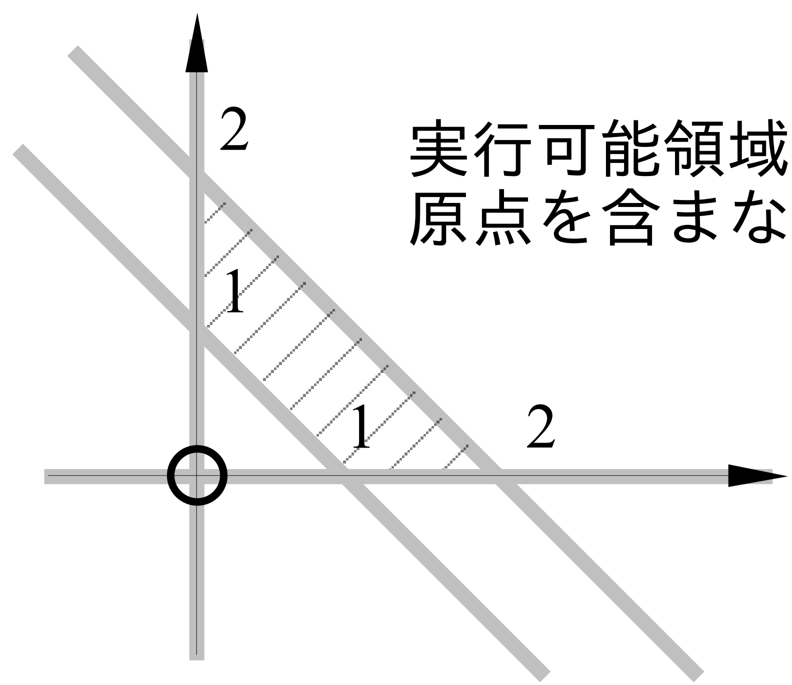
数理計画法

第7回：罰則付単体法と単体法の行列表現

復習:演習(単体法の2段解法)

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} \;\; x_1 + 2x_2 \\
&\text{subject to} \\
&x_1 + x_2 \leq 2 \\
&x_1 + x_2 \geq 1 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



復習:演習(単体法の2段解法)

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

等式標準形

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad z \\
&\text{subject to} \\
&\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
&\qquad x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
&z + x_1 + 2x_2 = 0 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

人工問題の等式標準形

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad z^* \\
&\text{subject to} \\
&\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
&\qquad x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\
&z^* + x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
&(z + x_1 + 2x_2 = 0) \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

復習:演習(単体法の2段解法)

- 人工問題(or補助問題)の等式標準形に対応して simplex 表を作る
- 単体法を用いて第1段、第2段の線形計画問題を解く

人工問題の等式標準形

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad z^* \\
&\text{subject to} \\
&\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
&\qquad x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\
&z^* + x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
&(z + x_1 + 2x_2 = 0) \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

z, z^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	
0	1	1	0	-1	1	1	
z^* 1	1	1	0	-1	0	1	
z 1	1	2	0	0	0	0	

復習：演習（単体法の2段解法）

- 人工問題(=z* 最小化問題)を解く
  6変数3制約なので、基底/非基底変数は 3/3

z,z^*	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 **非**	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	/1=2
0	1	1	0	-1	1	1	/1=1
z* 1	1	1	0	-1	0	1	
z 1	1	2	0	0	0	0	

z,z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0 ~~1~~	0 ~~1~~	1	1 ~~0~~	-1 ~~0~~	1 ~~2~~	-×1
0	1	1	0	-1	1	1	
z* 1	0 ~~1~~	0 ~~1~~	0	0 ~~-1~~	-1 ~~0~~	0 ~~1~~	
z 1	0 ~~1~~	1 ~~2~~	0	1 ~~0~~	-1 ~~0~~	-1 ~~0~~	

復習：演習（単体法の2段解法）

- 非基底変数の係数が非正なので終了
  z*=0 となる最適解が求まった→成功

z, z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0	0	1	1	-1	1	
0	1	1	0	-1	1	1	
z^* 1	0	0	0	0	-1	0	
z 1	0	1	0	1	-1	-1	

- 元の線形計画問題= z の最小化問題を解く

z, z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0	0	1	1	-1	1	
0	1	1	0	-1	1	1	
z^* 1	0	0	0	0	-1	0	
z 1	0	1	0	1	-1	-1	

罰則付単体法

- 2段階法における人工(補助)問題と元の問題の関係
  - まず z^* を最小化して、次に z を最小化する
- 人工問題を同時に解く方法＝罰則付単体法
  - z の最小化と人工変数=0 が成立すれば良い
  - z, z^* を同時($z^*=0$ 優先)に最適化＝罰則付単体法
    - $z+M\times z^*$ (M は大きな数) を最小化する
M の影響が大きいので z^* の最小化→$z^*=0$ が優先的に実現される

罰則付単体法

- 2段解法の人工(補助)問題と元の問題を併せた罰則付の線形計画問題を作る

等式標準形

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad z \\
\text{subject to} \\
\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
\qquad x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
z + x_1 + 2x_2 = 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

罰則付問題の等式標準形

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad z + Mz^* \\
\text{subject to} \\
\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
\qquad x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\
z^* + x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
(z + x_1 + 2x_2 = 0) \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

罰則付単体法

- 罰則付問題の等式標準形に対応して simplex 表を作る

$z+M\ z^*$	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_4	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	
0	1	1	0	-1	1	1	
1	1+M	2+M	0	-M	0	M	

- M=100 とした場合

$z+M\ z^*$	x_1 非	x_2 ~~非~~	x_3	x_4 非	x_4 非	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	/1=2
0	1	1	0	-1	1	1	/1=1
1	101	102	0	-100	0	100	

$z+M\ z^*$	x_1 0 非	x_2 0	x_3	x_4 1 非	x_4 -1非	定数 1	最大増加量
0	~~1~~	~~1~~	1	~~0~~	~~0~~	~~2~~	-×1
0	1	1	0	-1	1	1	-×102
1	~~101~~	~~102~~	0	~~-100~~	~~0~~	~~100~~	
	-1	0		2	-102	-2	

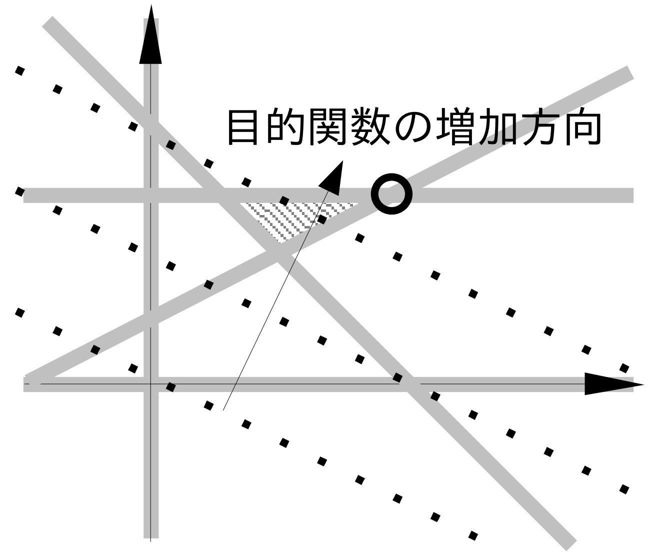
罰則付単体法

- 2段階法における人工(補助)問題と元の問題の関係
  - まず z^* を最小化して、次に z を最小化する
- 人工問題を同時に解く方法＝罰則付単体法
  - z の最小化と人工変数=0 が成立すれば良い
  - z,z^* を同時($z^*=0$ 優先)に最適化＝罰則付単体法
    - $z+M\times z^*$ (M は大きな数) を最小化する
      M の影響が大きいので z^* の最小化→$z^*=0$ が優先的に実現される
- 安全な罰則(M)を決める方法が無い
  - M を任意の数よりも大きい数として扱う
    - 2段階法と同じ手間になる

演習

課題:次の線形計画問題を単体法を用いて解く

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} \quad z = x_1 + 2x_2 \\
&\text{subject to} \\
&x_1 + x_2 \geq 4, \quad x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0 \\
&x_2 \leq 3, \;\; x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



注意: 原点は実行可能領域ではありません

ヒント:

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{min.} & z = -x_1 - 2x_2 \\
\texttt{s.t.} & x_1 + x_2 \geq 4 \\
& -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{min.} & z = -x_1 - 2x_2 \\
\texttt{s.t.} & x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\
& -x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\
& x_2 + x_5 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

線形計画問題の行列表現(等式標準形)

minimize
$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$
subject to
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1m} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2m} \\ \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$$

minimize
$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
subject to
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{q} \Leftrightarrow p_j \leq q_j,\ j = 1, \ldots,$$

線形計画問題の行列表現(不等式標準形)

minimize

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_m x_m$$

subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \geq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \geq b_n$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

minimize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

線形計画問題の行列表現(単体法)

maximize

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_m x_m$$

subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

minimize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

基底変数：$\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}\} \subset \{x_1, \ldots, x_m\} \qquad (n \leq m)$

非基底変数：$\{x_{j_{n+1}}, \ldots, x_{j_m}\} = \{x_1, \ldots, x_m\} \setminus \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}\}$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}) \qquad \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} = (x_{j_{n+1}}, \ldots, x_{j_m})$$

$$\{c_{j_1}, \ldots, c_{j_m}\} = \{c_1, \ldots, c_m\} \quad \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} = (c_{j_1}, \ldots, c_{j_n}) \quad \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} = (c_{j_{n+1}}, \ldots, c_{j_m})$$

$$\{a_{kj_1}, \ldots, a_{kj_m}\} = \{a_{k1}, \ldots, a_{km}\} \qquad k = 1, \ldots, n$$

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} a_{1j_1} & \ldots & a_{1j_n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & \ldots & a_{nj_n} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} a_{1j_{n+1}} & \ldots & a_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nj_{n+1}} & \ldots & a_{nj_m} \end{pmatrix}$$

線形計画問題の行列表現

minimize
$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
subject to
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

minimize
$$z = \boxed{c_{j_1}x_{j_1} + \cdots + c_{j_n}x_{j_n}} + \boxed{c_{j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m}x_{j_m}}$$
subject to
$$\begin{array}{lcll}
a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n}x_{j_n} & + & a_{1j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m}x_{j_m} & = b_1 \\
a_{2j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n}x_{j_n} & + & a_{2j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m}x_{j_m} & = b_2 \\
 & & \vdots & \\
a_{nj_1}x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n}x_{j_n} & + & a_{nj_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m}x_{j_m} & = b_n
\end{array}$$
$$\underbrace{x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}}_{\text{基底変数}}, \underbrace{x_{j_{n+1}} \ldots, x_{j_m}}_{\text{非基底変数}} \geq 0$$

線形計画問題の行列表現

minimize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \geq \boldsymbol{0}$$

単体法の各段階での操作は z が減少するように $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}, \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}},$ を更新するものになる。

minimize

$$z = \boxed{c_{j_1}x_{j_1} + \cdots + c_{j_n}x_{j_n}}^{\,\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}} + \boxed{c_{j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m}x_{j_m}}^{\,\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}}$$

subject to

$$\begin{array}{ccccc}
a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n}x_{j_n} & + & a_{1j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m}x_{j_m} & = & b_1 \\
a_{2j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n}x_{j_n} & + & a_{2j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m}x_{j_m} & = & b_2 \\
\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} & & \vdots \quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} & & \\
a_{nj_1}x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n}x_{j_n} & + & a_{nj_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m}x_{j_m} & = & b_n
\end{array}$$

$$\boxed{x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}}^{\,\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}}, \boxed{x_{j_{n+1}}, \ldots, x_{j_m}}^{\,\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}} \geq 0$$