

2009数理計画法

学習教育目標と科目との対応について

学習・教育目標(C):

数学、自然科学等の基礎的知識と情報工学に関する専門的な知識を有し、それらを情報社会における諸問題の探求・解決へ自主的・継続的に応用できる人材を育成する。

キーワード：離散数学および確率・統計を含めた数学的知識

1. 線形計画問題を標準形に定式化し、単体法および関連する解法を用いて最適解を求めることができる。
2. 線形計画法における双対性について理解し、線形計画問題の解法に応用できる。
3. 線形計画法における自己双対型内点法を理解し、問題の解法に適用できる。

授業の内容・スケジュール：

第1回: 数理計画問題・線形計画問題とは何か	10月7日
第2回: 線形計画問題の標準形	10月14日
第3回: 単体法	10月21日
第4回: 単体法の実践	10月28日
第5回: 単体法の2段解法	11月4日
第6回: 単体法の2段解法と罰則付単体法	11月11日
第7回: 線形計画問題の行列表現	11月18日
第8回: 改訂単体法と双対問題	11月25日
第9回: 双対問題と双対定理・相補性定理	12月2日
第10回: 線形計画問題と多面体	12月9日
第11回: 多面体と双対定理・相補性定理	12月16日
第12回: 内点法の原理	1月13日
第13回: ニュートン法	1月20日
第14回: 演習	1月27日
第15回: 期末試験	2月3日

教科書・参考書

- 教科書:田村明久・村松正和「最適化法」
(共立出版, 2002年, 定価2900円+税)
 - 1章,2章を教科書に用いる. 10月1日から生協に入荷済
- 参考書:金谷健一「これなら分かる最適化数学」
共立出版、2005年、
- 参考書:伊理正夫「線形計画法」
共立出版、1986年、
- 参考書:今野浩「カーマーカー特許とソフトウェア
:数学は特許になるか」
中央公論社、1995年、

数理計画法

第1回: 数理計画問題・線形計画問題とは何か

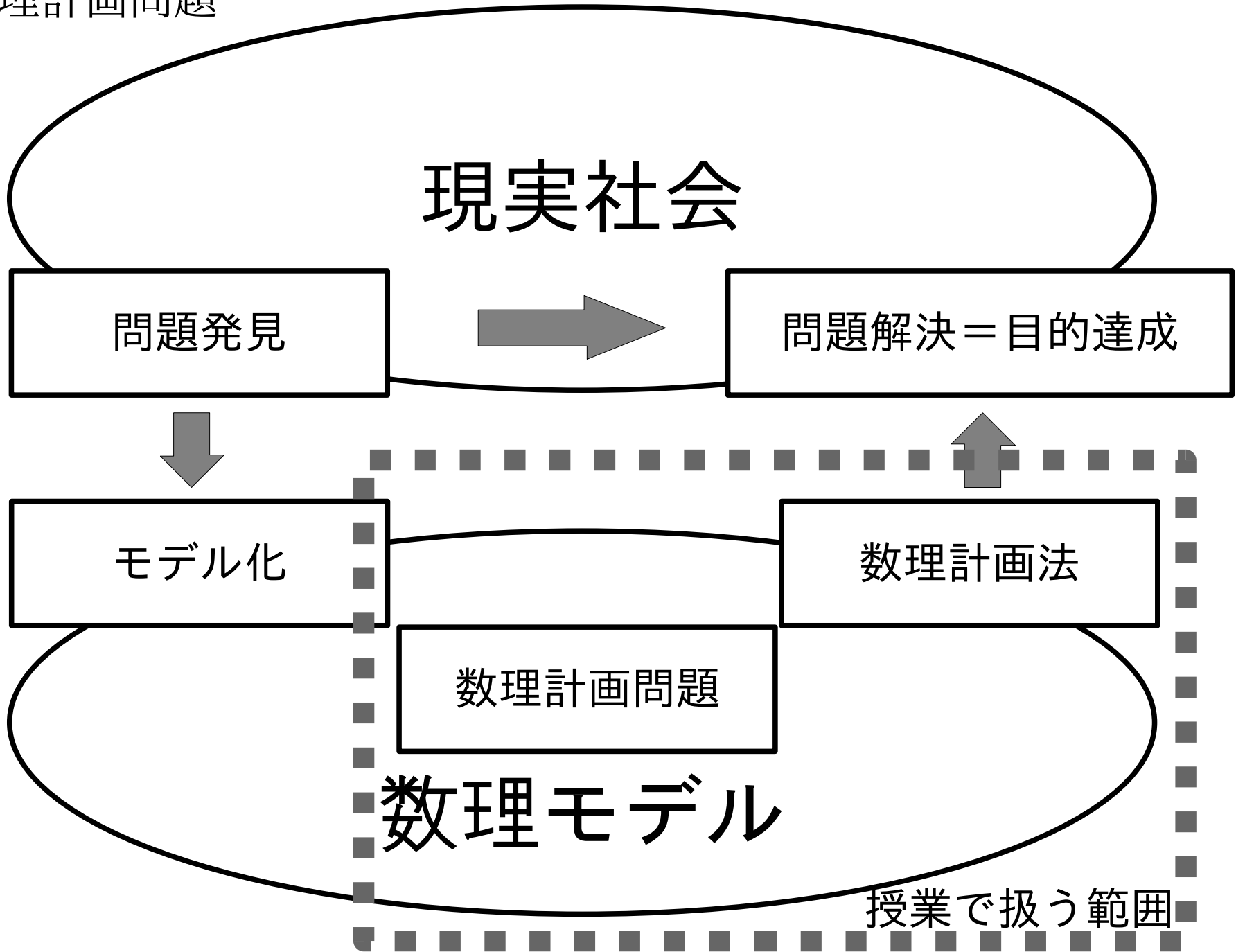
数理計画法 = 数理計画問題 - 問題 + 法
線形計画法 = 線形計画問題 - 問題 + 法

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z = f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{subject to} & g(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (x_1, \dots, x_n)^T \in X \end{array}$$

与えられた制約式のもとである関数を最大化する問題

線形計画問題 \subset 数理計画問題 \subset 最適化問題

数理計画問題



数理計画法による目的達成の手順

1. 問題発見

操作できるものは何か(変数と制約式)

得られた結果をどう評価するのか(目的関数)

2. モデル化

同じ問題でもモデル化の方法は多様

違う問題でも類似数理モデルに共通の方法が使える

3. 数理計画法

問題の種類に応じた方法、効率の良い方法、コストの低い方法、手間の多い方法…

4. 目的達成

最適解を実行することはできるのか、
得られる結果は目的に合ったものか、

数理モデルと数理計画問題の分類

- 数理モデル作成の例
- 数理計画問題の類別
- 線形計画問題とは何か

数理モデル作成の例

ミックスジュース生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題:利益を最大化する2種類のミックス
ジュースの生産量は?

$$\begin{array}{ll} \text{変数} & : \text{生産量} \quad \text{トロピカルミックス} \quad x_1 \\ & \quad \quad \quad \text{フレッシュミックス} \quad x_2 \\ \text{制約式} & : \text{供給量} \quad \text{マンゴー液} \quad 3x_1 + 1x_2 \leq 45 \\ & \quad \quad \quad \text{オレンジ液} \quad x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ \text{目的関数:利益} & \quad 600x_1 + 500x_2 \end{array}$$

負の生産量が無いことに注意

数理計画問題の表現と用語

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

最大化(minimize:最小化)

目的関数(objective func.)

制約式(constraints)

最適解(optimal solution) 目的関数の最大値を与える解

※大域的/局所的最適解: あとで、

最適値(optimal value) 最適解をとる目的関数の値

実行可能解(feasible solution) 制約式を満たす解

実行可能領域(feasible region) 実行可能解の集合

数理計画問題の表現と分類

- 変数の性質による分類
 - 連続型：(実数)
 - 離散型：(整数)
- 条件(制約式、目的関数)の性質による分類
線形、非線形、微分可・不可、連続、不連続、
区分線形…

授業で扱うのは、
連続変数による線形関数の数理計画問題

→線形計画問題

線形計画問題と素朴な解法

ミックスジュース生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題:利益を最大化する2種類のミックスジュースの生産量は?

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

変数:生産量

トロピカルミックス x_1

フレッシュミックス x_2

目的関数も制約式も全て
1次関数であり線形

グラフを利用した解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

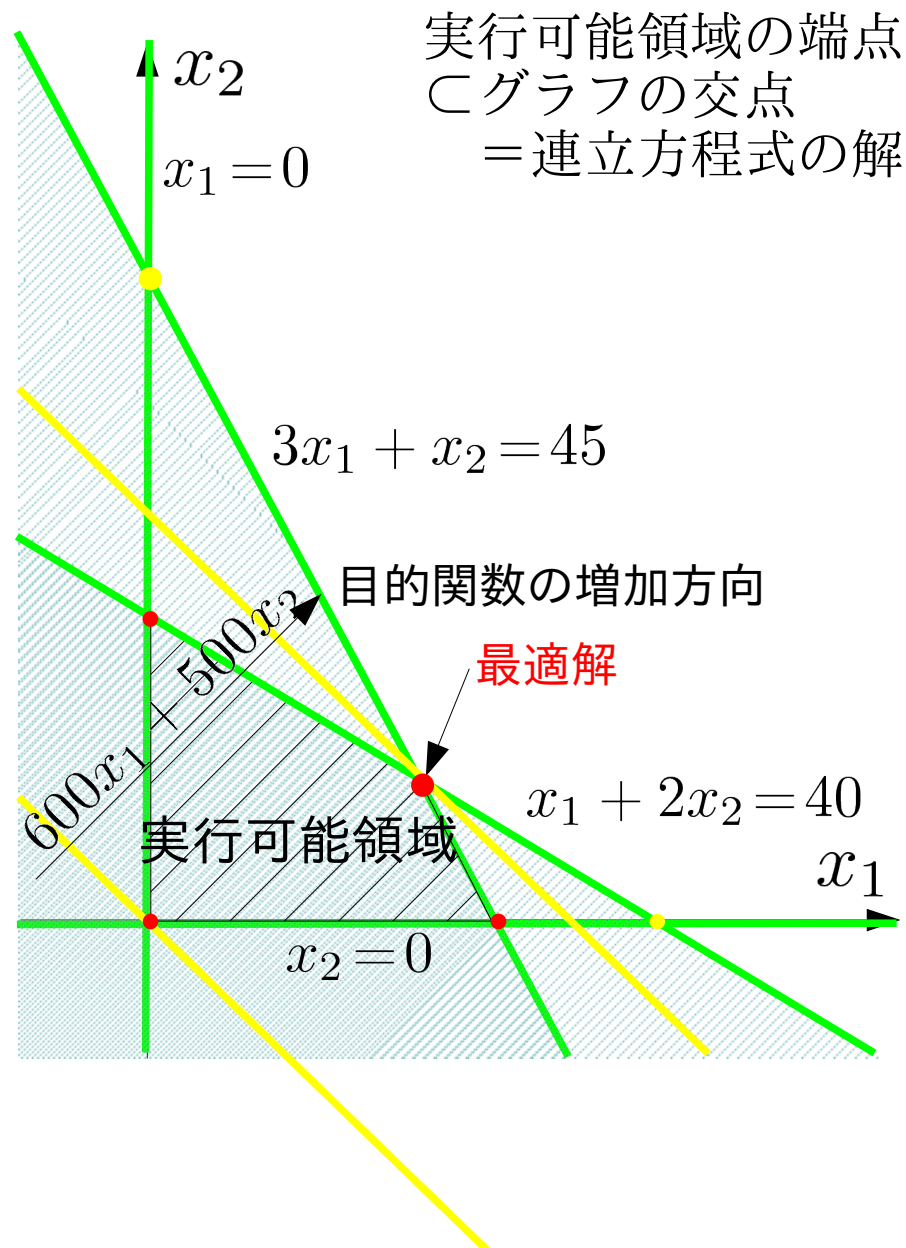
制約式に対応する方程式

$$3x_1 + 1x_2 = 45$$

$$x_1 + 2x_2 = 40$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$



グラフを利用した解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

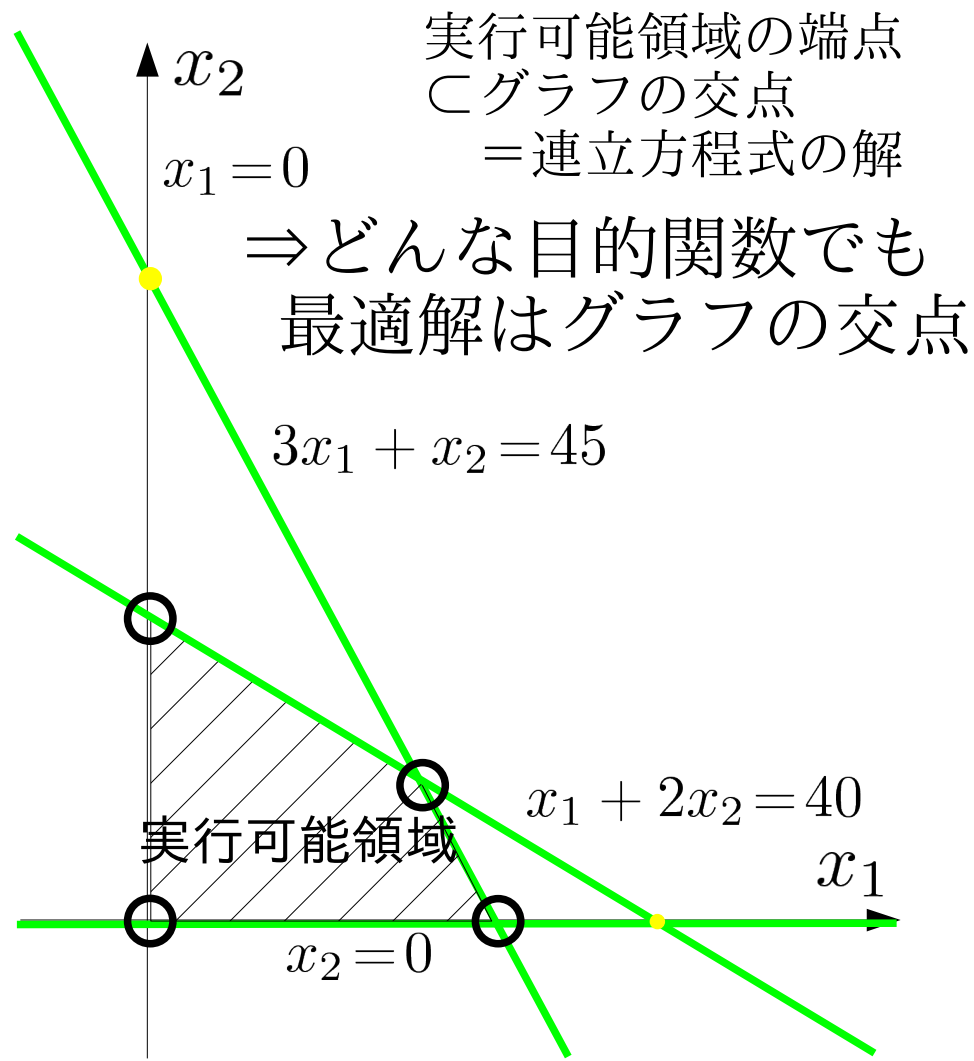
制約式に対応する方程式

$$3x_1 + 1x_2 = 45$$

$$x_1 + 2x_2 = 40$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$



グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

制約式に対応する方程式

$$\textcircled{1} \quad 3x_1 + 1x_2 = 45$$

$$\textcircled{2} \quad x_1 + 2x_2 = 40$$

$$\textcircled{3} \quad x_1 = 0$$

$$\textcircled{4} \quad x_2 = 0$$

方程式	x_1	x_2	目的関数値	実行可能?
$\textcircled{1}\textcircled{2}$	10	15	¥ 13,500	○
$\textcircled{1}\textcircled{3}$	0	45		×
$\textcircled{1}\textcircled{4}$	15	0	¥ 9,000	○
$\textcircled{2}\textcircled{3}$	0	20	¥ 10,000	○
$\textcircled{2}\textcircled{4}$	40	0		×
$\textcircled{3}\textcircled{4}$	0	0	¥ 0	○

1. 制約式に対応する方程式を書き出す
2. 全組合せの連立方程式で交点を求める
3. 交点の実行可能領域にあることを確認する
4. 実行可能な交点での最大の目的関数値を探す

見つかった交点が最適解

線形計画問題の素朴な解法

グラフを用いた解法

- 2~3変数までの問題に適用可能
 - 3変数の問題ではグラフは3次元
 - 実行可能領域は多面体
 - 現実社会の問題は数十~数百万変数
- 計算機アルゴリズムとして構成し難い

交点を総当たりする解法

- 多変数の問題に適用可能
 - n 変数の問題で n 元連立方程式を問いて交点を求める
 - 機械的に交点を計算するアルゴリズムが考えられる
- 交点の実行可能性を調べる手間がある
- 変数が増えると無駄な交点計算が増える

次回：線形計画問題の標準形

次々回：単体法

演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題:利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の1日当り生産量は?

上記の最適化問題について、

課題1: maximize ... subject to ... の形式で
線形計画問題を表現しなさい。

課題2: グラフを用いる解法・交点を総当たりする解法
で最適解を求めなさい。

課題3: 授業の感想・意見があれば書いてください。

グラフを利用した解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800$$

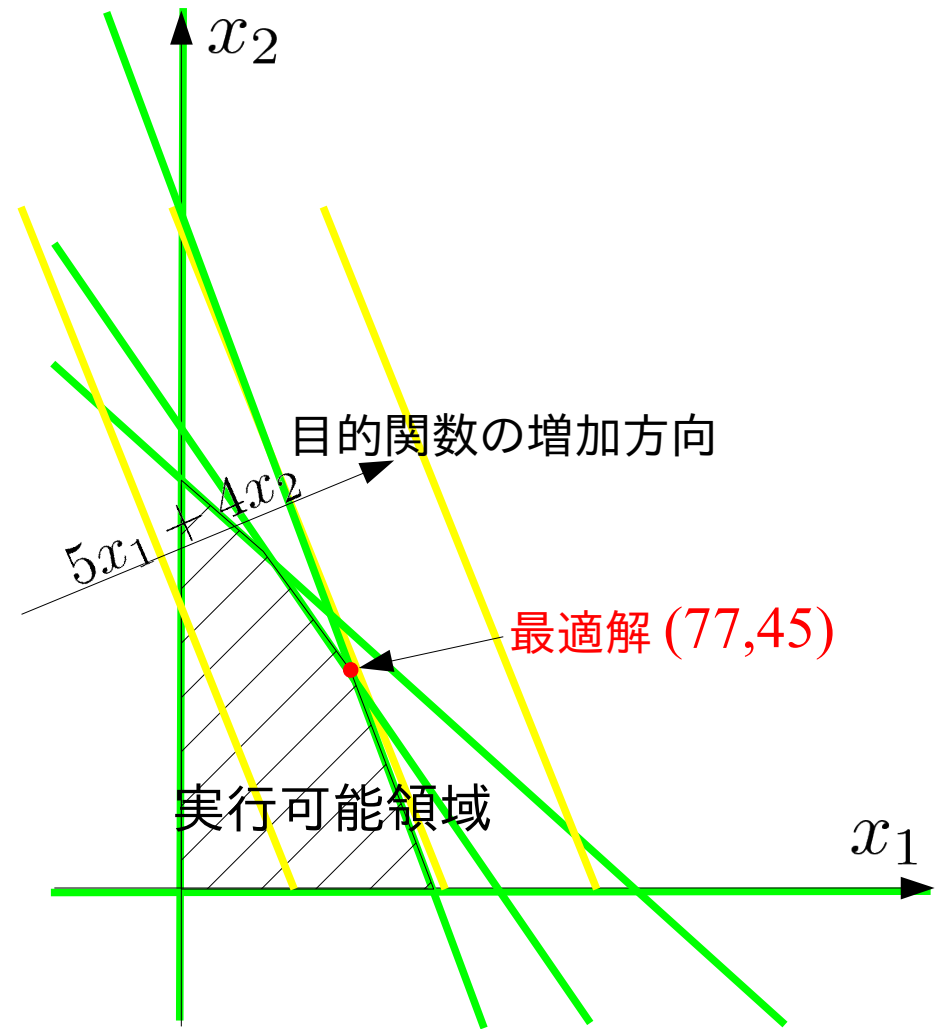
$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

最適解：コーヒ飲料 77kg

コーヒー牛乳 45kg

最適値：565千円



グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$\textcircled{1} \quad 15x_1 + 11x_2 = 1650$$

$$\textcircled{2} \quad 10x_1 + 14x_2 = 1400$$

$$\textcircled{3} \quad 9x_1 + 20x_2 = 1800$$

$$\textcircled{4} \quad x_1 = 0$$

$$\textcircled{5} \quad x_2 = 0$$

方程式	x_1	x_2	目的関数値	実行可能?
①②	77	45	565	○
①③				×
①④				×
①⑤	110	0	550	○
②③	1400/37	2700/37	110.81	○
②④				×
②⑤				×
③④	0	90	360	○
③⑤				×
④⑤	0	0	0	○

次回の予定と授業資料

- 次回：線形計画問題の標準形
今回の内容と演習課題の復習から始めます。
- ウェブサイトで授業資料を配布予定です。

<http://comp.cs.ehime-u.ac.jp/~okano/mathpro/>

現在準備中です。用意ができ次第、授業・掲示でお知らせします。