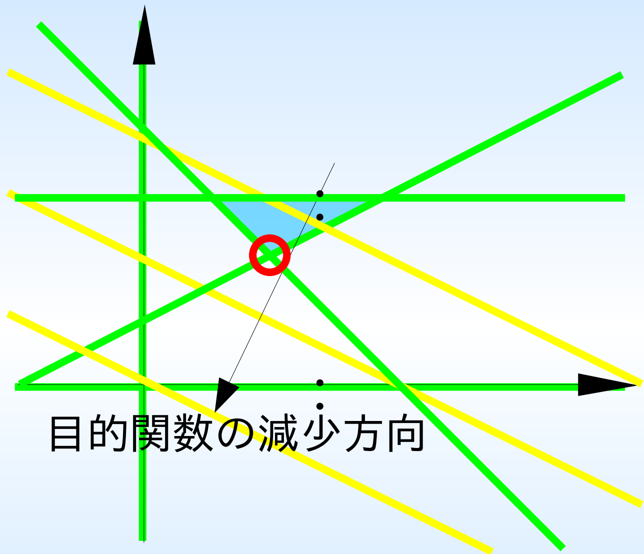
数理計画法

第8回：改訂単体法と双対問題

復習:2段階単体法と罰則付単体法

課題:次の線形計画問題を単体法を用いて解く

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad z \\
&\text{subject to} \\
&\quad x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\
&\quad -x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\
&\quad x_2 + x_5 = 3 \\
&\quad z - x_1 - 2x_2 = 0 \\
&\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$



注意: 原点は実行可能領域ではありません

復習:2段階単体法と罰則付単体法

- 2段階単体法

まず、z^* を最小化する

$z^*=0$ を得られたら

z を最小化して

元の問題の最適解を得る

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad z^* \to 0 \Rightarrow \text{minimize} \quad z \\
\text{subject to} \\
\begin{array}{rrrrrrrrl}
x_1 & +x_2 & -x_3 & & & +x_6 & & = 4 \\
-x_1 & +2x_2 & & -x_4 & & & +x_7 & = 2 \\
& x_2 & & & +x_5 & & & = 3 \\
z-x_1 & -2x_2 & & & & & & = 0 \\
z^* & +3x_2 & -x_3 & -x_4 & & & & = 6
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{array}
$$

- 罰則付単体法

十分大きな M により、

$z+Mz^*$ の最小化で、

$z^*=0$, z の最小化が

同時に実現する

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad \tilde{z} = z + Mz^* \\
\text{subject to} \\
\begin{array}{rrrrrrrrl}
x_1 & +x_2 & -x_3 & & & +x_6 & & = 4 \\
-x_1 & +2x_2 & & -x_4 & & & +x_7 & = 2 \\
& x_2 & & & +x_5 & & & = 3
\end{array} \\
\tilde{z}-x_1+(3M-2)x_2-Mx_3-Mx_4 = 6 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{array}
$$

復習:2段階単体法と罰則付単体法

- 2段階法における人工(補助)問題と元の問題の関係
  - まず z^* を最小化して、次に z を最小化する
- 人工問題を同時に解く方法＝罰則付単体法
  - z の最小化と人工変数=0 が成立すれば良い
  - z, z^* を同時($z^*=0$ 優先)に最適化＝罰則付単体法
    - $z+M \times z^*$ (M は大きな数) を最小化する
M の影響が大きいので z^* の最小化→$z^*=0$ が優先的に実現される
- 安全な罰則(M)を決める方法が無い
  - M を任意の数よりも大きい数として扱う
    - 2段階法と同じ手間になる

線形計画問題の行列表現(等式標準形)

minimize
$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$
subject to
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$$

minimize
$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
subject to
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{q} \Leftrightarrow p_j \leq q_j,\ j = 1, \ldots,$$

線形計画問題の行列表現

minimize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \geq \boldsymbol{0}$$

単体法の各段階での操作は z が減少するように $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}, \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}},$ を更新するものになる。

minimize

$$z = \underbrace{c_{j_1}x_{j_1} + \cdots + c_{j_n}x_{j_n}}_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}} + \underbrace{c_{j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m}x_{j_m}}_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}}$$

subject to

$$\begin{array}{ccccc}
\underbrace{\begin{matrix} a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n}x_{j_n} \\ a_{2j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n}x_{j_n} \\ \vdots \\ a_{nj_1}x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n}x_{j_n} \end{matrix}}_{\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}} & + & \underbrace{\begin{matrix} a_{1j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m}x_{j_m} \\ a_{2j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m}x_{j_m} \\ \vdots \\ a_{nj_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m}x_{j_m} \end{matrix}}_{\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}} & \begin{matrix} = b_1 \\ = b_2 \\ \\ = b_n \end{matrix}
\end{array}$$

$$\underbrace{x_{j_1}, \cdots, x_{j_n}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}}, \underbrace{x_{j_{n+1}}, \cdots, x_{j_m}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}} \geq 0$$

線形計画問題の行列表現(単体法)

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

原点を実行可能領域に持つ線形計画問題の不等式標準形を考える。

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \geq \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

スラック変数 $\boldsymbol{x}'^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_n)$ を導入して等式標準形とsimplex表を得る。

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= 0 \end{aligned}$$

最初のsimplex表
$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{A}$
このときの基底解は
$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = -\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

単体法の操作により各行列・ベクトルが更新されるが $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I}$ と $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{0}$ は保たれるので基底解は常に $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{0}$ であり終了時の $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{b}$ が最適解となる。

※更新される必要があるのは非基底変数の選択時に必要な $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}$ と基底変数の選択時に必要な $\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}$ と $\boldsymbol{b}$ だけ。

※単体法の操作で繰り返される $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I}$ を維持するピボット変換により誤差が蓄積する(誤差を含む係数行列を元に計算が繰り返される。)

線形計画問題の行列表現(改訂単体法)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{I}(-\boldsymbol{x}') + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
z - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= 0
\end{aligned}
$$

最初のsimplex表

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{A}$

このときの基底解は

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = -\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

単体法の操作では基底部分と非基底部分の分類が変更されるだけと考えて行列のデータはそのままで、変数の基底・非基底の区別だけを更新する。

minimize

$$
z = \underbrace{c_{j_1}x_{j_1} + \cdots + c_{j_n}x_{j_n}}_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}} + \underbrace{c_{j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m}x_{j_m}}_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}}
$$

subject to

$$
\underbrace{\begin{matrix}
a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n}x_{j_n} \\
a_{2j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n}x_{j_n} \\
\vdots \\
a_{nj_1}x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n}x_{j_n}
\end{matrix}}_{\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}}
\begin{matrix} + \\ + \\ \\ + \end{matrix}
\underbrace{\begin{matrix}
a_{1j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m}x_{j_m} \\
a_{2j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m}x_{j_m} \\
\vdots \\
a_{nj_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m}x_{j_m}
\end{matrix}}_{\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}}
\begin{matrix} = b_1 \\ = b_2 \\ \\ = b_n \end{matrix}
$$

$$
\underbrace{x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}}, \underbrace{x_{j_{n+1}}, \ldots, x_{j_m}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}} \geq 0
$$

線形計画問題の行列表現(改訂単体法)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}(-\boldsymbol{x}') + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= 0 \end{aligned}$$

最初のsimplex表

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{A}$$

このときの基底解は

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = -\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

単体法の操作では基底部分と非基底部分の分類が変更されるだけと考えて行列のデータはそのままで、変数の基底・非基底の区別だけを更新する。

maximize

$$z = \boxed{c_{j_1}x_{j_1} + \cdots} + \boxed{c_{j_n}x_{j_n}} + \boxed{c_{j_{n+1}}x_{j_{n+1}}} + \boxed{\cdots + c_{j_m}x_{j_m}}$$

subject to

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots & + & a_{1j_n}x_{j_n} & + & a_{1j_{n+1}}x_{j_{n+1}} & + & \cdots + a_{1j_m}x_{j_m} & = & b_1 \\
a_{2j_1}x_{j_1} + \cdots & + & a_{2j_n}x_{j_n} & + & a_{2j_{n+1}}x_{j_{n+1}} & + & \cdots + a_{2j_m}x_{j_m} & = & b_2 \\
 & & & & \vdots & & & & \\
a_{nj_1}x_{j_1} + \cdots & + & a_{nj_n}x_{j_n} & + & a_{nj_{n+1}}x_{j_{n+1}} & + & \cdots + a_{nj_m}x_{j_m} & = & b_n
\end{array}$$

$$\boxed{x_{j_1}, \ldots}, \boxed{x_{j_n}}, \boxed{x_{j_{n+1}}}\ \boxed{\ldots, x_{j_m}} \geq 0$$

線形計画問題の行列表現(改訂単体法)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= 0 \end{aligned}$$

最初のsimplex表

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{A}$

このときの基底解は

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}$ が正則であるなら変数の交換に必要な情報は計算で求まる。

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$$

$$z = \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}) + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$$

(必要なのは$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$の係数$-\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}$)

maximize

$$z = c_{j_1}x_{j_1} + \cdots + c_{j_n}x_{j_n} + c_{j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m}x_{j_m}$$

subject to

$$\begin{aligned} a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n}x_{j_n} + a_{1j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m}x_{j_m} &= b_1 \\ a_{2j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n}x_{j_n} + a_{2j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m}x_{j_m} &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{nj_1}x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n}x_{j_n} + a_{nj_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m}x_{j_m} &= b_n \end{aligned}$$

$$x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}, x_{j_{n+1}}, \ldots, x_{j_m} \geq 0$$

※基底・非基底変数の分類(と $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}$)だけを更新する改訂単体法が考えられる。

単体法

単体法は次の行列表現に対応するsimplex表の更新により最適解を得る。

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= 0 \end{aligned}}$$

simplex 表の更新は基底変数と非基底変数一つずつの交換対応し z が増加するように交換する変数が選ばれる。
また、その過程で必要となる $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}$ の値や $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$ の係数 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}$ を求めるために $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I}$ を保つピボット変換が実施される。

改訂単体法

改訂単体法では次の行列表現ベクトルや行列の値は更新せず、代りに基

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= 0 \end{aligned}}$$

底・非基底変数の分類を記憶し $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}$ や $\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}$ は変数の情報を元に制約式全体の係数行列から求めるものとする。
その過程で $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}$ が正則であるなら変数の交換に必要な情報は次の計算で

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ z &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}})\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{aligned}$$

求まる。

双対問題

主問題	双対問題
minimize $z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	maximize $w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ subject to $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

双対問題

minimize

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$

subject to

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &\geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &\geq b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &\geq b_n \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

主問題

maximize

$$w = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_ny_n$$

subject to

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{n1}y_n &\leq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{n2}y_n &\leq c_2 \\ &\vdots \\ a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + \cdots + a_{nm}y_n &\leq c_m \end{aligned}$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0$$

双対問題

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

n 行 *m* 列の係数行列と *m* 個の変数、
n 通りの制約式からなる主問題

m 行 *n* 列の係数行列と *n* 個の変数、
m 通りの制約式からなる双対問題

双対問題

minimize
$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$
subject to
$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &\geq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &\geq b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &\geq b_n
\end{aligned}$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

主問題

maximize
$$w = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_ny_n$$
subject to
$$\begin{aligned}
a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{n1}y_n &\leq c_1 \\
a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{n2}y_n &\leq c_2 \\
&\vdots \\
a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + \cdots + a_{nm}y_n &\leq c_m
\end{aligned}$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0$$

双対問題

minimize
$$z = 4x_1 + 4x_2 + x_3$$
subject to
$$\begin{array}{rrrcc}
2x_1 & +2x_2 & -4x_3 & \geq & 2 \\
2x_1 & & +2x_3 & \geq & 1 \\
-x_1 & +4x_2 & -x_3 & \geq & 1
\end{array}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

maximize
$$w = 2y_1 + y_2 + y_3$$
subject to
$$\begin{array}{rrrcc}
2y_1 & +2y_2 & -y_3 & \leq & 4 \\
2y_1 & & +4y_3 & \leq & 4 \\
-4y_1 & +2y_2 & -y_3 & \leq & 1
\end{array}$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

双対問題

maximize
$z = -4x_1 - 4x_2 - x_3$
subject to

$$
\begin{array}{rrrcr}
-2x_1 & -2x_2 & +4x_3 & \leq & -2 \\
-2x_1 & & -2x_3 & \leq & -1 \\
x_1 & -4x_2 & +x_3 & \leq & -1
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

maximize
$-z = -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

minimize
$w = -2y_1 - y_2 - y_3$
subject to

$$
\begin{array}{rrrcr}
-2y_1 & -2y_2 & +y_3 & \geq & -4 \\
-2y_1 & & -4y_3 & \geq & -4 \\
4y_1 & -2y_2 & +y_3 & \geq & -1
\end{array}
$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

minimize
$-w = -\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq -\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

↑と同等の問題=→の双対問題
主問題

↑と同等の問題
双対問題

minimize
$z = 4x_1 + 4x_2 + x_3$
subject to

$$
\begin{array}{rrrcr}
2x_1 & +2x_2 & -4x_3 & \geq & 2 \\
2x_1 & & +2x_3 & \geq & 1 \\
-x_1 & +4x_2 & -x_3 & \geq & 1
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

maximize
$w = 2y_1 + y_2 + y_3$
subject to

$$
\begin{array}{rrrcr}
2y_1 & +2y_2 & -y_3 & \leq & 4 \\
2y_1 & & +4y_3 & & \\
-4y_1 & +2y_2 & -y_3 & &
\end{array}
$$

$$y_1, y_2, y_3$$

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

双対定理

線形計画問題とその双対問題が右のように与えられ、$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}=(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_m)$, $\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}=(\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_n)$ 実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、最適解である。

$$\exists\tilde{\boldsymbol{x}},\exists\tilde{\boldsymbol{y}}\geq\mathbf{0}\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}\geq\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}\leq\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$
$$\Longrightarrow\forall\boldsymbol{x},\forall\boldsymbol{y}\geq\mathbf{0},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}\geq\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}\geq\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

主問題	双対問題
minimize $z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}\geq\mathbf{0}$	maximize $w=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ subject to $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y}\geq\mathbf{0}$

また、一方に最適解が存在すれば、もう一方にも最適解が存在し、最適解が与える双方の目的関数値は等しい。

$$\exists\tilde{\boldsymbol{x}}\geq\mathbf{0}\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}\geq\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}},\ \text{for}\ \forall\boldsymbol{x}\geq\mathbf{0}\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b}$$
$$\Longrightarrow\exists\tilde{\boldsymbol{y}}\geq\mathbf{0}\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}\leq\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}},\ \text{for}\ \forall\boldsymbol{y}\geq\mathbf{0}\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$

双対定理

線形計画問題とその双対問題が右のように与えられ、$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}=(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_m)$, $\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}=(\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_n)$ 実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、最適解である。

minimize	maximize
$z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$	$w=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to	subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}$
主問題	双対問題

$$\exists\tilde{\boldsymbol{x}},\exists\tilde{\boldsymbol{y}}\geq\boldsymbol{0}\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}\geq\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}\leq\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$

$$\Longrightarrow\forall\boldsymbol{x},\forall\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}\geq\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}\geq\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

証明：

$\boldsymbol{x}$と $\boldsymbol{y}$ をそれぞれの問題の任意の実行可能解とする。

$z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ の各項を不等式 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c}$ で評価すれば次の関係式が得られる。

$$z=c_1x_1+\cdots+c_mx_m\geq(a_{11}y_1+\cdots+a_{n1}y_n)x_1+\cdots+(a_{1m}y_1+\cdots+a_{nm}y_n)x_m$$

同様に $w=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b}$ から次の関係式が得られる。

$$w=b_1y_1+\cdots+b_nx_n\leq(a_{11}x_1+\cdots+a_{1m}x_m)y_1+\cdots+(a_{n1}x_1+\cdots+a_{nm}x_m)y_n$$

両式の右辺を比較すれば、一般に $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ の成立することが分かる。

$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$であれば任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$に対して次式が成立し定理が証明される。

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}\geq\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}$$

演習問題

解答用紙に名前･学年･学籍番号を記入し、提出

次の線形計画問題の双対問題を求め、単体法を用いてこれを解き、最適解の与える両者の目的関数値が等しいことを確認してください。

maximize

$$z = x_1 + x_2$$

subject to

$$\begin{array}{rrcl} x_1 & +2x_2 & \leq & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 2 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$