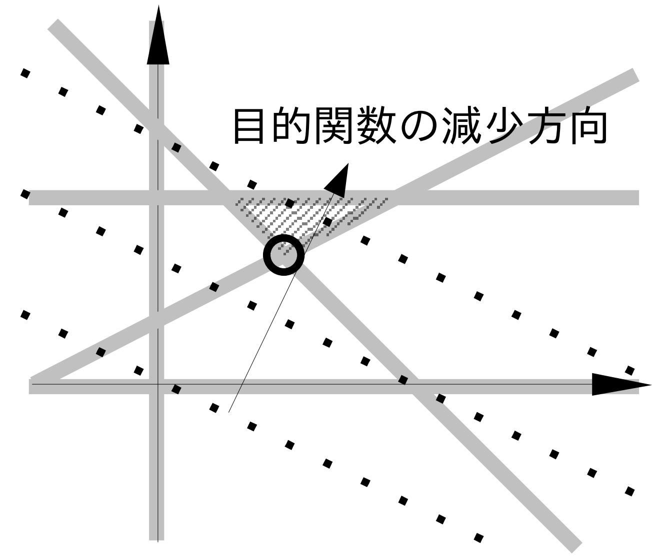
# 復習:2段階単体法と罰則付単体法

課題:次の線形計画問題を単体法を用いて解く

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad z(=-x_1-2x_2) \\
\text{subject to} \\
\begin{array}{rrrrrl}
x_1 & +x_2 & -x_3 & & & =4 \\
-x_1 & +2x_2 & & -x_4 & & =2 \\
 & x_2 & & & +x_5 & =3 \\
z+x_1 & +2x_2 & & & & =0
\end{array} \\
x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \geq 0
\end{array}
$$




注意: 原点は実行可能領域ではありません

# 復習:2段階単体法と罰則付単体法

- 2段階単体法

まず、$z^*$ を最小化する

$z^*$=0 を得られたら

$z$ を最小化して

元の問題の最適解を得る

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad z^* \to 0 \Rightarrow \text{minimize} \quad z \\
\text{subject to} \\
\qquad x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 4 \\
\qquad -x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 2 \\
\qquad x_2 + x_5 = 3 \\
\qquad z + x_1 + 2x_2 = 0 \\
\qquad z^* + 3x_2 - x_3 - x_4 = 6 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{array}
$$

- 罰則付単体法

十分大きな M により、

$z+Mz^*$ の最小化で、

$z^*$=0, $z$ の最小化が

同時に実現する

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad \tilde{z} = z + Mz^* \\
\text{subject to} \\
\qquad x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 4 \\
\qquad -x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 2 \\
\qquad x_2 + x_5 = 3 \\
\tilde{z} + x_1 + (3M+2)x_2 - Mx_3 - Mx_4 = 6 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{array}
$$

# 復習:2段階単体法と罰則付単体法

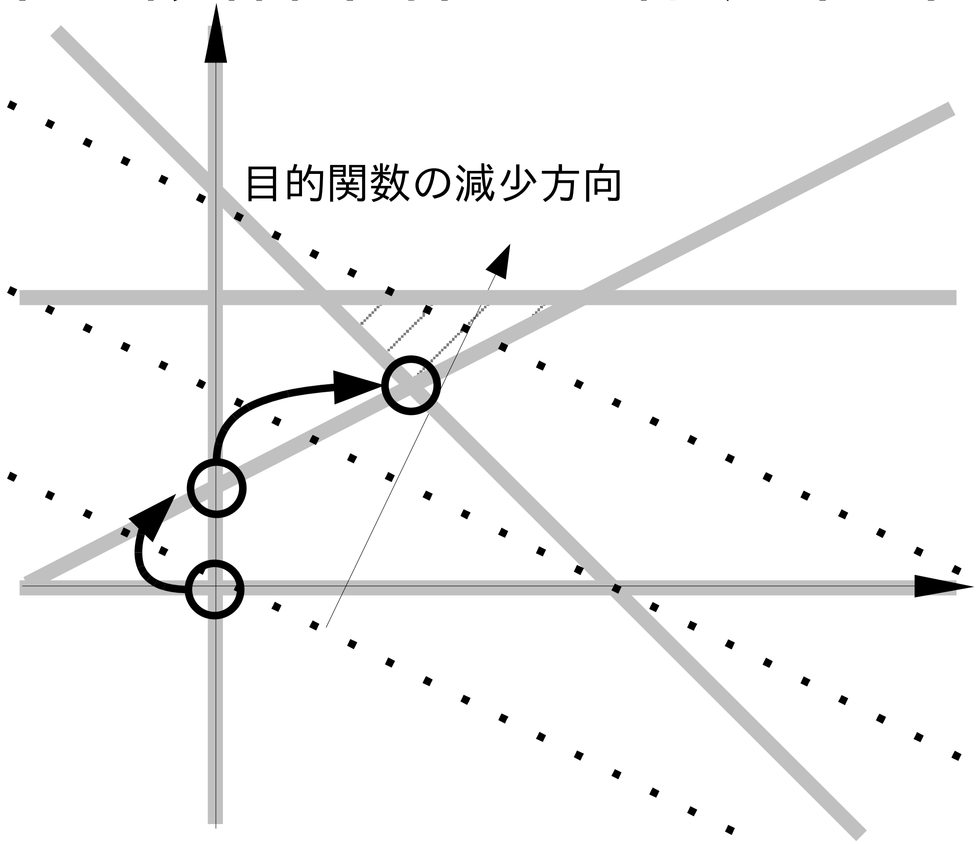
| | z,z* | x1 非 | x2 ~~非~~ | x3 非 | x4 非 | x5 | x6 | x7 非 | 定数 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ×-1 | | 1/2 1 | -1 1 | -1 | 1/2 | | 1 | -1/2 | -1 4 | /1=4 |
| ×1/2 | | -1/2 ~~-1~~ | 1 ~~2~~ | | -1/2 ~~-1~~ | | | 1/2 ~~1~~ | 1 ~~2~~ | /2=1 |
| ×-1 | | 1/2 | -1 1 | | 1/2 | 1 | | -1/2 | -1 3 | /1=3 |
| ×-3 | 1 | 3/2 | -3 3 | -1 | 3/2 -1 | | | -3/2 | -3 6 | |
| ×-2 | 1 | 1 1 | -2 2 | | 1 | | | -1 | -2 0 | |

| | z,z* | x1 ~~非~~ | x2 | x3 非 | x4 非 | x5 | x6 非 | x7 非 | 定数 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ×2/3 | | 1 ~~3/2~~ | 0 | -2/3 ~~-1~~ | 1/3 ~~1/2~~ | | 2/3 ~~1~~ | -1/3 ~~-1/2~~ | 2 ~~3~~ | /(3/2)=2 |
| ×1/2 | | 1/2 -1/2 | 1 | -1/3 | 1/6 -1/2 | | 1/3 | -1/6 1/2 | 1 1 | /(-1/2)<0 |
| ×-1/2 | | -1/2 1/2 | 0 | 1/3 | -1/6 1/2 | 1 | -1/3 | 1/6 -1/2 | -1 2 | /(1/2)=4 |
| ×-3/2 | 1 | -3/2 3/2 | 0 | 1 -1 | -1/2 1/2 | | -1 | 1/2 -3/2 | -3 3 | |
| ×-2 | 1 | -2 2 | 0 | 4/3 | -2/3 1 | | -4/3 | 2/3 -1 | -4 -2 | |

| z,z* | x1 | x2 | x3 非 | x4 非 | x5 | x6 非 | x7 非 | 定数 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | | -2/3 | 1/3 | | 2/3 | -1/3 | 2 | x1=2 |
| | 0 | 1 | -1/3 | -1/3 | | 1/3 | 1/3 | 2 | x2=2 |
| | 0 | | 1/3 | 1/3 | 1 | -1/3 | -1/3 | 1 | |
| 1 | 0 | | 0 | 0 | | -1 | -1 | 0 | |
| 1 | 0 | | 4/3 | 1/3 | | -4/3 | -1/3 | -6 | |

実行可能領域

# 復習:2段階単体法と罰則付単体法




| z,z* | x1 | x2 | x3 非 | x4 非 | x5 | x6 非 | x7 非 | 定数 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | | -2/3 | 1/3 | | 2/3 | -1/3 | 2 |
| | 0 | 1 | -1/3 | -1/3 | | 1/3 | 1/3 | 2 |
| | 0 | | 1/3 | 1/3 | 1 | -1/3 | -1/3 | 1 |
| 1 | 0 | | 0 | 0 | | -1 | -1 | 0 |
| 1 | 0 | | 4/3 | 1/3 | | -4/3 | -1/3 | -6 |

x1=2

x2=2

# 復習:2段階単体法と罰則付単体法

- 罰則付単体法

十分大きな M により、

$z+Mz^*$ の最小化で、

$z^*=0$, $z$ の最小化が

同時に実現する

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad \tilde{z} = z + Mz^* \\
\text{subject to} \\
\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 - x_3 + x_6 &=& 4 \\
-x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 &=& 2 \\
x_2 + x_5 &=& 3 \\
\tilde{z} + x_1 + (3M+2)x_2 - Mx_3 - Mx_4 &=& 6
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{array}
$$

| z˜ | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | 定数 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | -1 | | | 1 | | 4 |
| | -1 | 2 | | -1 | | | 1 | 2 |
| | | 1 | | | 1 | | | 3 |
| 1 | 1 | 3M+2 | -M | -M | | | | 6 |

# 復習:2段階単体法と罰則付単体法

| | z,z* | x1 非 | x2 ~~非~~ | x3 非 | x4 非 | x5 | x6 | x7 非 | 定数 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ×-1 | | 1/2 1 | -1 1 | -1 | 1/2 | | 1 | -1/2 | -1 4 | /1=4 |
| ×1/2 | | -1/2 ~~-1~~ | 1 ~~2~~ | | -1/2 ~~-1~~ | | | 1/2 ~~1~~ | 1 ~~2~~ | /2=1 |
| ×-1 | | 1/2 | -1 1 | | 1/2 | 1 | | -1/2 | -1 3 | /1=3 |
| ×-302 | 1 | 151 1 | -302 302 | -100 | 151 -100 | | | -151 | 302 6 | |

| | z,z* | x1 ~~非~~ | x2 | x3 非 | x4 非 | x5 | x6 非 | x7 非 | 定数 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ×2/3 | | 1 ~~3/2~~ | 0 | -2/3 ~~-1~~ | 1/3 ~~1/2~~ | | 2/3 ~~1~~ | -1/3 ~~-1/2~~ | 2 ~~3~~ | /(3/2)=2 |
| ×1/2 | | 1/2 -1/2 | 1 | -1/3 | 1/6 -1/2 | | 1/3 | -1/6 1/2 | 1 1 | /(-1/2)<0 |
| ×-1/2 | | -1/2 1/2 | 0 | 1/3 | -1/6 1/2 | 1 | -1/3 | 1/6 -1/2 | -1 2 | /(1/2)=4 |
| ×-151 | 1 | -151 151 | 0 | -100 302/3 | 51 -151/3 | | -302/3 | -151 151/3 | 308 -302 | |

| | z,z* | x1 | x2 | x3 非 | x4 非 | x5 | x6 非 | x7 非 | 定数 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ×2/3 | | 1 | | 2/3 -2/3 | 2/3 1/3 | 2 | -2/3 2/3 | -2/3 -1/3 | 2 2 | |
| ×1/3 | | 0 | 1 | 1/3 -1/3 | 1/3 -1/3 | 1 | -1/3 1/3 | -1/3 1/3 | 1 2 | |
| ×3 | | 0 | | 1 ~~1/3~~ | 1 ~~1/3~~ | 3 ~~1~~ | -1 ~~-1/3~~ | -1 ~~-1/3~~ | 3 ~~1~~ | /(1/3)=3 |
| ×-2/3 | 1 | 0 | | -2/3 2/3 | -2/3 2/3 | -2 | -302/3 2/3 | -302/3 2/3 | -2 6 | |

| z,z* | x1 | x2 | x3 非 | x4 | x5 非 | x6 非 | x7 非 | 定数 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | | 0 | 1 | 2 | 0 | -1 | 4 |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| | 0 | | 1 | 1 | 3 | -1 | -1 | 3 |
| 1 | 0 | | 0 | 0 | -2 | -100 | -100 | 4 |

x1=2

x2=2

最適解

# 復習:2段階単体法と罰則付単体法

| z,z* | x1 非 | x2 ~~非~~ | x3 非 | x4 非 | x5 | x6 | x7 非 | 定数 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ×-1 | 1/2 1 | -1 1 | -1 | 1/2 | | 1 | -1/2 | -1 4 | /1=4 |
| ×1/2 | -1/2 ⇐ -1 | 1 ⇐ 2 | | -1/2 ⇐ -1 | | | 1/2 ⇐ 1 | 1 ⇐ 2 | /2=1 |
| ×-1 | 1/2 | -1 1 | | 1/2 | 1 | | -1/2 | -1 3 | /1=3 |
| × -3M +2 1 | 3M/2 -1 | -3M +2 3M -1 | -M | 3M/2 -1 -M | | | -3M/2 +1 | 3M -2 6 | |

- 非常に大きい数 M を記号で残した場合、
  - シンプレックス表には M の係数と定数の両方を記録しなければならない
  - 連立方程式の解法では M の係数と定数の両方を掃き出さなければならない
- 結局、2段階単体法で z* と同時に z の式を扱うのと同じことになる

# 復習:2段階単体法と罰則付単体法

- 2段階法における人工(補助)問題と元の問題の関係
  - まず $z^*$ を最小化して、次に $z$ を最小化する
- 人工問題を同時に解く方法=罰則付単体法
  - $z$ の最小化と人工変数=0 が成立すれば良い
  - $z, z^*$ を同時($z^*=0$ 優先)に最適化=罰則付単体法
    - $z+M\times z^*$ ($M$ は大きな数) を最小化する
      $M$ の影響が大きいので $z^*$ の最小化→$z^*=0$ が優先的に実現される
- 安全な罰則( $M$ )を決める方法が無い
  - $M$ を任意の数よりも大きい数として扱う
    - 2段階法と同じ手間になる

# 線形計画問題の行列表現(等式標準形)

minimize

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$

subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$$

minimize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{q} \Leftrightarrow p_j \leq q_j, \; j = 1, \ldots,$$

# 線形計画問題の行列表現

minimize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \geq \boldsymbol{0}$$

単体法の各段階での操作は $z$ が減少するように $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}, \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}},$ を更新するものになる。

minimize

$$z = \underbrace{c_{j_1}x_{j_1} + \cdots + c_{j_n}x_{j_n}}_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}} + \underbrace{c_{j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m}x_{j_m}}_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}}$$

subject to

$$\begin{array}{ccccc}
a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n}x_{j_n} & + & a_{1j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m}x_{j_m} & = & b_1 \\
a_{2j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n}x_{j_n} & + & a_{2j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m}x_{j_m} & = & b_2 \\
\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} & & \vdots \quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} & & \\
a_{nj_1}x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n}x_{j_n} & + & a_{nj_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m}x_{j_m} & = & b_n
\end{array}$$

$$\underbrace{x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}}, \underbrace{x_{j_{n+1}}, \ldots, x_{j_m}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}} \geq 0$$

# 線形計画問題の行列表現(単体法)

minimize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

原点を実行可能領域に
持つ線形計画問題の
不等式標準形を考える。

minimize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \geq \boldsymbol{0}$$

スラック変数 $\boldsymbol{x}'^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_n)$
を導入して等式標準形とsimplex
表を得る。

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# 線形計画問題の行列表現(単体法)

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= 0 \end{aligned}$$

最初のsimplex表

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{A}$

基底変数の連立方程式とその解は

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = -\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = -\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b}$

非基底変数はゼロなので、

目的関数値もゼロ

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= 0 \end{aligned}$$

単体法の操作により各行列要素が

更新されるが $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I}$ と $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{0}$

は保たれるので基底解は常に

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{0}$

終了時の $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{b}$ が最適解となる。

※更新される必要があるのは非基底変数の選択時に必要な $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}$
と基底変数の選択時に必要な $\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}$ と $\boldsymbol{b}$ だけ。

※単体法の操作で繰り返される $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I}$ を維持するピボット変換により
誤差が蓄積する(誤差を含む係数行列を元に計算が繰り返される。)

# 線形計画問題の行列表現(改訂単体法)

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= 0 \end{aligned}$$

最初のsimplex表

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{A}$

基底変数の連立方程式とその解は

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = -\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = -\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b}$

非基底変数はゼロなので、

目的関数値もゼロ

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= 0 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}$ が正則なら変数の交換に必要な情報は計算で求まる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ z &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}) + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{aligned}$$

(必要なのは$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$の係数：

$-\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}$)

※基底・非基底変数の分類(と $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}$ )だけを更新する改訂単体法が考えられる。

# 単体法

単体法は次の行列表現に対応するsimplex表の更新により最適解を得る。

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= 0 \end{aligned}}$$

simplex 表の更新は基底変数と非基底変数一つずつの交換対応し $z$ が増加するように交換する変数が選ばれる。
また、その過程で必要となる $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}$ の値や $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$ の係数 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}$ を求めるために $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I}$ を保つピボット変換が実施される。

# 改訂単体法

改訂単体法では次の行列表現ベクトルや行列の値は更新せず、代りに基

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= 0 \end{aligned}}$$

底・非基底変数の分類を記憶し $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}$ や $\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}$ は変数の情報を元に制約式全体の係数行列から求めるものとする。
その過程で $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}$ が正則であるなら変数の交換に必要な情報は次の計算で

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ z &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}})\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{aligned}$$

求まる。

# 双対問題

minimize
$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$
subject to
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &\geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &\geq b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &\geq b_n \end{aligned}$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

主問題

maximize
$$w = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_ny_n$$
subject to
$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{n1}y_n &\leq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{n2}y_n &\leq c_2 \\ &\vdots \\ a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + \cdots + a_{nm}y_n &\leq c_m \end{aligned}$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0$$

双対問題

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

$n$ 行 $m$ 列の係数行列と $m$ 個の変数、
$n$ 通りの制約式からなる主問題

$m$ 行 $n$ 列の係数行列と $n$ 個の変数、
$m$ 通りの制約式からなる双対問題

# 双対定理

線形計画問題とその双対問題が右のように与えられ、$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}=(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_m),\ \tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}=(\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_n)$ 実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、最適解である。

| 主問題 | 双対問題 |
|---|---|
| minimize $z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}$ | maximize $w=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ subject to $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}$ |

$$\exists\tilde{\boldsymbol{x}},\exists\tilde{\boldsymbol{y}}\geq\boldsymbol{0}\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}\geq\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}\leq\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$
$$\Longrightarrow\forall\boldsymbol{x},\forall\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}\geq\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}\geq\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

また、一方に最適解が存在すれば、もう一方にも最適解が存在し、最適解が与える双方の目的関数値は等しい。

$$\exists\tilde{\boldsymbol{x}}\geq\boldsymbol{0}\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}\geq\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}},\ \text{for}\ \forall\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b}$$
$$\Longrightarrow\exists\tilde{\boldsymbol{y}}\geq\boldsymbol{0}\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}\leq\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}},\ \text{for}\ \forall\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$