復習:相補性定理と双対変数

主問題と双対問題の変数の対応と、正・零の対応

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$

主問題の等式標準形

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題の等式標準形

主変数: $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m)$ 　 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$

双対変数

スラック変数: $\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = (s_1, \ldots, s_m)$ 　 $\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = (t_1, \ldots, t_n)$

相補性定理: $\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0$ 　 $\tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$

$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0$ 　 $\tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$

復習:相補性定理を用いた解法

主問題の等式標準形

minimize
$z = 7x_1 + 10x_2 + 18x_3$
subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - s_1 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - s_2 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

双対問題の等式標準形

maximize
$w = y_1 + 2y_2$
subject to

$$\begin{aligned} 2y_1 - y_2 + t_1 &= 7 \\ 3y_1 + y_2 + t_2 &= 10 \\ -y_1 + 2y_2 + t_3 &= 18 \\ y_1, y_2, t_1, t_2, t_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

双対問題の最適解から主問題の最適解を求める

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= 2/7 > 0 &\Longrightarrow \tilde{s}_1 &= 0 \\ \tilde{y}_2 &= 64/7 > 0 &\Longrightarrow \tilde{s}_2 &= 0 \\ \tilde{t}_1 &= 109/7 > 0 &\Longrightarrow \tilde{x}_1 &= 0 \\ \tilde{t}_2 &= 0 &\Longrightarrow \tilde{x}_2 &> 0 \\ \tilde{t}_3 &= 0 &\Longrightarrow \tilde{x}_3 &> 0 \\ \tilde{w} &= 130/7 &\Longrightarrow \tilde{z} &= 130/7 \end{aligned}$$

残った変数の連立方程式

$$\begin{aligned} 3x_2 - x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} \tilde{x}_2 &= 4/7, \\ \tilde{x}_3 &= 5/7. \end{aligned}$$

逆(主問題→双対問題)も可

復習:演習問題

課題1:次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

minimize $z = x_1 + 2x_2$
subject to $x_1 + x_2 \geq 4,\ x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0,\ \ x_2 \leq 3,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

課題2:双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

課題3:課題2の解答が正しいことを何らかの方法で確認する。

復習：演習問題

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

$$\begin{aligned}&\text{minimize}\\&z=(1,2)\boldsymbol{x}\\&\text{subject to}\\&\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\\0&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}\geq\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix}\\&\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\geq\mathbf{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{minimize}\\&z=(1,2)\boldsymbol{x}\\&\text{subject to}\\&\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\\0&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{s}=\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix}\\&\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}},(s_1,s_2,s_3)^{\mathrm{T}}\geq\mathbf{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{maximize}\\&w=(4,2,-3)\boldsymbol{y}\\&\text{subject to}\\&\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&2&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}\leq\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\\&\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}\geq\mathbf{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{maximize}\\&w=(4,2,-3)\boldsymbol{y}\\&\text{subject to}\\&\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&2&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{t}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\\&\boldsymbol{y},\boldsymbol{t}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}},(t_1,t_2)^{\mathrm{T}}\geq\mathbf{0}\end{aligned}$$

復習:演習問題

課題2:双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} \\
&w = (4, 2, -3)\boldsymbol{y} \\
&\text{subject to} \\
&\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} - w \\
&\text{subject to} \\
&\begin{array}{rrrrrr}
 & y_1 & -y_2 & & +t_1 & = 1 \\
 & y_1 & +2y_2 & -y_3 & +t_1 & = 2 \\
-w & +4y_1 & +2y_2 & -3y_3 & & = 0
\end{array} \\
&y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

定数項とスラック変数の係数が正→原点が実行可能領域

-w	y_1 非	y_2 非	y_3 非	t_1	t_2	定数
0	1	-1	0	1	0	1
0	1	2	-1	0	1	2
1	4	2	-3	0	0	0

復習:演習問題

課題2:双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して
元の問題の最適解を求める。

$-w$	y_1 ~~非~~	y_2 非	y_3 非	t_1 非	t_2	右辺	
0	1	-1	0	1	0	1	/1=1
0	1	2	-1	0	1	2	/1=2
1	4	2	-3	0	0	0	

$-w$	y_1	y_2 ~~非~~	y_3 非	t_1 非	t_2 非	右辺
0	1	-1	0	1	0	1
0	0	3	-1	-1	1	1
1	0	6	-3	-4	0	-4

$-w$	y_1	y_2	y_3 非	t_1 非	t_2 非	右辺
0	1	0	-1/3	2/3	1/3	4/3
0	0	3/3	-1/3	-1/3	1/3	1/3
1	0	0	-1	-2	-2	-6

最適解: $w=6, y_1=4/3, y_2=1/3, y_3=0, t_1=0, t_2=0$

復習:演習問題

課題2:双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

相補性定理:主・双対問題の最適解に次の関係が成立

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0 \quad \tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$

$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0 \quad \tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

(主問題の主変数: $\tilde{x}_j$、スラック変数: $\tilde{s}_k$
双対問題の主変数: $\tilde{y}_k$、スラック変数: $\tilde{t}_j$)

双対問題の最適解:

$$w = 6, y_1 = 4/3, y_2 = 1/3, y_3 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0$$

↓相補性定理

主問題の最適解: $z = 6, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 > 0, x_1 > 0, x_2 > 0$

制約式より: $x_1 + x_2 = 4, -x_1 + 2x_2 = 2, x_2 + s_3 = 3$

連立方程式を解いて未知の変数を定める

$$x_1 = 2, x_2 = 2, s_3 = 1$$

主問題の最適解: $z = 6, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 1, x_1 = 2, x_2 = 2$

復習：演習問題

課題3：課題2の解答が正しいことを何らかの方法で確認する

課題2の解答：z は$x_1 = x_2 = 2$において最大値6を得る

minimize

$z = x_1 + 2x_2$

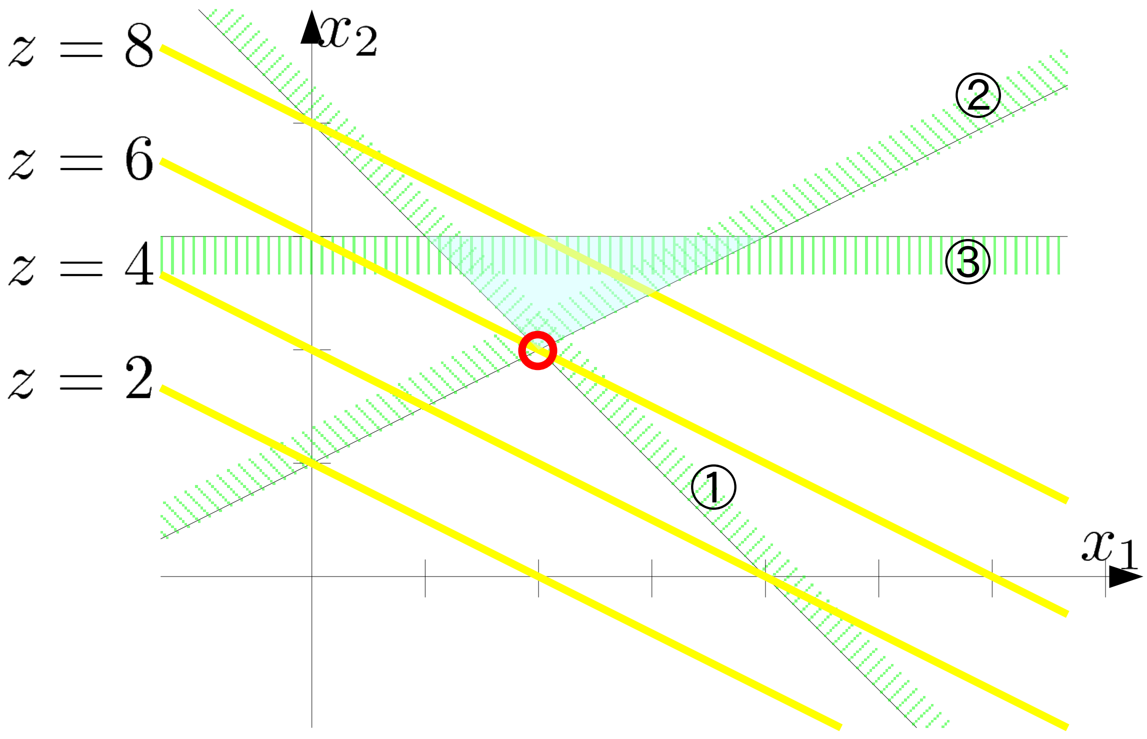
subject to

① $x_1 + x_2 \geq 4$

② $x_2 - 2x_2 + 2 \leq 0$

③ $x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$



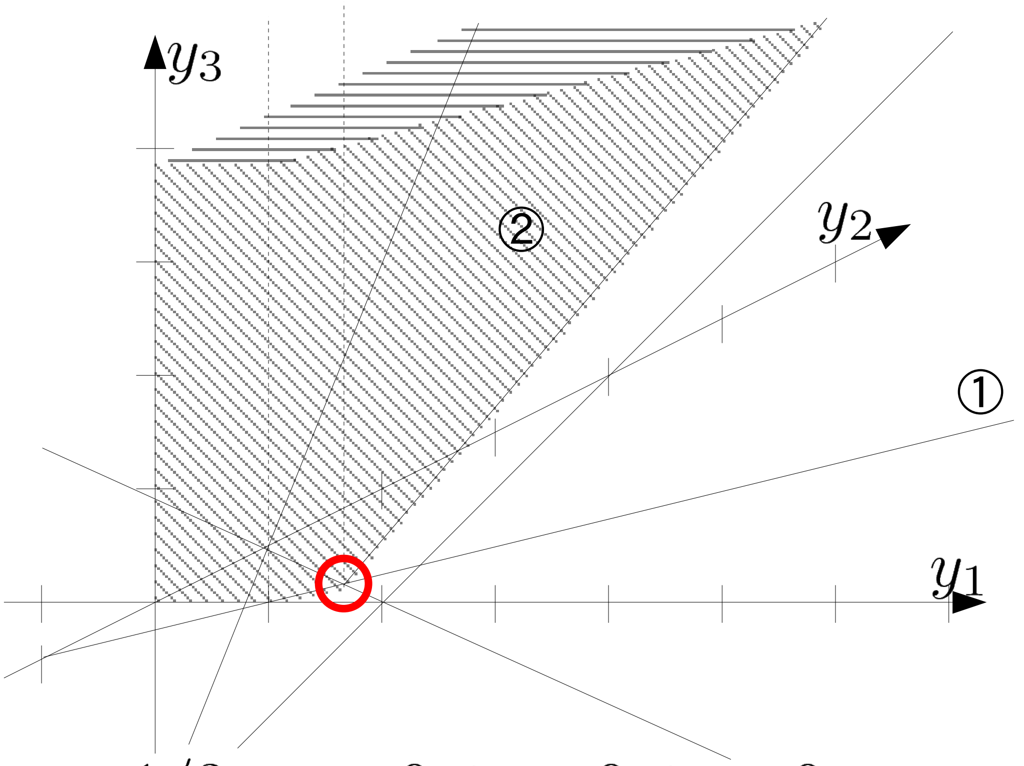
3次元問題のグラフ

演習問題の双対問題についてもグラフを描く

$$\text{maximize}$$
$$w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3$$
$$\text{subject to}$$
① $y_1 - y_2 \leq 1$

② $y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$



最適解: $w = 6, y_1 = 4/3, y_2 = 1/3, y_3 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0$

線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$の多面体

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

のとき、$\mathcal{P}$ を$\mathbb{R}^n$の多面体

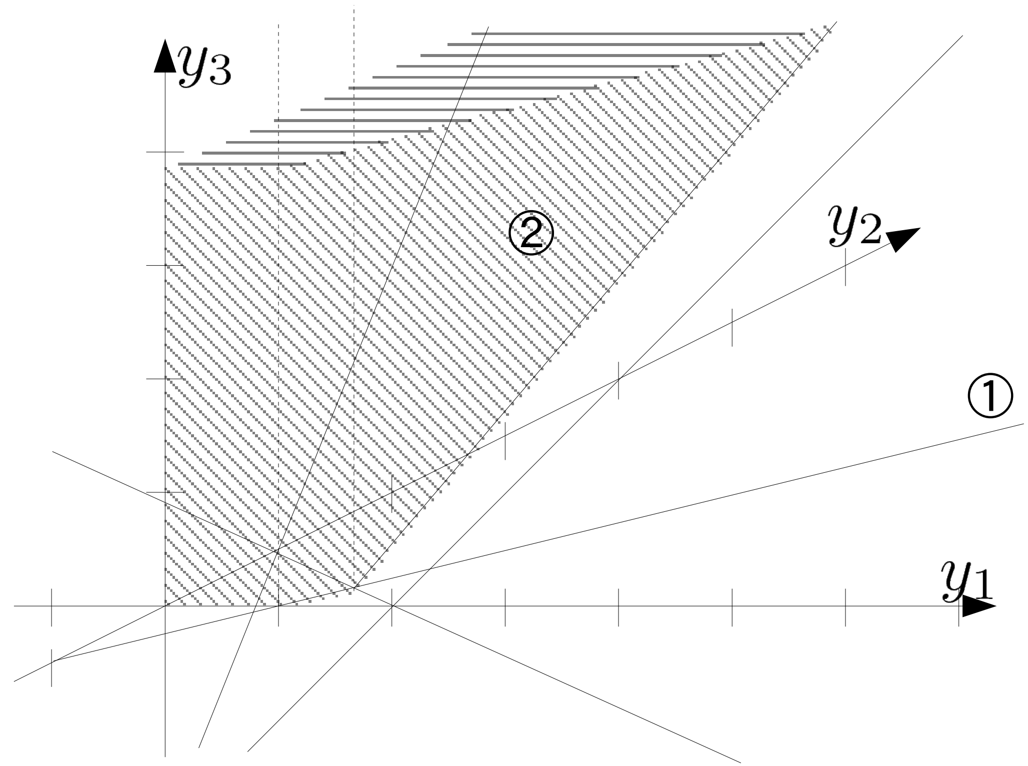
と呼ぶ。

$$\begin{aligned}
&\text{maximize} \\
&w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3 \\
&\text{subject to}
\end{aligned}$$

① $y_1 - y_2 \leq 1$

② $y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$



線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$の多面体

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

のとき、$\mathcal{P}$ を$\mathbb{R}^n$の多面体と呼ぶ。

この定義では、面や直線、点、半平面等も多面体となる。

定義:有界多面体

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{P}, ||x|| \leq \exists M$$

となる、M が存在するとき $\mathcal{P}$ を有界多面体と呼ぶ。

線形計画問題と多面体

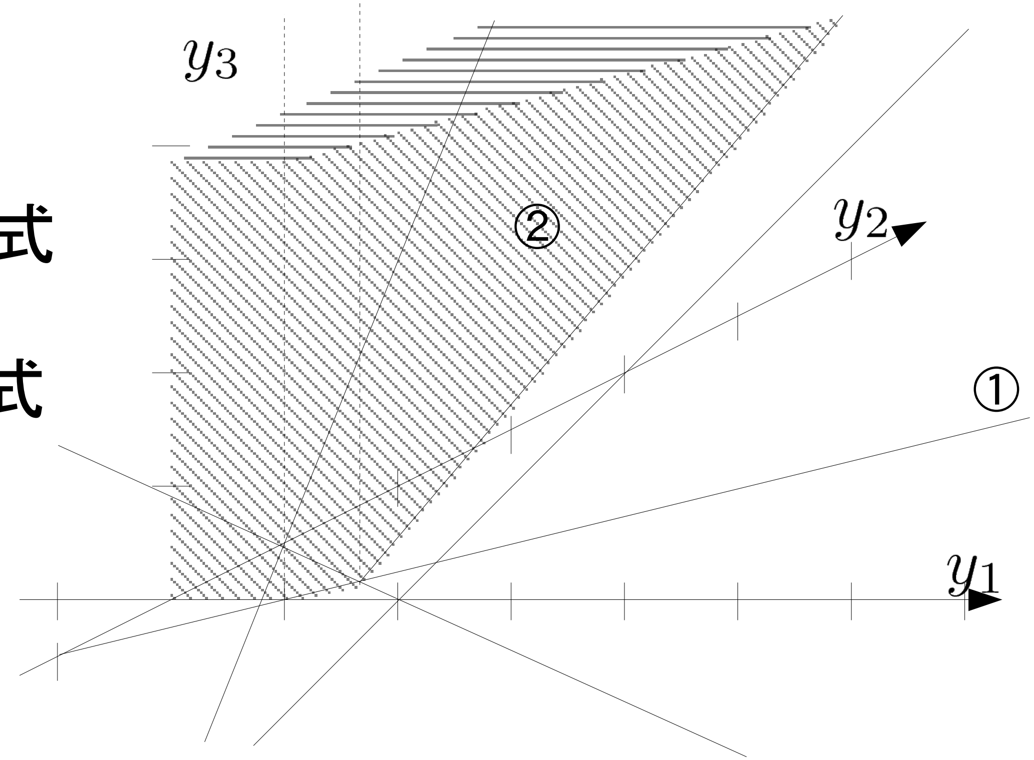
- 妥当不等式

  P が $\mathbb{R}^n$ の多面体のとき、$\forall\, \boldsymbol{x} \in P \Rightarrow \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ なら

  $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ は P の妥当不等式

- 図の多面体を P とすれば

  $y_1 - y_2 \leq 2$ は P の妥当不等式



P を与える①②③も妥当不等式

① $y_1 - y_2 \leq 1$

② $y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$

③ $y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0$

線形計画問題と多面体

- 支持超平面

  P が $\mathbb{R}^n$ の多面体、$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$ が P の妥当不等式のとき、

  $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$ の境界が P と交わりを持つなら

  この境界を支持超平面と呼ぶ

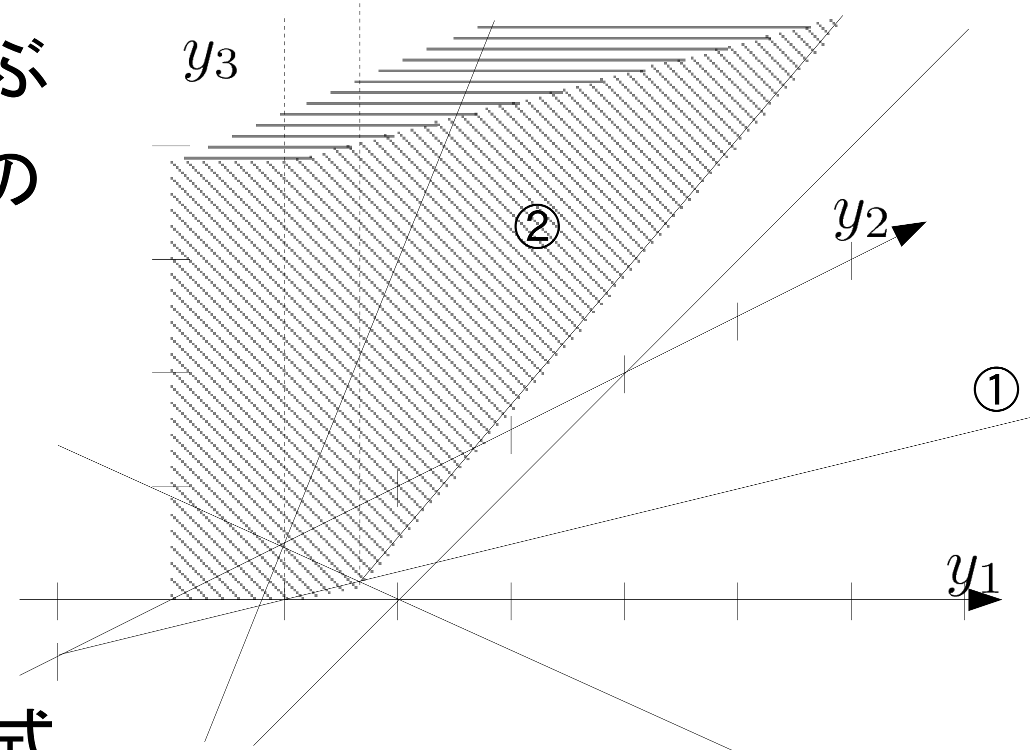
- ①②③の境界は図の多面体の支持超平面

  ① $y_1 - y_2 \le 1$

  ② $y_1 + 2y_2 - y_3 \le 2$

  ③ $y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0$

  $y_1 - y_2 \le 2$ は P の妥当不等式ではあるが、その境界は支持超平面ではない



自己双対型線形計画問題

- 次の不等式標準形で表される線型計画問題を自己双対型線型計画問題と言う

maximize $\quad z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$

subject to $\quad A\boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$

係数行列 A は歪対称行列 $(A^{\mathrm{T}} = -A)$

- 双対問題は主問題と一致する

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & w = -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0} \end{array} = \begin{array}{ll} \text{minimize} & w = -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & -\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \leq -\boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

自己双対型線形計画問題

任意の線形計画問題を自己双対型線形計画問題に書き換ることができる。
与えられた不等式標準形をもとに、具体的に書き換えの方法を示す。

与えられた線形計画問題に対応して双対問題を考える。

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0} \end{array}$$

次の自己双対型線形計画問題は元の問題の最適解を実行可能領域に持つ。

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + 0\tau \\ \text{subject to} & \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{c} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{b}^{T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \tau \end{pmatrix} \le \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \tau \ge \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{c} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{b}^{T} & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & (\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \\ (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & (-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \\ (-\boldsymbol{c})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{b}^{T} & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{c} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{b}^{T} & 0 \end{pmatrix}$$

自己双対型線形計画問題

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + 0\tau \\ \text{subject to} \quad & \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{c} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{b}^{T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \tau \end{pmatrix} \ge \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \tau \ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

元の問題の最適解を $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 、その双対問題の最適解を $\tilde{\boldsymbol{y}}$ としたとき、
$\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y} = \tilde{\boldsymbol{y}}, \tau = 1$ が自己双対型問題の実行可能領域にあることは明らか。

逆に自己双対型問題の実行可能解を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \tau$ としたとき、
制約式より $\tau\boldsymbol{c} \le \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$、$-\tau\boldsymbol{b} \le -\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ したがって、

$$\tau(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}) = (\tau\boldsymbol{c})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - (\tau\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \le (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 0$$

$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ なら弱双対定理より元の問題の最適解となる。
$\tau = 0$ ならば相補性定理より $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} > 0$ なので、$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0$ または $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} < 0$ となる。前者なら元の主問題が実行不能で後者なら双対問題が実行不能になる。