\frac{5}{33}x_3 + \frac{20}{11})$$

$$= \frac{8}{11}x_3 + \frac{102}{11}$$

| $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ 非 | $x_4$ | 定数 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -8/11 | 0 | 102/11 |

- 非基底変数の係数が全て負なので最適解

# 2段階単体法(2stage simplex method)

第1段階:初期基底解を求めるための線形計画問題を解く

・元の問題の等式標準形に以下の操作を施し人工問題を作る。
(1)スラック変数の係数が正でない制約式に人工変数を加える
(2)人工変数の総和から成る人工目的関数を定める

・補助問題の最適解を単体法を用いて求める

※初期基底変数はsimplex表の目的関数から消去しておく
※最適値が 0 ならば元の問題の初期基本解として利用できる

第2段階:元の問題と同等の線形計画問題を解く

・最終段階のsimplex表から人工変数を取り除き、元の目的関数の定義と併せて元の問題のsimplex表を作り単体法を適用する

※初期基底変数はsimplex表の目的関数から消去しておく
※補助問題のsimplex表に目的関数の行を加えて利用する

# 演習

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} \quad z = x_1 + 2x_2 \\
&\text{subject to} \\
&x_1 + x_2 \leq 2 \\
&x_1 + x_2 \geq 1 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$