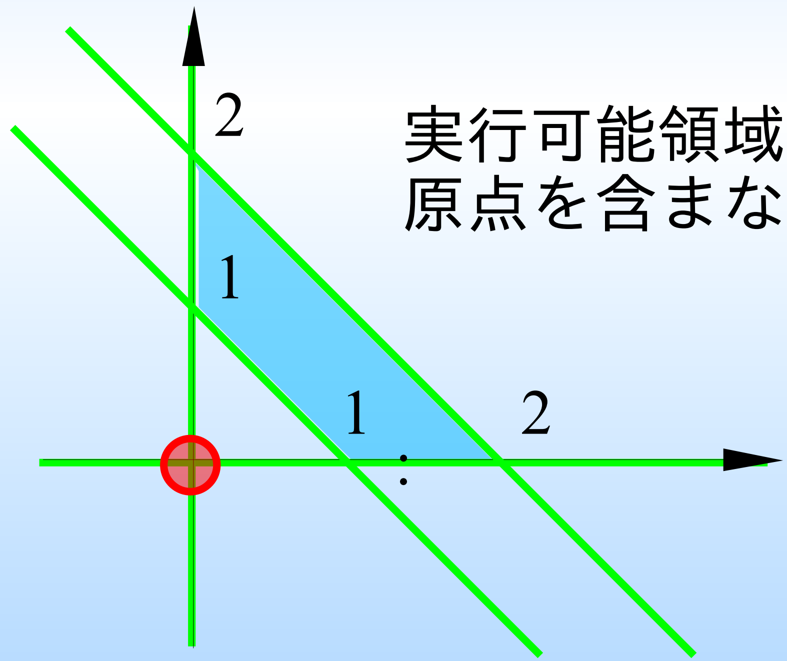
# 数理計画法

## 第7回：罰則付単体法と単体法の行列表現

# 復習：演習（単体法の2段解法）

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} \quad z = x_1 + 2x_2 \\
&\text{subject to} \\
&x_1 + x_2 \leq 2 \\
&x_1 + x_2 \geq 1 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



# 復習:演習(単体法の2段解法)

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

**等式標準形**

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad z \\
\text{subject to} \\
\qquad \begin{array}{rrrrr} x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 2 \\ x_1 & +x_2 & & -x_4 & = 1 \end{array} \\
z+x_1+2x_2 \qquad\qquad\quad = 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

**人工問題の等式標準形**

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad z^* \\
\text{subject to} \\
\begin{array}{rrrrrr} & x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 2 \\ & x_1 & +x_2 & & -x_4+x_5 & = 1 \\ z^*+ & x_1 & +x_2 & & -x_4 & = 1 \\ (z+ & x_1 & +2x_2 & & & = 0) \end{array} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

# 復習：演習（単体法の2段解法）

- 人工問題(or補助問題)の等式標準形に対応して simplex 表を作る
- 単体法を用いて第1段、第2段の線形計画問題を解く

人工問題の等式標準形

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad z^* \\
\text{subject to} \\
\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
\qquad x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\
z^* + x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
(z + x_1 + 2x_2 = 0) \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

| z,z* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | |
| 0 | 1 | 1 | 0 | -1 | 1 | 1 | |
| z* 1 | 1 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | |
| z 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

# 復習：演習（単体法の2段解法）

- 人工問題(=z* 最小化問題)を解く
  6変数3制約なので、基底/非基底変数は 3/3

| z,z* | $x_1$ ~~非~~ | $x_2$ 非 | $x_3$ | $x_4$ 非 | $x_5$ **非** | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | /1=2 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | -1 | 1 | 1 | /1=1 |
| z* 1 | 1 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | |
| z 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

| z,z* | $x_1$ | $x_2$ 非 | $x_3$ | $x_4$ 非 | $x_5$ 非 | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 ~~1~~ | 0 ~~1~~ | 1 | 1 ~~0~~ | -1 ~~0~~ | 1 ~~2~~ | -×1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | -1 | 1 | 1 | |
| z* 1 | 0 ~~1~~ | 0 ~~1~~ | 0 | 0 ~~-1~~ | -1 ~~0~~ | 0 ~~1~~ | |
| z 1 | 0 ~~1~~ | 1 ~~2~~ | 0 | 1 ~~0~~ | -1 ~~0~~ | -1 ~~0~~ | |

# 復習：演習（単体法の2段解法）

- 非基底変数の係数が非正なので終了
  z*=0 となる最適解が求まった→成功

| $z,z^*$ | $x_1$ | $x_2$ 非 | $x_3$ | $x_4$ 非 | $x_5$ 非 | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | -1 | 1 | |
| 0 | 1 | 1 | 0 | -1 | 1 | 1 | |
| z* 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | |
| z 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | -1 | -1 | |

- 元の線形計画問題= z の最小化問題を解く

| $z,z^*$ | $x_1$ | $x_2$ 非 | $x_3$ | $x_4$ 非 | $x_5$ 非 | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | -1 | 1 | |
| 0 | 1 | 1 | 0 | -1 | 1 | 1 | |
| z* 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | |
| z 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | -1 | -1 | |

# 罰則付単体法

- 2段階法における人工(補助)問題と元の問題の関係
  - まず z* を最小化して、次に z を最小化する
- 人工問題を同時に解く方法＝罰則付単体法
  - z の最小化と人工変数=0 が成立すれば良い
  - z,z* を同時(z*=0 優先)に最適化＝罰則付単体法
    - z+M×z* (M は大きな数) を最小化する
      M の影響が大きいので z* の最小化→z*=0 が優先的に実現される

# 罰則付単体法

- 2段解法の人工(補助)問題と元の問題を併せた罰則付の線形計画問題を作る

等式標準形

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad z \\
\text{subject to} \\
\qquad \begin{array}{rrrrrl}
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 2 \\
 & x_1 & +x_2 & & -x_4 & = 1 \\
z & +x_1 & +2x_2 & & & = 0
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

罰則付問題の等式標準形

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad z + Mz^* \\
\text{subject to} \\
\qquad \begin{array}{rrrrrrl}
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 2 \\
 & x_1 & +x_2 & & -x_4 & +x_5 & = 1 \\
z^* & +x_1 & +x_2 & & -x_4 & & = 1 \\
(z & +x_1 & +2x_2 & & & & = 0)
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

# 罰則付単体法

- 罰則付問題の等式標準形に対応して simplex 表を作る

| $z+M\ z^*$ | $x_1$ 非 | $x_2$ 非 | $x_3$ | $x_4$ 非 | $x_4$ | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | |
| 0 | 1 | 1 | 0 | -1 | 1 | 1 | |
| 1 | 1+M | 2+M | 0 | -M | 0 | M | |

- $M$=100 とした場合

| $z+M\ z^*$ | $x_1$ 非 | $x_2$ ~~非~~ | $x_3$ | $x_4$ 非 | $x_4$ 非 | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | /1=2 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | -1 | 1 | 1 | /1=1 |
| 1 | 101 | 102 | 0 | -100 | 0 | 100 | |

| $z+M\ z^*$ | $x_1$ 0 非 | $x_2$ 0 | $x_3$ | $x_4$ 1 非 | $x_4$ -1非 | 定数 1 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ~~1~~ | ~~1~~ | 1 | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~2~~ | -×1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | -1 | 1 | 1 | -×102 |
| 1 | ~~101~~ | ~~102~~ | 0 | ~~-100~~ | ~~0~~ | ~~100~~ | |
| | -1 | 0 | | -2 | -102 | -2 | |

# 罰則付単体法

- 2段階法における人工(補助)問題と元の問題の関係
  - まず $z^*$ を最小化して、次に $z$ を最小化する
- 人工問題を同時に解く方法＝罰則付単体法
  - $z$ の最小化と人工変数$=0$ が成立すれば良い
  - $z, z^*$ を同時($z^*=0$ 優先)に最適化＝罰則付単体法
    - $z+M\times z^*$ ($M$ は大きな数) を最小化する
      $M$ の影響が大きいので $z^*$ の最小化→$z^*=0$ が優先的に実現される
- 安全な罰則( $M$ )を決める方法が無い
  - $M$ を任意の数よりも大きい数として扱う
    - 2段階法と同じ手間になる

# 線形計画問題の行列表現(等式標準形)

minimize

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_m x_m$$

subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

minimize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$$

$$\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{q} \Leftrightarrow p_j \leq q_j,\ j = 1, \ldots,$$

# 線形計画問題の行列表現(不等式標準形)

minimize

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_m x_m$$

subject to

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1m} x_m \geq b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2m} x_m \geq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nm} x_m \geq b_n$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

minimize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

# 線形計画問題の行列表現(単体法)

maximize

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$

subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

minimize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

基底変数：$\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}\} \subset \{x_1, \ldots, x_m\} \qquad (n \leq m)$

非基底変数：$\{x_{j_{n+1}}, \ldots, x_{j_m}\} = \{x_1, \ldots, x_m\} \setminus \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}\}$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}) \qquad \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} = (x_{j_{n+1}}, \ldots, x_{j_m})$$

$$\{c_{j_1}, \ldots, c_{j_m}\} = \{c_1, \ldots, c_m\} \quad \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} = (c_{j_1}, \ldots, c_{j_n}) \quad \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} = (c_{j_{n+1}}, \ldots, c_{j_m})$$

$$\{a_{kj_1}, \ldots, a_{kj_m}\} = \{a_{k1}, \ldots, a_{km}\} \qquad k = 1, \ldots, n$$

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} a_{1j_1} & \ldots & a_{1j_n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & \ldots & a_{nj_n} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} a_{1j_{n+1}} & \ldots & a_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nj_{n+1}} & \ldots & a_{nj_m} \end{pmatrix}$$

# 線形計画問題の行列表現

minimize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

minimize

$$z = \underbrace{c_{j_1}x_{j_1} + \cdots + c_{j_n}x_{j_n}}_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}} + \underbrace{c_{j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m}x_{j_m}}_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}}$$

subject to

$$\begin{array}{ccccc}
a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n}x_{j_n} & + & a_{1j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m}x_{j_m} & = & b_1 \\
a_{2j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n}x_{j_n} & + & a_{2j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m}x_{j_m} & = & b_2 \\
\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} & & \vdots \quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} & & \\
a_{nj_1}x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n}x_{j_n} & + & a_{nj_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m}x_{j_m} & = & b_n
\end{array}$$

$$\underbrace{x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}}, \underbrace{x_{j_{n+1}}, \ldots, x_{j_m}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}} \geq 0$$

# 線形計画問題の行列表現

minimize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \geq \boldsymbol{0}$$

単体法の各段階での操作は

$z$ が減少するように

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}, \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}},$ を更新

するものになる。

minimize

$$z = \underbrace{c_{j_1}x_{j_1} + \cdots + c_{j_n}x_{j_n}}_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}} + \underbrace{c_{j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m}x_{j_m}}_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}}$$

subject to

$$\underbrace{\begin{matrix} a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n}x_{j_n} \\ a_{2j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n}x_{j_n} \\ \\ a_{nj_1}x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n}x_{j_n} \end{matrix}}_{\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}} \begin{matrix} + \\ + \\ \\ + \end{matrix} \underbrace{\begin{matrix} a_{1j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m}x_{j_m} \\ a_{2j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m}x_{j_m} \\ \vdots \\ a_{nj_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m}x_{j_m} \end{matrix}}_{\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}} \begin{matrix} = b_1 \\ = b_2 \\ \\ = b_n \end{matrix}$$

$$\underbrace{x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}}, \underbrace{x_{j_{n+1}}, \ldots, x_{j_m}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}} \geq 0$$

# 演習

課題:次の線形計画問題を単体法を用いて解く

$$\begin{aligned}&\text{minimize}\ \ z = x_1 + 2x_2\\&\text{subject to}\\&x_1 + x_2 \geq 4x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0\\&x_2 \leq 3,\ \ x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

注意: 原点は実行可能領域ではありません
ヒント:

$$\begin{array}{ll}\texttt{min.} & z = x_1 + 2x_2\\ \texttt{s.t.} & x_1 + x_2 \geq 4\\ & -x_1 + 2x_2 \geq 2\\ & x_2 \leq 3\\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\texttt{min.} & z = x_1 + 2x_2\\ \texttt{s.t.} & x_1 + x_2 - x_3 = 4\\ & -x_1 + 2x_2 - x_4 = 2\\ & x_2 + x_5 = 3\\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0\end{array}$$