

数理計画法

第14回: Newton法

演習課題の再提出について

- 出席点はありません。提出課題は評価対象です。
 - 正当な理由での欠席には提出課題の再提出を認めます。欠席した回の演習課題を提出してください。
- ※課題は正しい解答とともに完成した形で提出された場合のみ評価します。確認のために口頭での説明を求める場合があります。
- 2回以上の欠席があり、課題提出が無い場合は評価しません。

出欠状況

- 1月14日現在、2/3以上の講義に出席が可能で、かつ2回以上の欠席がある方の一覧です。

中里 竜也、山崎 健史

- 欠席数の記録に誤りがある場合、欠席の日付が必要になる場合は、本頁末の連絡先へ電子メールで問合せてください。

注意

- 課題の再提出は罰則ではなく、授業資料の解説を見て学習していただくための機会を提供するものです。
- また、欠席届は出席に代わるものではありません。欠席届の提出により、正当な事由による欠席であることを示し補習授業等を受ける権利を得るためのものです。
- 上記のリストには欠席回数が4回を越える場合を含みません。5回以上の欠席については課題の再提出による補習での対応はできません。

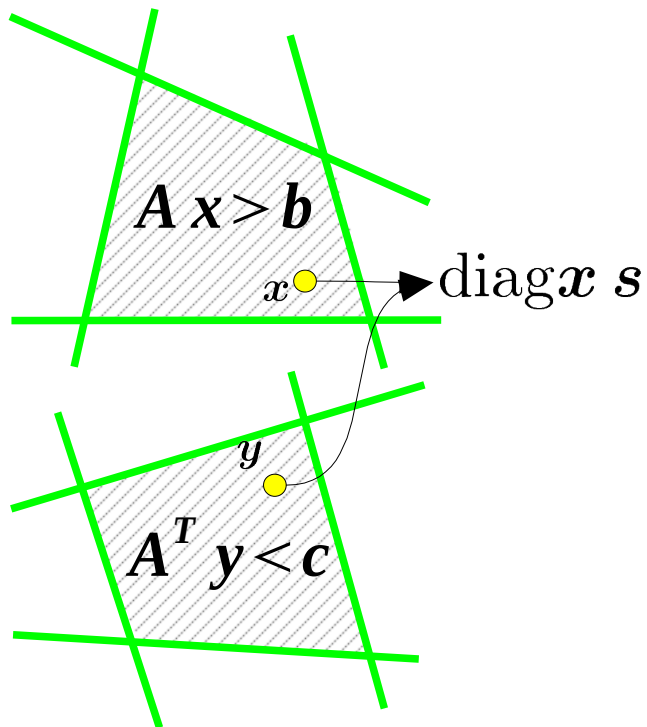
復習: 自己双対型内点法

maximize
 $z = c^T x$
subject to
 $Ax \leq b$
 $x \geq 0$

主問題

minimize
 $w = b^T y$
subject to
 $A^T y \geq c$
 $y \geq 0$

双対問題



- 自己双対型内点法:
 - 線形計画問題の最適解検索
→ 双対ギャップのゼロ点探索
 - 実際は緩和問題を反復改良で解く
- ※ 双対ギャップ:
主問題と双対問題の目的関数値の差
- ※ ゼロ点探索:
 $f(x, y, z, \dots) = 0$ となる x, y, z, \dots を探す問題
- ※ 緩和問題:
元の問題と解が対応し、解きやすい問題
(全く同等ではないという意味もある)
- ※ 反復改良:
問題の条件を完全には満たさない状態を反復的に改めて解を求める方法

復習: 1変数Newton法のゼロ点探索

- 1変数の場合、初期点 \tilde{x} の近傍での Taylor 展開を考えて
$$f(x) = f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x - \tilde{x}) + \frac{1}{2}f''(\tilde{x})(x - \tilde{x})^2 + \dots$$

- 1次(=線形)近似を得る

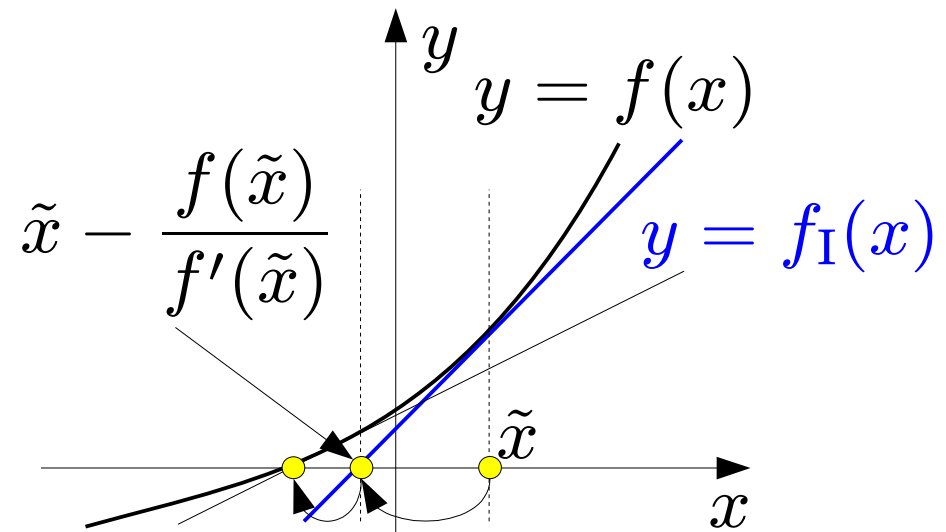
$$f(x) \sim f_I(x) = f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x - \tilde{x})$$

- 1次近似のゼロ点を求め

$$f_I(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \tilde{x} - f(\tilde{x})/f'(\tilde{x})$$

- 求めた x を \tilde{x} として①に戻る
($f(x)$ がゼロに近ければ終了)



復習: 1変数Newton法の極点探索

- 1変数の場合、初期点 \tilde{x} の近傍での Taylor 展開を考えて
$$f(x) = f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x - \tilde{x}) + \frac{1}{2}f''(\tilde{x})(x - \tilde{x})^2 + \dots$$

- 2次近似を得る

$$f_{\text{II}}(x) = f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x - \tilde{x}) + \frac{1}{2}f''(\tilde{x})(x - \tilde{x})^2$$

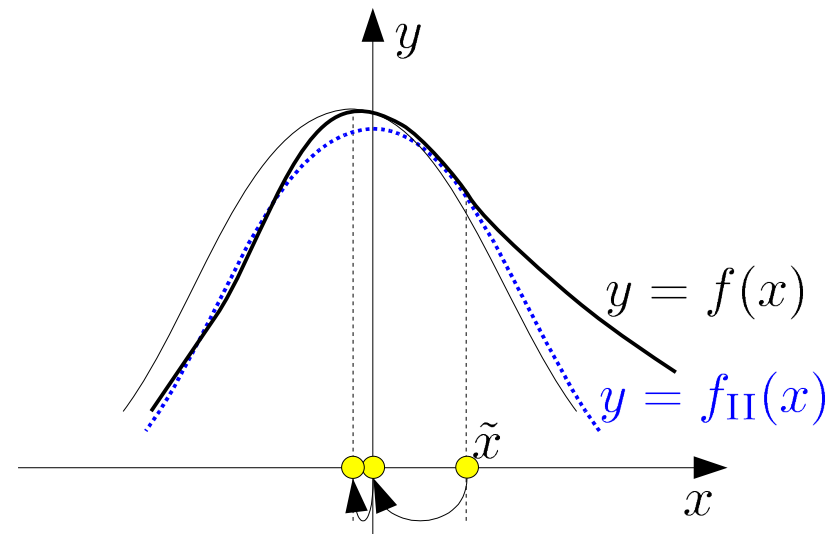
- 2次近似の極点を求め

$$f'_{\text{II}}(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{df_{\text{II}}}{d(x - \tilde{x})} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \tilde{x} - f'(\tilde{x})/f''(\tilde{x})$$

- 求めた x を \tilde{x} として①に戻る
($f(x)$ がゼロに近ければ終了)



多変数Newton法によるゼロ点探索

- 初期点 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 近傍での Taylor 展開を考えて同様に、

$$f(\boldsymbol{x}) = \tilde{f} + \sum_j \tilde{f}_{x_j} \delta_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \tilde{f}_{x_j x_k} \delta_j \delta_k + \dots$$

$$\tilde{f} = f(\tilde{\boldsymbol{x}}), \tilde{f}_{x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\tilde{\boldsymbol{x}}), \tilde{f}_{x_j x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\tilde{\boldsymbol{x}}), \delta_j = x_j - \tilde{x}_j$$

一次近似: $f_I(\boldsymbol{x}) = \tilde{f} + \sum_j \tilde{f}_{x_j} \delta_j = \tilde{f} + \tilde{\boldsymbol{f}}'^T \boldsymbol{\delta}$

$$\tilde{\boldsymbol{f}}'^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\tilde{\boldsymbol{x}}) \right), \boldsymbol{\delta}^T = (\delta_1, \dots, \delta_n)$$

$f_I(\boldsymbol{x}) = 0$ より、 $\tilde{f} + \tilde{\boldsymbol{f}}'^T \boldsymbol{\delta} = 0$ を解いて $\boldsymbol{\delta}$ を定める

反復公式: $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}$

多変数Newton法による極値探索

- 二次近似: $f_{\text{II}}(\mathbf{x}) = \tilde{f} + \sum_j \tilde{f}_{x_j} \delta_j = \tilde{f} + \tilde{\mathbf{f}}'^{\text{T}} \boldsymbol{\delta} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^{\text{T}} \mathbf{H} \boldsymbol{\delta}$

$$\tilde{\mathbf{f}}'^{\text{T}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{\mathbf{x}}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\tilde{\mathbf{x}}) \right), \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} \cdots f_{x_1 x_n} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ f_{x_n x_1} \cdots f_{x_n x_n} \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{\delta}^{\text{T}} = (\delta_1, \dots, \delta_n).$$

$$\text{条件: } \left(\frac{\partial}{\partial \delta_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \delta_n} \right)^{\text{T}} (f_{\text{II}} - \tilde{f}) = 0$$

より連立方程式 $\tilde{\mathbf{f}}'^{\text{T}} + \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}})\boldsymbol{\delta} = 0$ を得、 $\boldsymbol{\delta}$ を求める

$$\text{反復公式: } \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}$$

多変数Newton法の例

- 例題 : $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ の極小点を求めよ

- 二次近似 : $f_{\text{II}}(\mathbf{x}) = \tilde{f} + \sum \tilde{f}_{x_j} \delta_j = \tilde{f} + \tilde{\mathbf{f}}'^{\text{T}} \boldsymbol{\delta} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^{\text{T}} \mathbf{H} \boldsymbol{\delta}$

$$\tilde{\mathbf{f}}'^{\text{T}} = (f_{x_1}(\tilde{\mathbf{x}}), \dots, f_{x_n}(\tilde{\mathbf{x}})), \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} \cdots f_{x_1x_n} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ f_{x_nx_1} \cdots f_{x_nx_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6x_1 & -3 \\ -3 & 6x_2 \end{pmatrix}$$
$$\tilde{\mathbf{f}}'^{\text{T}} = (3x_1^2 - 3x_2, 3x_2^2 - 3x_1)$$
$$\boldsymbol{\delta}^{\text{T}} = (\delta_1, \dots, \delta_n).$$

- $\tilde{\mathbf{x}}^{\text{T}} = (2, 2)$ とすれば、 $\tilde{\mathbf{f}}'^{\text{T}} = (6, 6)$, $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$,

$$\tilde{\mathbf{f}}'^{\text{T}} + \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}})\boldsymbol{\delta} = 0 \quad \text{を解いて、} \quad \boldsymbol{\delta}^{\text{T}} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

1回目の更新で $\mathbf{x}^{\text{T}} = \left(1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}\right)$ となる.

自己双対型内点法のNewton法

- 双対ギャップのゼロ点 $c^T x - b^T y = 0$ をニュートン法で求める制約式を満たすにはどうする？

- 双対ギャップを主・スラック変数を用いて表わせば

$$c^T x - b^T y = (c - A^T y)^T x + y^T (Ax - b) = t^T x + y^T s = \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}$$

制約式は変数の非負性に対応する。

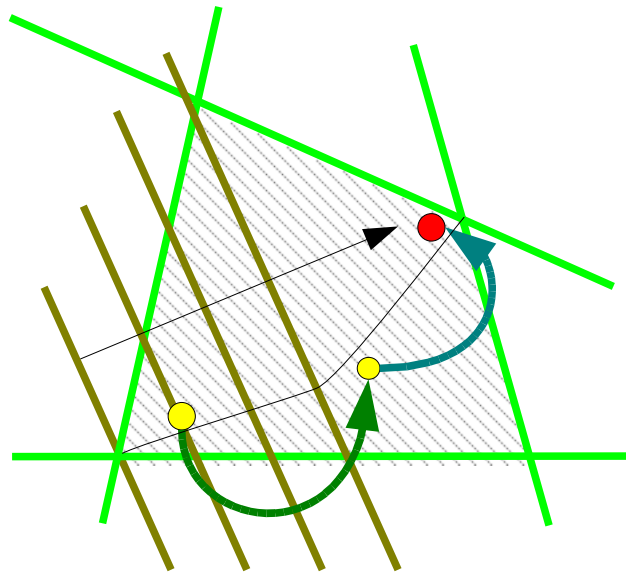
- 逆に変数の非負性より双対ギャップのゼロ点を求める問題に同等な連立方程式を導くことができる

$$(t^T \ y^T) \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} (t^T \ y^T) = 0$$

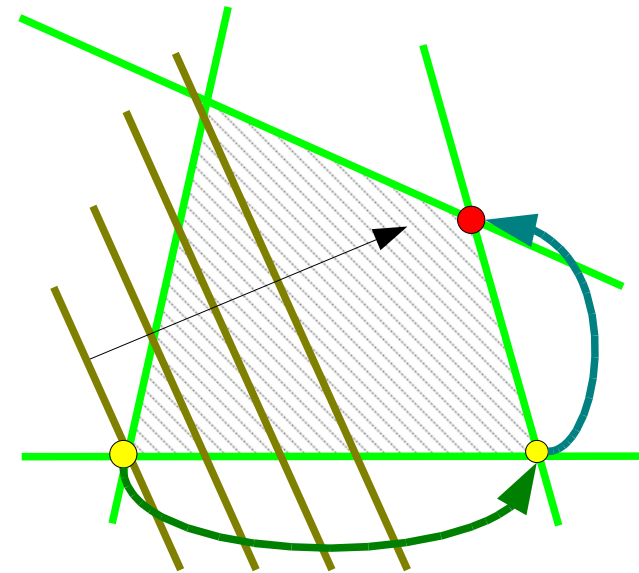
- 初期点 $x_0, y_0, s_0, t_0 \geq 0$ を何らかの方法で定め、その近傍で関係式 $(X + \delta X)(Y^T + \delta Y^T) = 0$ の解を一次近似式を緩和した式から反復法で求める；

$$X \delta Y^T + \delta X Y^T = \lambda \mathbf{1} \quad \lambda \rightarrow 0 \quad X \equiv \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}, \quad Y \equiv \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix}$$

自己双対型内点法



単体法 (simplex法)



単体法は線形計画問題に特化した専用の解法であり、線形計画問題の特徴に対応した方法で、本質的に可算個の可能性を順番に辿る直接的方法である。

自己双対型内点法は、線形計画問題の解法ではあるが、実際の実行過程は非線形最適問題の反復解法になっている。

演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

課題1: $x^2 = 2$ の解をニュートン法で求め、 $\sqrt{2}$ の近似値を4桁まで得るのに必要な反復回数を調べよ

課題2: 例題の続きを確認せよ

例題: $f(\mathbf{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ の極小値を求めよ

2次近似 $f_{II}(\mathbf{x}) = \tilde{f} + \sum \tilde{f}_{x_j} \delta_j = \tilde{f} + \tilde{\mathbf{f}}'^T \boldsymbol{\delta} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\delta}$

の与える漸化式: $\tilde{\mathbf{f}}'^T + \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}}) \boldsymbol{\delta} = 0, \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \boldsymbol{\delta},$

$$\tilde{\mathbf{f}}'^T = (3x_1^2 - 3x_2, 3x_2^2 - 3x_1), \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 6x_1 & -3 \\ -3 & 6x_2 \end{pmatrix}.$$

初期点: $\tilde{\mathbf{x}}^T = (2, 2) \quad \rightarrow 1$ 回反復後: $\mathbf{x}^T = (1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3})$