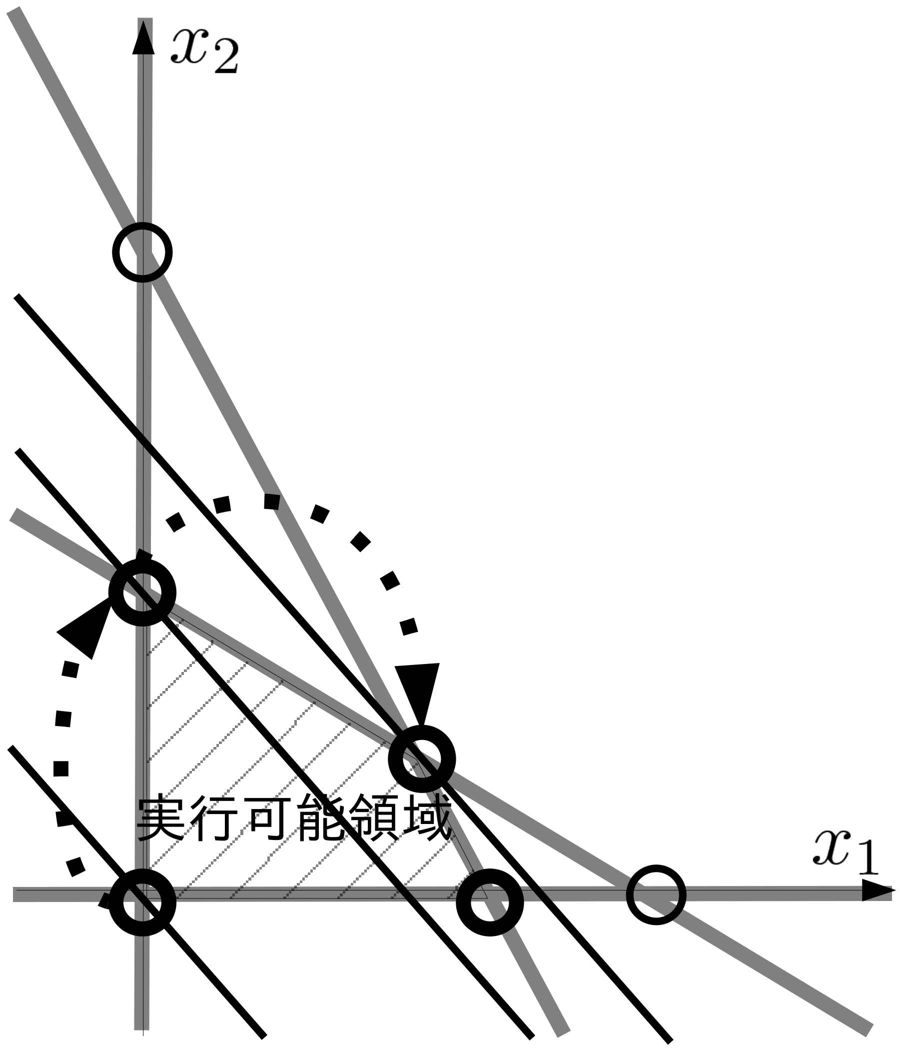
# 復習:単体法




1. 実行可能領域の端点を1つ見つけ出発点とする
2. 目的関数を改善する隣の端点を実行可能領域から見つけ、次の点とする
3. 端点の改善を繰り返し、それ以上の改善を望めない端点を見つける
4. 辿りついた端点を最適解とする

# 復習:単体法

- 等式標準形に対応する simplex 表を準備する

等式標準形

minimize

$$z(= -600x_1 - 500x_2)$$

subject to

$$3x_1 + \ \ x_2 + x_3 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$$
$$z + 600x_1 + 500x_2 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- simplex 表

| $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | $45\times10^3$ | |
| 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | $40\times10^3$ | |
| 1 | 600 | 500 | 0 | 0 | 0 | |

# 復習:単体法

5変数、3制約式の等式標準形

| $z$ | $x_1$ 非 | $x_2$ 非 | $x_3$ | $x_4$ | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | $45\times10^3$ | |
| 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | $40\times10^3$ | |
| 1 | 600 | 500 | 0 | 0 | 0 | |

5-3=2変数を無視すれば連立方程式を解くことができる

$$
\begin{aligned}
3x_1 \quad + x_2 + x_3 \quad &= 45\times10^3 \\
x_1 \quad + 2x_2 \quad + x_4 &= 40\times10^3 \\
z + 600x_1 + 500x_2 \quad &= 0
\end{aligned}
$$

無視した変数：非基底変数、残りの変数を基底変数

基本解として $x_1, x_2$ を座標軸にとった原点を考える。

→ $z, x_3, x_4$ を基底変数、 $x_1, x_2$ を非基底変数とする

$$(z, x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 45\times10^3, 40\times10^3)$$

※ 基本解が実行可能(＝全ての変数が非負)であることを確認する

# 復習:単体法

•実行可能領域の境界を辿り、目的関数を増加させる隣の基本解を探す

※ 隣の基本解→基底変数、非基底変数を1つずつ交換した基本解

非基底変数→基底変数とした場合に目的関数を減少させる変数を選ぶ
→目的関数の制約式において正の係数を持つ非基底変数を選ぶ

※ 複数の候補がある場合は?→一概には言えない
ここでは大きな係数を持つ変数を選ぶ

| $z$ | $x_1$ 非 | $x_2$ 非 | $x_3$ 非 | $x_4$ | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | $45\times10^3$ | $/3 = 15\times10^3$ |
| 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | $40\times10^3$ | $/3 = 20\times10^3$ |
| 1 | 600 | 500 | 0 | 0 | 0 | |

※ 非基底変数となることで、基本解における変数の値は 0 となる
→その分だけ基底変数となる変数(今回は $x_1$)が変化する

※基底変数となる変数の変化量を求める
→係数で定数欄の値を割り、最大変化量を求める
→最小の最大変化量を与える制約式に関わる変数を選ぶ
（基底変数→非基底変数とする）

# 復習:単体法

新しい基底変数からなる連立方程式を解き基本解を求める
→基底変数の係数が 1 となるように掃き出し操作をする

$\times 1/3$

| $z$ | $x_1$ | $x_2$ 非 | $x_3$ 非 | $x_4$ | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | $45\times10^3$ | |
| 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | $40\times10^3$ | |
| 1 | 600 | 500 | 0 | 0 | 0 | |

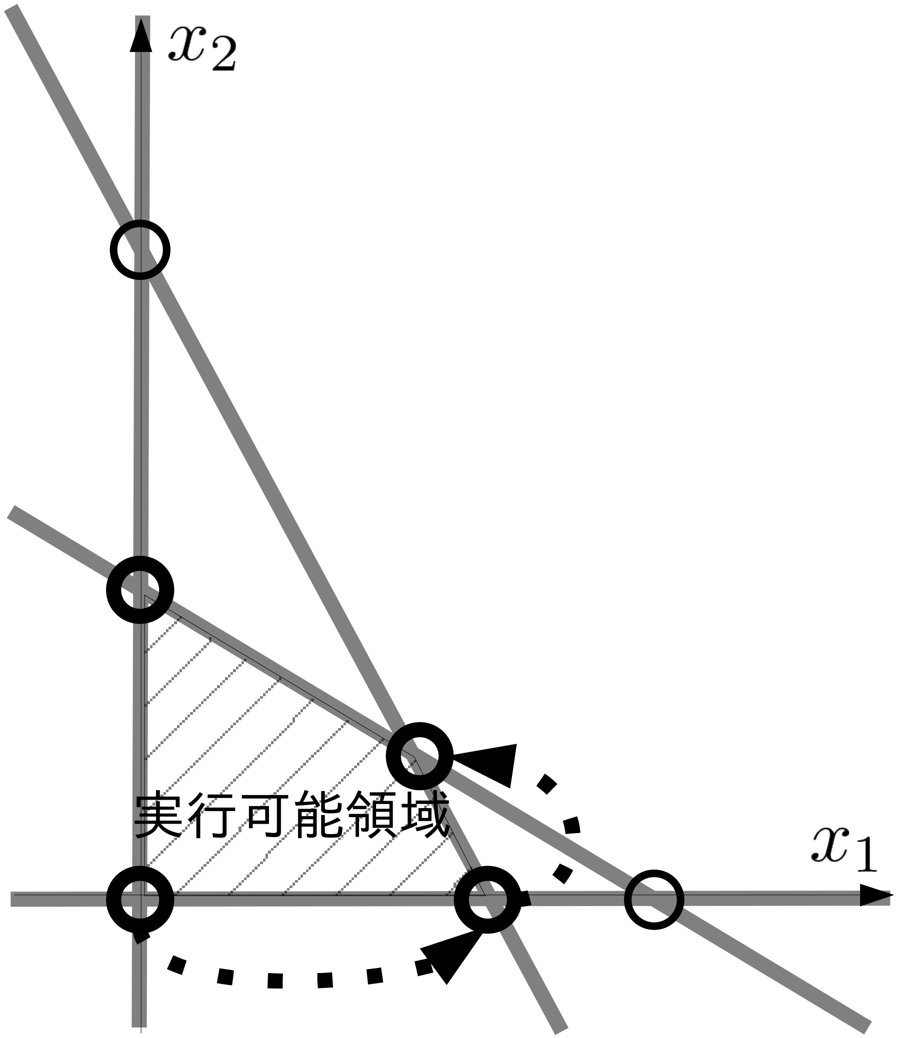
$$
\begin{aligned}
3x_1 \quad +x_2+x_3 \quad &= 45\times10^3\\
x_1 \quad +2x_2 \quad +x_4 &= 40\times10^3\\
z+600x_1+500x_2 \quad &= 0
\end{aligned}
$$

$-\times 1$

$-\times 600$

| $z$ | $x_1$ | $x_2$ 非 | $x_3$ 非 | $x_4$ | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1/3 | 1/3 | 0 | $15\times10^3$ | |
| 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | $40\times10^3$ | |
| 1 | 600 | 500 | 0 | 0 | 0 | |

# 復習:単体法

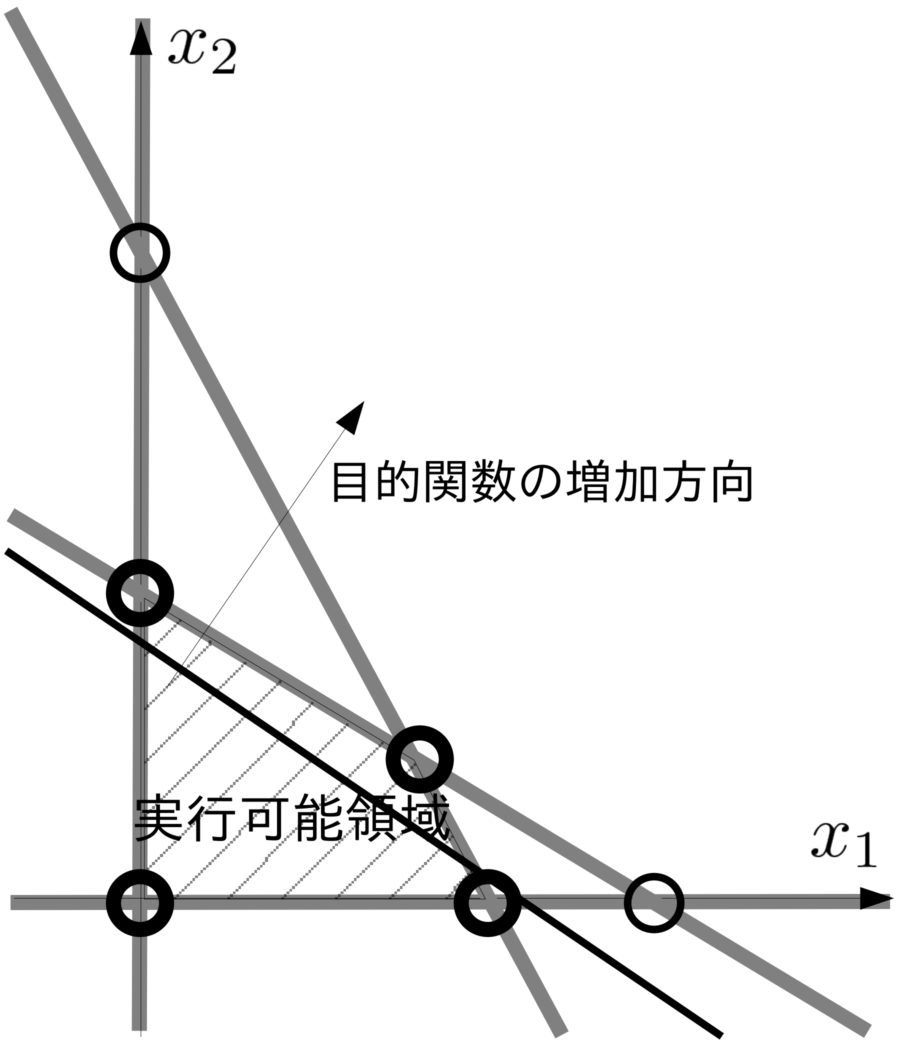



| $z$ | $x_1$ 非 | $x_2$ 非 | $x_3$ | $x_4$ | 定数 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | $45\times10^3$ |
| 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | $40\times10^3$ |
| 1 | 600 | 500 | 0 | 0 | 0 |

| $z$ | $x_1$ | $x_2$ 非 | $x_3$ 非 | $x_4$ | 定数 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1/3 | 1/3 | 0 | 15000 |
| 0 | 0 | 5/3 | -1/3 | 1 | 25000 |
| 1 | 0 | 300 | -200 | 0 | -9000000 |

| $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ 非 | $x_4$ 非 | 定数 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 2/5 | -1/5 | 10000 |
| 0 | 0 | 1 | -1/5 | 3/5 | 15000 |
| 1 | 0 | 0 | -140 | -180 | -13500000 |

# 初期基本解の決定法




•原点が実行可能領域に有る場合

maximize
$600x_1 + 500x_2$
subject to
$3x_1 + x_2 \leq 45 \times 10^3$
$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$
$x_1, x_2 \geq 0$

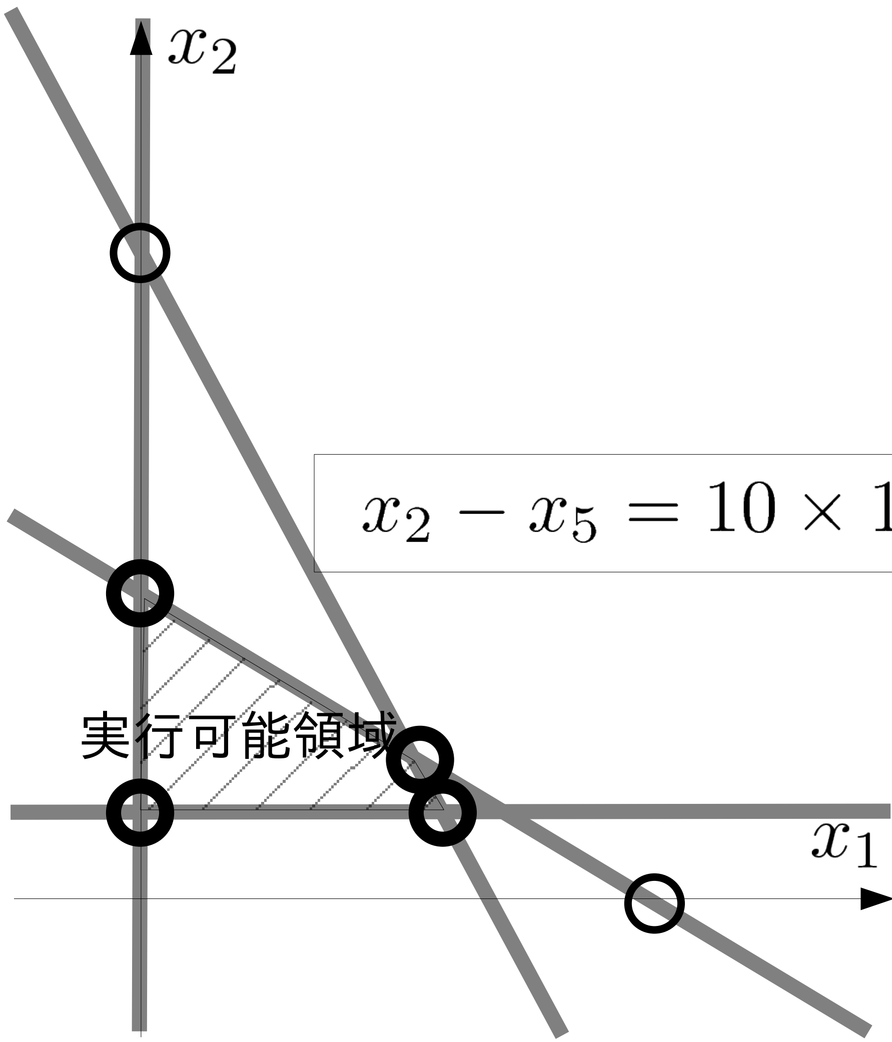
等式標準形において、slack 変数の係数が全て正であれば slack 変数を基底変数とした基本解が実行可能解となり初期解に利用できる。

# 初期基本解の決定法

- 原点が実行可能領域に無い場合

maximize
$$600x_1 + 500x_2$$
subject to
$$3x_1 + x_2 \leq 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$
$$x_2 \geq 10 \times 10^3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_2 - x_5 = 10 \times 10^3$$




~~等式標準形において、slack 変数の係数が全て正であれば slack 変数を基底変数とした基本解が実行可能解となり初期解に利用できる。~~

# 2段階単体法

原点を実行可能領域に含む人工線形計画問題を作り
人工問題の最適解から元の問題の初期解を得る。

**等式標準形**

minimize

$$z = -6x_1 + 6x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

**人工問題の等式標準形**

minimize

$$z = \boxed{x_5 + x_6}$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \quad &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 \quad \boxed{+x_5} &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 \boxed{+x_6} &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \boxed{x_5, x_6} \geq 0$$

人工問題は $z, x_3, x_5, x_6$ を基底変数、$x_1, x_2, x_4$ を非基底変数とした基本解を実行可能領域に含む。→ $(x_1, x_2)$ の原点から単体法を実行できる。
人工問題の最適解が $z = 0 \Rightarrow x_5 = x_6 = 0$ であれば、その基本解は元の問題で実行可能領域に含まれる。

## 2段階単体法

制約式から人工変数の表現を得て、目的関数に代入する

$$\boxed{x_5 = 5x_1 - 9x_2 + 15}$$

$$\boxed{x_6 = 6x_1 - 3x_2 + x_4 + 3}$$

原点を実行可能領域に含む人工線形計画問題を作り人工問題の最適解から元の問題の初期解を得る。

## 1段目の単体法

人工問題の等式標準形

minimize

$$z = \boxed{x_5 + x_6}$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \quad\quad &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 \quad\quad \boxed{+x_5} &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 \boxed{+x_6} &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, \boxed{x_5, x_6} &\geq 0 \end{aligned}$$

人工問題の等式標準形

minimize

$$z$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \quad\quad &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 \quad\quad \boxed{+x_5} &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 \boxed{+x_6} &= 3 \\ z - 11x_1 + 12x_2 - x_4 \quad\quad &= 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

人工問題は $z, x_3, x_5, x_6$ を基底変数、 $x_1, x_2, x_4$ を非基底変数とした基本解を実行可能領域に含む。→ $(x_1, x_2)$ の原点から単体法を実行できる。
人工問題の最適解が $z = 0 \Rightarrow x_5 = x_6 = 0$ であれば、その基本解は元の問題で実行可能領域に含まれる。

## 初期のsimplex表

| 基底変数 | 非基底変数 | 非基底変数 | 基底変数 | 非基底変数 | 基底変数 | 基底変数 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | 定数 |
| 0 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| 0 | -5 | 9 | 0 | 0 | 1 | 0 | 15 |
| 0 | -6 | 3 | 0 | -1 | 0 | 1 | 3 |
| 1 | -11 | 12 | 0 | -1 | 0 | 0 | 18 |

## 終了時のsimplex表

| 基底変数 | 基底変数 | 基底変数 | 非基底変数 | 基底変数 | 非基底変数 | 非基底変数 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | 定数 |
| 0 | 1 | 0 | 3/11 | 0 | -1/11 | 0 | 3/11 |
| 0 | 0 | 0 | -13/11 | 1 | 8/11 | -1 | 9/11 |
| 0 | 0 | 1 | 5/33 | 0 | 2/33 | 0 | 20/11 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

こうして得た人工問題の基本解は元の問題の実行可能領域の端点になっている。さらに目的関数を元に戻して、simplex 法を実行することで、元の問題の最適解を得ることができる。

- 最初のsimplex表

| $z$ | $x_1$　非 | $x_2$　非 | $x_3$ | $x_4$　非 | $x_5$ | $x_6$ | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 | |
| 0 | -5 | 9 | 0 | 0 | 1 | 0 | 15 | |
| 0 | -6 | 3 | 0 | -1 | 0 | 1 | 3 | |
| 1 | -11 | 12 | 0 | -1 | 0 | 0 | 18 | |

- 最初の基本解
  非基底変数： $(x_1, x_2, x_4) = (0, 0, 0)$
  基底変数： $(z, x_3, x_5, x_6) = (18, 6, 15, 3)$
- 制約式を満たす＝非負条件を満たす

| $z$ | $x_1$　非 | $x_2$　~~非~~ | $x_3$ | $x_4$　非 | $x_5$ | $x_6$　非 | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 | $/3 = 2$ |
| 0 | -5 | 9 | 0 | 0 | 1 | 0 | 15 | $/9 = 5/3$ |
| 0 | -6 | 3 | 0 | -1 | 0 | 1 | 3 | $/3 = 1$ |
| 1 | -11 | 12 | 0 | -1 | 0 | 0 | 18 | |

- 連立方程式を解く

| | $z$ | $x_1$ 非 | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ 非 | $x_5$ | $x_6$ 非 | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 | |
| | 0 | -5 | 9 | 0 | 0 | 1 | 0 | 15 | |
| $\times 1/3$ | 0 | -6 | 3 | 0 | -1 | 0 | 1 | 3 | |
| | 1 | -11 | 12 | 0 | -1 | 0 | 0 | 18 | |

| | $z$ | $x_1$ 非 | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ 非 | $x_5$ | $x_6$ 非 | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\times 3$ | 0 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 | |
| $-\times 9$ | 0 | -5 | 9 | 0 | 0 | 1 | 0 | 15 | |
| | 0 | -2 | 1 | 0 | -1/3 | 0 | 1/3 | 1 | |
| $-\times 12$ | 1 | -11 | 12 | 0 | -1 | 0 | 0 | 18 | |

| $z$ | $x_1$ 非 | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ 非 | $x_5$ | $x_6$ 非 | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 8 | 0 | 1 | 1 | 0 | -1 | 3 | |
| 0 | 13 | 0 | 0 | 3 | 1 | -3 | 6 | |
| 0 | -2 | 1 | 0 | -1/3 | 0 | 1/3 | 1 | |
| 1 | 13 | 0 | 0 | 3 | 0 | -4 | 6 | |

- 制約式を満たす＝非負条件を満たす

- 変数の交換

| $z$ | $x_1$ ~~非~~ | $x_2$ | $x_3$ 非 | $x_4$ 非 | $x_5$ | $x_6$ 非 | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 8 | 0 | 1 | 1 | 0 | -1 | 3 | $/8=3/8$ |
| 0 | 13 | 0 | 0 | 3 | 1 | -3 | 6 | $/13=6/13$ |
| 0 | -2 | 1 | 0 | -1/3 | 0 | 1/3 | 1 | $/-2=-1/2$ |
| 1 | 13 | 0 | 0 | 3 | 0 | -4 | 6 | |

| | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ 非 | $x_4$ 非 | $x_5$ | $x_6$ 非 | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\times 1/8$ | 0 | 8 | 0 | 1 | 1 | 0 | -1 | 3 | |
| | 0 | 13 | 0 | 0 | 3 | 1 | -3 | 6 | |
| | 0 | -2 | 1 | 0 | -1/3 | 0 | 1/3 | 1 | |
| | 1 | 13 | 0 | 0 | 3 | 0 | -4 | 6 | |

| $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ 非 | $x_4$ 非 | $x_5$ | $x_6$ 非 | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1/8 | 1/8 | 0 | -1/8 | 3/8 | |
| 0 | 0 | 0 | -13/8 | 11/8 | 1 | -11/8 | 9/8 | |
| 0 | 0 | 1 | 1/4 | -1/12 | 0 | 1/12 | 7/4 | |
| 1 | 0 | 0 | -13/8 | 11/8 | 0 | -19/8 | 9/8 | |

- 制約式を満たす＝非負条件を満たす

- 変数の交換

| $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ 非 | $x_4$ ~~非~~ | $x_5$ 非 | $x_6$ 非 | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1/8 | 1/8 | 0 | -1/8 | 3/8 | $\times 8 = 3$ |
| 0 | 0 | 0 | -13/8 | 11/8 | 1 | -11/8 | 9/8 | $/\frac{11}{8} = 9/11$ |
| 0 | 0 | 1 | 1/4 | -1/12 | 0 | 1/12 | 7/4 | |
| 1 | 0 | 0 | -13/8 | 11/8 | 0 | -19/8 | 9/8 | |

| $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ 非 | $x_4$ | $x_5$ 非 | $x_6$ 非 | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1/8 | 1/8 | 0 | -1/8 | 3/8 | |
| $\times 8/11$ 0 | 0 | 0 | -13/11 | 1 | 8/11 | -1 | 9/11 | |
| 0 | 0 | 1 | 1/4 | -1/12 | 0 | 1/12 | 7/4 | |
| 1 | 0 | 0 | -13/8 | 11/8 | 0 | -19/8 | 9/8 | |

| $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ 非 | $x_4$ | $x_5$ 非 | $x_6$ 非 | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 3/11 | 0 | -1/11 | 0 | 3/11 | |
| 0 | 0 | 0 | -13/11 | 1 | 8/11 | -1 | 9/11 | |
| 0 | 0 | 1 | 5/33 | 0 | 0 | 0 | 20/11 | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | |

- 制約式を満たす＝非負条件を満たす

- 1段目の単体法が完了し、人工問題の最適解が求まる

| $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$　非 | $x_4$ | $x_5$　非 | $x_6$　非 | 定数 | 最大増加量 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 3/11 | 0 | -1/11 | 0 | 3/11 | |
| 0 | 0 | 0 | -13/11 | 1 | 8/11 | -1 | 9/11 | |
| 0 | 0 | 1 | 5/33 | 0 | 0 | 0 | 20/11 | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | |

- 最適解は元の問題の端点を成す

人工問題の等式標準形

minimize

$$z$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \quad &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 \quad + x_5 &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 + x_6 &= 3 \\ z - 11x_1 + 12x_2 - x_4 \quad &= 18 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

等式標準形

minimize

$$z = -6x_1 + 6x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$