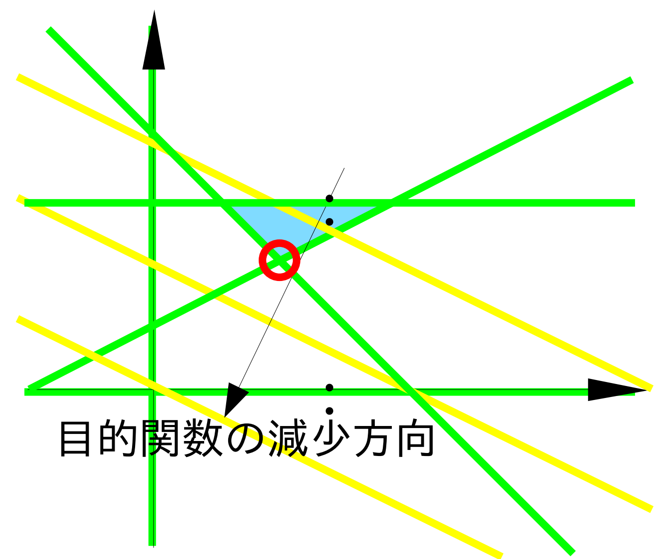
復習:2段階単体法と罰則付単体法

課題:次の線形計画問題を単体法を用いて解く

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad z \\
&\text{subject to} \\
&\quad x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\
&\quad -x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\
&\quad x_2 + x_5 = 3 \\
&\quad z - x_1 - 2x_2 = 0 \\
&\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$



注意: 原点は実行可能領域ではありません

復習:2段階単体法と罰則付単体法

- 2段階単体法

まず、z^* を最小化する

z^*=0 を得られたら

z を最小化して

元の問題の最適解を得る

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \;\; z^* \to 0 \Rightarrow \text{minimize} \;\; z \\
\text{subject to} \\
\qquad x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 4 \\
\qquad -x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 2 \\
\qquad x_2 + x_5 = 3 \\
\qquad z - x_1 - 2x_2 = 0 \\
\qquad z^* + 3x_2 - x_3 - x_4 = 6 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{array}
$$

- 罰則付単体法

十分大きな M により、

$z+Mz^*$ の最小化で、

z^*=0, z の最小化が

同時に実現する

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \;\; \tilde{z} = z + Mz^* \\
\text{subject to} \\
\qquad x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 4 \\
\qquad -x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 2 \\
\qquad x_2 + x_5 = 3 \\
\tilde{z} - x_1 + (3M-2)x_2 - Mx_3 - Mx_4 = 6 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{array}
$$

復習:2段階単体法と罰則付単体法

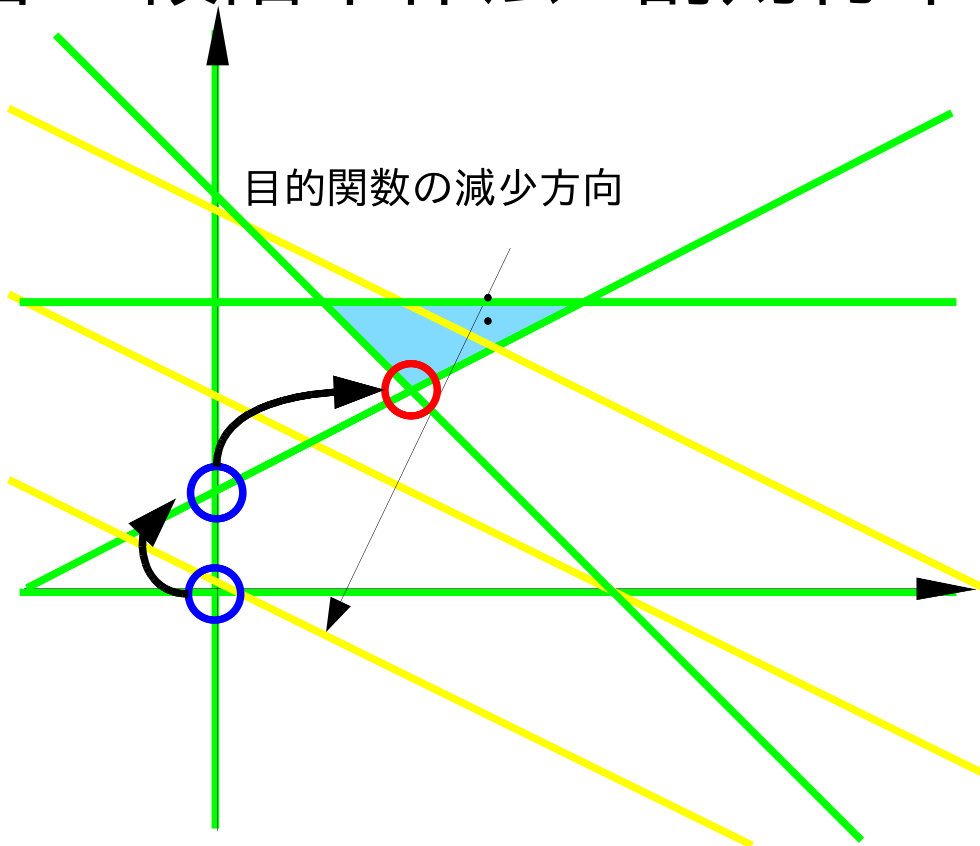
	z,z*	x1 非	x2 ~~非~~	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数		
×-1		1	1	-1			1		-1	4	/1=4
×1/2		-1	2		-1			1	1	2	/2=1
×-1			1			1			-1	3	/1=3
×-3	1		3	-1	-1				-3	6	
×2	1	-1	-2						2	0	

	z,z*	x1 ~~非~~	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数		
×2/3		3/2	0	-1	1/2		1	-1/2	2	3	/(3/2)=2
×1/2		-1/2	1		-1/2			1/2	1	1	/(-1/2)<0
×-1/2		1/2	0		1/2	1		-1/2	-1	2	/(1/2)=4
×-3/2	1	3/2	0	-1	1/2			-3/2	-3	3	
×2	1	-2	0		-1			1	4	2	

z,z*	x1	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数	
	1		-2/3	1/3		2/3	-1/3	2	x1=2
	0	1	-1/3	-1/3		1/3	1/3	2	x2=2
	0		1/3	1/3	1	-1/3	-1/3	1	
1	0		0	0		-1	-1	0	
1	0		-4/3	-1/3		4/3	1/3		

実行可能領域

復習:2段階単体法と罰則付単体法



z,z*	x1	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数
	1		-2/3	1/3		2/3	-1/3	2
	0	1	-1/3	-1/3		1/3	1/3	2
	0		1/3	1/3	1	-1/3	-1/3	1
1	0		0	0		-1	-1	0
1	0		-4/3	-1/3		4/3	1/3	6

x1=2

x2=2

復習:2段階単体法と罰則付単体法

- 罰則付単体法

十分大きな M により、

$z+Mz^*$ の最小化で、

$z^*=0$, z の最小化が

同時に実現する

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad \tilde{z} = z + Mz^* \\
\text{subject to} \\
\quad x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 4 \\
\quad -x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 2 \\
\quad x_2 + x_5 = 3 \\
\tilde{z} - x_1 + (3M-2)x_2 - Mx_3 - Mx_4 = 6 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{array}
$$

z˜	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	定数
	1	1	-1			1		4
	-1	2		-1			1	2
		1			1			3
1		3M-2	-M	-M				6

復習:2段階単体法と罰則付単体法

	z,z*	x1 非	x2 ~~非~~	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数	
×-1		1	1	-1			1		-1 4	/1=4
×1/2		-1	2		-1			1	1 2	/2=1
×-1			1			1			-1 3	/1=3
×-298	1		298	-100	-100				6	

298

	z,z*	x1 ~~非~~	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数	
×2/3		3/2	0	-1	1/2		1	-1/2	2 3	/(3/2)=2
×1/2		-1/2	1		-1/2			1/2	1 1	/(-1/2)<0
×-1/2		1/2	0		1/2	1		-1/2	-1 2	/(1/2)=4
×-149	1	149	0	-100	49			-149	304	

-298

z,z*	x1	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数	
	1		-2/3	1/3		2/3	-1/3	2	x1=2
	0	1	-1/3	-1/3		1/3	1/3	2	x2=2
	0		1/3	1/3	1	-1/3	-1/3	1	
1	0		-2/3	-2/3		-298/3	-298/3	6	

最適解

復習:2段階単体法と罰則付単体法

	z,z*	x1 非	x2 ~~非~~	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数	
×-1		1/2 1	-1 1	-1	1/2		1	-1/2	-1 4	/1=4
×1/2		-1/2 ⇦ -1	1 ⇦ 2		-1/2 ⇦ -1			1/2 ⇦ 1	1 ⇦ 2	/2=1
×-1		1/2	-1 1		1/2	1		-1/2	-1 3	/1=3
×	-3M +2 1	3M/2 -1	-3M +2 3M -1	-M	3M/2 -1 -M			-3M/2 +1	3M -2 6	

- 非常に大きい数 M を記号で残した場合、
  - シンプレックス表には M の係数と定数の両方を記録しなければならない
  - 連立方程式の解法では M の係数と定数の両方を掃き出さなければならない
- 結局、2段階単体法で z* と同時に z の式を扱うのと同じことになる

復習:2段階単体法と罰則付単体法

- 2段階法における人工(補助)問題と元の問題の関係
  - まず z^* を最小化して、次に z を最小化する
- 人工問題を同時に解く方法＝罰則付単体法
  - z の最小化と人工変数=0 が成立すれば良い
  - z, z^* を同時($z^*=0$ 優先)に最適化＝罰則付単体法
    - $z+M \times z^*$ (M は大きな数) を最小化する
M の影響が大きいので z^* の最小化→$z^*=0$ が優先的に実現される
- 安全な罰則(M)を決める方法が無い
  - M を任意の数よりも大きい数として扱う
    - 2段階法と同じ手間になる

線形計画問題の行列表現(等式標準形)

minimize
$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$
subject to
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$$

minimize
$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
subject to
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{q} \Leftrightarrow p_j \leq q_j,\ j = 1, \ldots,$$

線形計画問題の行列表現

minimize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \geq \boldsymbol{0}$$

単体法の各段階での操作は z が減少するように $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}, \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}},$ を更新するものになる。

minimize

$$z = \underbrace{c_{j_1}x_{j_1} + \cdots + c_{j_n}x_{j_n}}_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}} + \underbrace{c_{j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m}x_{j_m}}_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}}$$

subject to

$$\underbrace{\begin{array}{l} a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n}x_{j_n} \\ a_{2j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n}x_{j_n} \\ \\ a_{nj_1}x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n}x_{j_n} \end{array}}_{\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}} \begin{array}{c} + \\ + \\ \\ + \end{array} \underbrace{\begin{array}{l} a_{1j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m}x_{j_m} \\ a_{2j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m}x_{j_m} \\ \quad\vdots \\ a_{nj_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m}x_{j_m} \end{array}}_{\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}} \begin{array}{l} = b_1 \\ = b_2 \\ \\ = b_n \end{array}$$

$$\underbrace{x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}}, \underbrace{x_{j_{n+1}}, \ldots, x_{j_m}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}} \geq 0$$

線形計画問題の行列表現(単体法)

minimize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

subiect to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

minimize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

subiect to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \geq \boldsymbol{0}$$

原点を実行可能領域に
持つ線形計画問題の
不等式標準形を考える。

スラック変数 $\boldsymbol{x}'^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_n)$
を導入して等式標準形とsimplex
表を得る。

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

線形計画問題の行列表現(単体法)

$$
\begin{aligned}
-\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
z - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= 0
\end{aligned}
$$

最初のsimplex表

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{A}$
基底変数の連立方程式とその解は
$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = -\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = -\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b}$
非基底変数はゼロなので、
目的関数値もゼロ
$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= \boldsymbol{b} \\
z - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= 0
\end{aligned}
$$

単体法の操作により各行列要素が
更新されるが $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I}$ と $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{0}$
は保たれるので基底解は常に
$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{0}$
終了時の $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{b}$ が最適解となる。

※更新される必要があるのは非基底変数の選択時に必要な $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}$
と基底変数の選択時に必要な $\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}$ と $\boldsymbol{b}$ だけ。

※単体法の操作で繰り返される $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I}$ を維持するピボット変換により
誤差が蓄積する(誤差を含む係数行列を元に計算が繰り返される。)

線形計画問題の行列表現(改訂単体法)

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= 0 \end{aligned}$$

最初のsimplex表

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{A}$

基底変数の連立方程式とその解は

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = -\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = -\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b}$

非基底変数はゼロなので、

目的関数値もゼロ

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= 0 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}$ が正則なら変数の交換に必要な情報は計算で求まる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ z &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}) + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{aligned}$$

(必要なのは$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$の係数：

$-\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}$)

※基底・非基底変数の分類(と $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}$)だけを更新する改訂単体法が考えられる。

単体法

単体法は次の行列表現に対応するsimplex表の更新により最適解を得る。

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= 0 \end{aligned}}$$

simplex 表の更新は基底変数と非基底変数一つずつの交換対応し z が増加するように交換する変数が選ばれる。
また、その過程で必要となる $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}$ の値や $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$ の係数 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}$ を求めるために $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I}$ を保つピボット変換が実施される。

改訂単体法

改訂単体法では次の行列表現ベクトルや行列の値は更新せず、代りに基

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= 0 \end{aligned}}$$

底・非基底変数の分類を記憶し $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}$ や $\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}$ は変数の情報を元に制約式全体の係数行列から求めるものとする。
その過程で $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}$ が正則であるなら変数の交換に必要な情報は次の計算で

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ z &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}})\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{aligned}$$

求まる。

双対問題

minimize

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$

subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \geq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \geq b_n$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

主問題

maximize

$$w = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_ny_n$$

subject to

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{n1}y_n \leq c_1$$
$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{n2}y_n \leq c_2$$
$$\vdots$$
$$a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + \cdots + a_{nm}y_n \leq c_m$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0$$

双対問題

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

n 行 m 列の係数行列と m 個の変数、
n 通りの制約式からなる主問題

m 行 n 列の係数行列と n 個の変数、
m 通りの制約式からなる双対問題

双対定理

minimize	maximize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$	$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to	subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$
主問題	双対問題

線形計画問題とその双対問題が右のように与えられ、$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}=(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_m)$, $\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}=(\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_n)$ 実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、最適解である。

$$\exists\tilde{\boldsymbol{x}}, \exists\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$

$$\Longrightarrow \forall\boldsymbol{x}, \forall\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

また、一方に最適解が存在すれば、もう一方にも最適解が存在し、最適解が与える双方の目的関数値は等しい。

$$\exists\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}},\ \text{for } \forall\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$$

$$\Longrightarrow \exists\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}},\ \text{for } \forall\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$