演習問題2

名前･学年･学籍番号を記入し、授業の感想とともに提出

ミックスジュース生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題：利益を最大化する2種類のミックスジュースの生産量は？

課題1: 対応する線形計画問題の不等式標準形を示しなさい。

課題2: 不等式標準形を等式標準形に書換えなさい。

課題3: 総当たりによる解法を用いて最適解を求めなさい。

演習課題2解答例

課題1: 対応する線形計画問題の不等式標準形を示しなさい。

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & -600x_1 - 500x_2 \\
\text{subject to} \quad & -3x_1 - 1x_2 \geq -45000 \\
& -x_1 - 2x_2 \geq -40000 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

課題2: 不等式標準形を等式標準形に書換えなさい。

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & -600x_1 - 500x_2 \\
\text{subject to} \quad & 3x_1 + 1x_2 + x_3 = 45000 \\
& 1x_1 + 2x_2 + x_4 = 40000 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

演習課題2解答例

課題3：総当たりによる解法を用いて最適解を求めなさい。

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 \quad &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 \quad + 1x_4 &= 40000 \end{aligned} \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

①
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 &= 40000 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{目的関数値 } -13,500,000 \qquad x_1 = 10000,\ x_2 = 15000}$$

②
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

$$\cancel{x_1 = 40000 \quad x_3 = -75000}$$

③
$$\begin{aligned} 3x_1 + 0x_4 &= 45000 \\ 1x_1 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

目的関数値 $-8,000,000$ $\quad x_1 = 15000$, $x_4 = 25000$

④
$$\begin{aligned} 1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\ 2x_2 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

目的関数値 $-10,000,000$ $\quad x_2 = 20000$, $x_3 = 25000$

⑤
$$\begin{aligned} 1x_2 + 0x_4 &= 45000 \\ 2x_2 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

$$\cancel{x_2 = 45000 \quad x_4 = -50000}$$

⑥
$$\begin{aligned} 1x_3 + 0x_4 &= 45000 \\ 0x_3 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

目的関数値 0 $\quad x_3 = 45000$, $x_4 = 40000$

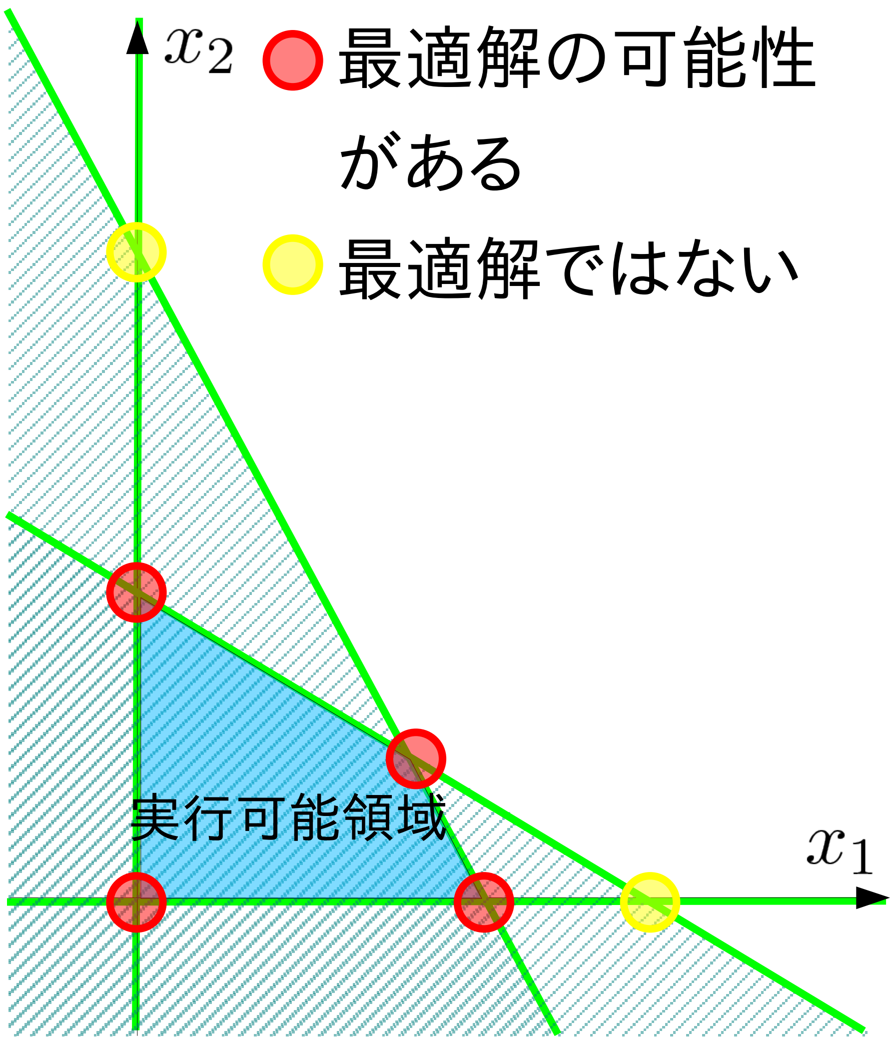
復習

- 等式標準形にもとづく総当たりによる解法

1. 等式制約と変数の数に対応して、
   全ての組み合わせの連立方程式を解く
2. 変数の非負条件を満たす解について目的関数を求める
3. 最小（最大）の目的関数値を与える解が最適解となる。

- 利点(素朴な総当たり法に比べて)
  - 制約条件が非負条件に替り、方程式を解くだけで実行可能性を知ることができる。
- 問題点(それでも解決していない)
  - 連立方程式の組み合わせ数が爆発的に増加する
  - 不必要な連立方程式も解く必要がある

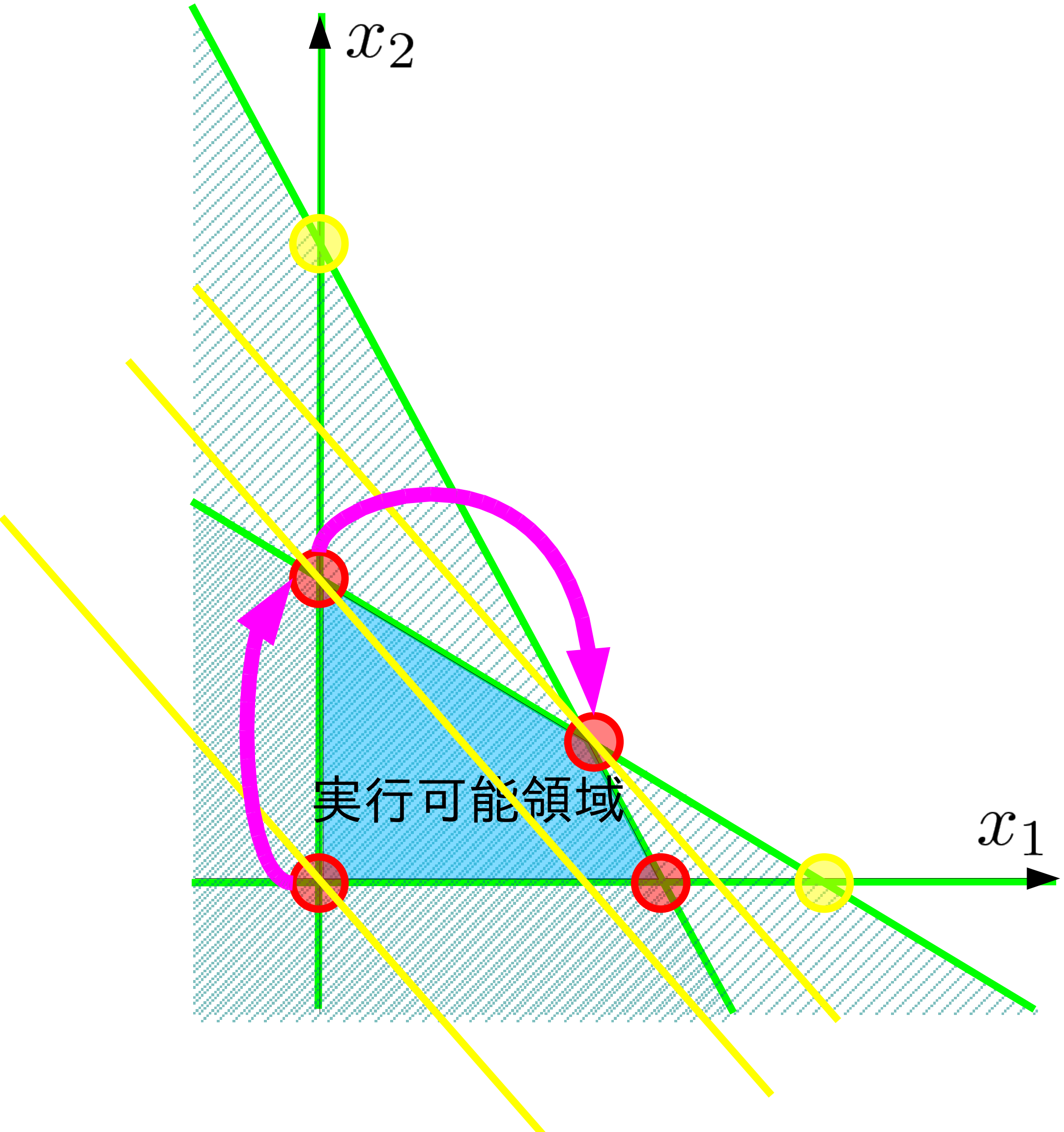
等式標準形の総当たり解法の問題点



- 全ての交点を求める際に不必要な連立方程式も解く必要がある
- 最適解は実行可能領域の端点に存在する
- 実行可能領域の端点だけを求めれば十分

※実行可能解の端点だけを調べて最適解を探す方法→**単体法**

単体法の基本的なアイディア



- 実行可能領域の端点のうち、一つがあらかじめ分かっているものとし、これを最初の交点とする
- 隣接する端点のうち、目的関数を改善するものを選び、交点を更新する
- 最適点に辿りつくまで更新を繰り返す

単体法

1. 目的関数を z として変数と見做し、制約式を追加
2. 基底変数に z を含み、基本解が非負条件を満たすように変数を選ぶ
3. 次の条件で基底/非基底変数の交替候補を選ぶ
   a.交替後も非負条件を満す
   b.交替により目的関数が改善する
4. 条件を満す候補がなくなるまで交替を繰り返す

minimize z
subject to

$$
\begin{aligned}
z + 600x_1 + 500x_2 &= 0 \\
3x_1 + 1x_2 + 1x_3 \qquad &= 45000 \\
1x_1 + 2x_2 \qquad + 1x_4 &= 40000 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

非基底変数: $x_1 = 0, x_2 = 0$

基本解:
$(z, x_3, x_4) = (0, 45000, 40000)$

(例)

単体法

- x_1 とx_2が非基底変数

$$
\begin{array}{lllll}
z+ & 600x_1 & +500x_2 & & = 0 \\
① & 3x_1 & +1x_2 & +x_3 & = 45000 \\
② & 1x_1 & +2x_2 & \quad +x_4 & = 40000
\end{array}
$$

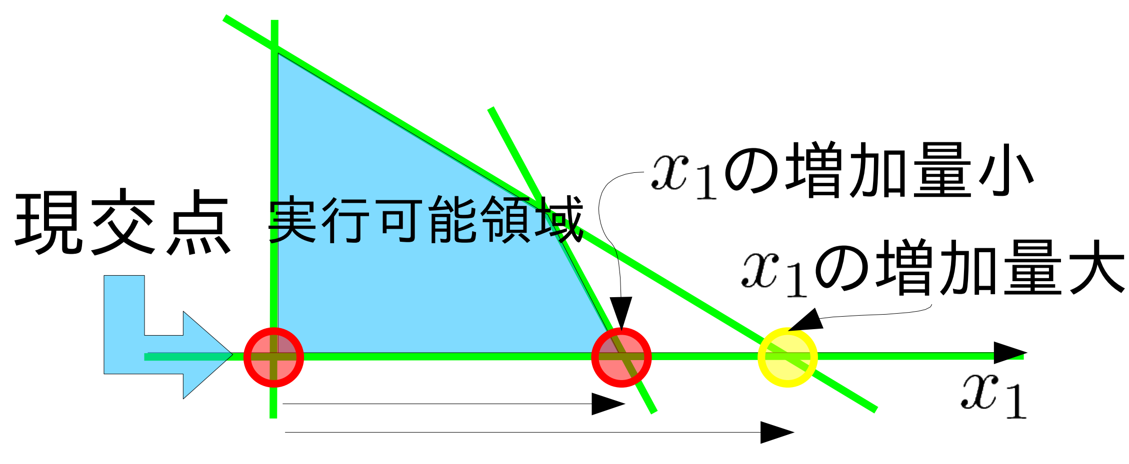
残り部分が連立方程式

- 交替候補を非基底変数から探す

x_1, x_2のどちらかが正になる、どちらでも z は減少

- x_1の最大増加量は①で15000,②で40000
x_2の最大増加量は①で45000,②で20000

- 基底変数になる変数の値は増加する(0→非負)
- 非基底変数になる変数は次交点を成す直線(2次元の場合)に対応する
- 新しい基底変数の大小関係は下図の状況に対応する



シンプレックス表

- 交点の更新を表の上の操作で行う
  等式標準形からシンプレックス表を作る

例:

$$\begin{aligned}
&\text{minimize } z\\
&\text{subject to}\\
&\quad 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 45000\\
&\quad 1x_1 + 2x_2 + 1x_4 = 40000\\
&\qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\\
&z + 600x_1 + 500x_2 = 0
\end{aligned}$$

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45000	
0	1	2	0	1	40000	
1	600	500	0	0	0	

全ての等式の係数と右辺の定数を記入する

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45000	
0	1	2	0	1	40000	
1	600	500	0	0	0	

非基底変数
値は 0 (零)

基本解

全ての非負変数が非負(非基底変数はゼロ)なので、
基本解は実行可能解

- 基底変数/非基底変数の交替候補を探す
- 目的関数を含む等式(最下段)において、係数が正の非基底変数が基底変数になれば、目的関数は減少する
- 非基底変数の係数が大きいほど、目的関数は速く減少するものと考えて

ここでは x_1 を次の基底変数の候補とする

•基底変数/非基底変数の交替候補を探す
•目的関数を含む等式(最下段)において、係数が正の非基底変数が基底変数になれば、目的関数は減少する
•非基底変数の係数が大きいほど、目的関数は速く減少するものと考えて

ここでは x_1 を次の基底変数の候補とする

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量	
0	3	1	1	0	45000	15000	$=45000/3$
0	1	2	0	1	40000	40000	$=40000/1$
1	600	500	0	0	0		

•各制約式の定数を x_1 の係数で割って最大増加量を求める
•最小の最大増加量を与える制約式の基底変数を次の非基底変数の候補とする

ここでは x_3 を次の非基底変数の候補とする

ここでは x_1 を次の基底変数の候補とする

ここでは x_3 を次の基底変数の候補とする

シンプレックス表

z	x1	x2	x3	x4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45000	
0	1	2	0	1	40000	
1	600	500	0	0	0	

$\times 1/3$

新しい基底変数に関して連立方程式を解く

シンプレックス表

z	x1	x2	x3	x4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	1	2	0	1	40000	
1	600	500	0	0	0	

$- \times 1$

$- \times 600$

z	x1	x2	x3	x4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	5/3	-1/3	1	25000	
1	0	300	-200	0	-9E6	

新しい基底変数に関して連立方程式を解く

シンプレックス表

基本解

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	5/3	-1/3	1	25000	
1	0	300	-200	0	-9E6	

全ての非負変数が非負なので、基本解は実行可能解

目的関数の式に正の係数を持つ非基底変数は唯一つ

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	45000
0	0	5/3	-1/3	1	25000	15000
1	0	300	-200	0	-9E6	

$= 15000/(1/3)$

$= 25000/(5/3)$

新しい基底変数に関して連立方程式を解く

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	5/3	-1/3	1	25000	
1	0	300	-200	0	-9E6	

$\times 3/5$

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	1	-1/5	3/5	15000	
1	0	300	-200	0	-9E6	

$- \times 1/3$

$- \times 300$

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	0	2/5	-1/5	10000	
0	0	1	-1/5	3/5	15000	
1	0	0	-140	-180	-135E5	

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	基本解 定数	最大増加量
0	1	0	2/5	-1/5	10000	
0	0	1	-1/5	3/5	15000	
1	0	0	-140	-180	-135E5	

全ての非負変数が非負なので、基本解は実行可能解

目的関数の式に正の係数を持つ非基底変数は無いので、これ以上の改善はできない。

この時点で最適解が基本解として得られている

$$x_1 = 10000$$
$$x_2 = 15000$$
$$x_3 = 0$$
$$x_4 = 0$$
$$z = -13,500,000$$

単体法(simplex method)
最も基本的な単体法の手順

1. 目的関数を変数として含む制約式を構成する
2. 基本解が実行可能解となる基底/非基底変数を選ぶ
3. 目的関数を減少する新しい基底変数を選ぶ
4. 基底変数の最大増加量を小さくする非基底変数を選ぶ、
5. 基底変数･非基底変数の交換で得た連立方程式を解く
6. 目的関数を増加できる限り変数の交換を繰り返す
7. 目的関数を改善できなくなったら最適解が求まっている

問題点

最初の基本解撰択法、改善の停止と最適性の対応

次回：単体法の実践
次々回：単体法の二段階解法