数理計画法

第9回：双対問題と双対定理・相補性定理

復習：演習問題

次の線形計画問題の双対問題を求め、単体法を用いてこれを解き、最適解の与える両者の目的関数値が等しいことを確認してください。

maximize
$$z = x_1 + x_2$$
subject to
$$\begin{array}{rrcl} x_1 & +2x_2 & \leq & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 2 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

minimize
$$w = 2y_1 + 2y_2$$
subject to
$$\begin{array}{rrcl} y_1 & +2y_2 & \geq & 1 \\ 2y_1 & +y_2 & \geq & 1 \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

maximize
$$z = x_1 + x_2$$
subject to
$$\begin{array}{rrcl} x_1 & +2x_2 & \le & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & \le & 2 \\ & x_1, x_2 & \ge & 0 \end{array}$$

minimize
$$\tilde{z}(= -z = -x_1 - x_2)$$
subject to
$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & & =2 \\ 2x_1 & +x_2 & & +x_4 & =2 \\ \tilde{z}+x_1 & +x_2 & & & =0 \end{array}$$
$$x_1, x_2, x3, x4 \ge 0$$

z	~~非~~ x1	非 x2	x3	非 x4	定数	
	1	2	1		2	/1=2
	2	1		1	2	/2=1
1	1	1			0	

z	~~非~~ x1	非 x2	x3	非 x4	定数	
	~~1~~ 0	~~2~~ 3/2	1	-1/2	~~2~~ 1	/1=2
	~~2~~ 1	~~1~~ 1/2		~~1~~ 1/2	~~2~~ 1	/2=1
1	~~1~~ 0	~~1~~ 1/2		-1/2	~~0~~ -1	

z	x1	~~非~~ x2	非 x3	非 x4	定数	
		3/2	1	-1/2	1	/(3/2)=2/3
	1	1/2		1/2	1	/(1/2)=2
1		1/2		-1/2	-1	

z	x1	~~非~~ x2	非 x3	非 x4	定数	
		~~3/2~~ 1	~~1~~ 2/3	~~-1/2~~ -1/3	~~1~~ 2/3	/(3/2)=2/3
	1	~~1/2~~ 0	-1/3	~~1/2~~ 2/3	~~1~~ 2/3	/(1/2)=2
1		~~1/2~~ 0	-1/3	~~-1/2~~ -1/3	~~-1~~ -4/3	

$$x_1 = x_2 = 2/3, \tilde{z} = -4/3 \Rightarrow z = 4/3$$

minimize

$w = 2y_1 + 2y_2$

subject to

$$\begin{array}{rrcl} y_1 & +2y_2 & \geq & 1 \\ 2y_1 & +y_2 & \geq & 1 \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

minimize

w^*, then w

subject to

$$\begin{array}{l} y_1 + 2y_2 - y_3 + y_5 = 1 \\ 2y_1 + y_2 - y_4 + y_6 = 1 \\ w - 2y_1 - 2y_2 = 0 \\ w^* + 3y_1 + 3y_2 - y_3 - y_4 = 2 \\ x_1, x_2, x3, x4, y_5, y_6 \geq 0 \end{array}$$

	w,w*	y1 ~~非~~	y2 非	y3 非	y4 非	y5	y6 非	定数	
-×1		-1 1	-1/2 2	-1	1/2	1	-1/2	-1/2 1	/1
×1/2		1 2	1/2 1		-1/2 -1		1/2 1	1/2 1	/2
+×2	1	2 -2	1 -2		-1		1	1 0	
-×3	1	-3 3	-3/2 3	-1	3/2 -1		-3/2	-3/2 2	

	w,w*	y1	y2 ~~非~~	y3 非	y4 非	y5 非	y6 非	定数	
×2/3		0	1 3/2	-2/3 -1	1/3 1/2	2/3 1	-1/3 -1/2	1/3 1/2	/ (3/2) =1/3
-×1/2		1	-1/2 1/2	1/3	-1/6 -1/2	-1/3	1/6 1/2	-1/6 1/2	/ (1/2) =1
+×1	1	0	1 -1	-2/3	1/3 -1	2/3	-1/3 1	1/3 1	
-×3/2	1	0	-3/2 3/2	1 -1	-1/2 1/2	-1	1/2 -3/2	-1/2 1/2	

w,w*	y1	y2	y3 非	y4非	y5 非	y6 非	定数
		1	-2/3	1/3	2/3	-1/3	1/3
	1	0	1/3	-2/3	-1/3	2/3	1/3
1		0	-2/3	-2/3	2/3	2/3	4/3
1		0	0	0	-1	-1	0

w,w*	y1	y2	y3 非	y4非	y5 非	y6 非	定数
		1	-2/3	1/3	2/3	-1/3	1/3
	1		1/3	-2/3	-1/3	2/3	1/3
1			-2/3	-2/3	2/3	2/3	4/3
1			0	0	-1	-1	0

双対定理

線形計画問題とその双対問題が右のように与えられ、$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$, $\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$ 実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、最適解である。

主問題	双対問題
minimize	maximize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$	$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to	subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

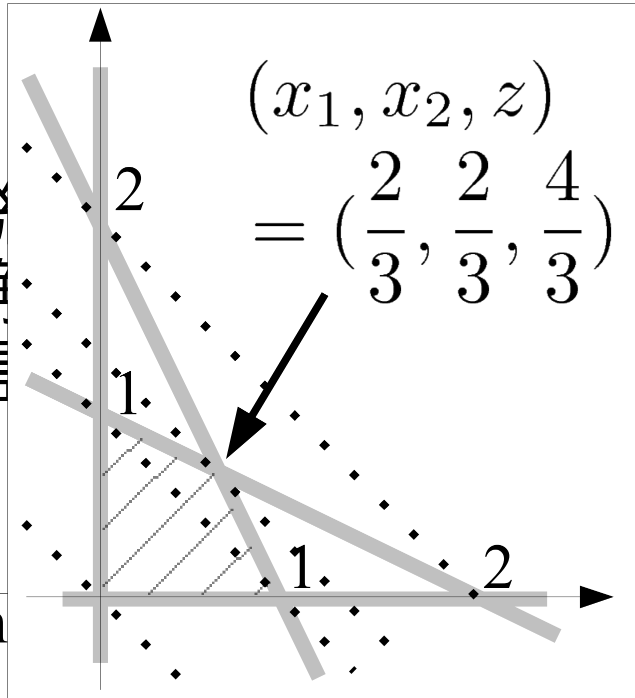
$$\exists \tilde{\boldsymbol{x}}, \exists \tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$
$$\Longrightarrow \forall \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

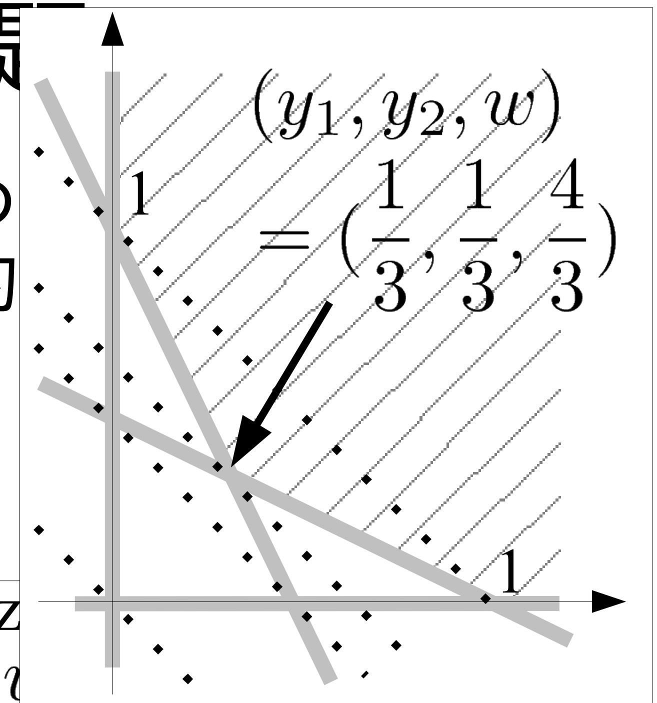
また、一方に最適解が存在すれば、もう一方にも最適解が存在し、最適解が与える双方の目的関数値は等しい。

$$\exists \tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}, \text{ for } \forall \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$$
$$\Longrightarrow \exists \tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}, \text{ for } \forall \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$

演習問題

次の…対問題を求め
れを解…ら両者の目的
を確認





m…
z …

subject to

$$\begin{array}{rrcl} x_1 & +2x_2 & \leq & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

minimiz…
$w = 2y$…

subject to

$$\begin{array}{rrcl} y_1 & +2y_2 & \geq & 1 \\ 2y_1 & +y_2 & \geq & 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 & & \end{array}$$

主問題と双対問題の関係

maximize
$z = 2x_1 + x_2 + x_3$

subject to

$$\begin{array}{rrrcrl} 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & \leq & 4 & ① \\ 2x_1 & & 4x_3 & \leq & 4 & ② \\ -4x_1 & +3x_2 & -x_3 & \leq & 1 & ③ \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

最大化問題

最大化問題は、制約式の定める
上界に一番近い実行可能解を探す問題
2つの制約式から分かる上界の例:

$z \leq$ (①+②)/2 $\quad 2x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 \leq 4$

①②③の組み合わせで得られる関係式

$y_1 \times$ ①$+ y_2 \times$ ②$+ y_3 \times$ ③

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$ であれば、

$$= (2y_1 + 2y_2 - 4y_3)x_1 + (2y_1 + 3y_3)x_2$$
$$+(-y_1 + 4y_2 - y_3)x_3 \leq (4y_1 + 4y_2 + y_3)$$

minimize
$w = 4y_1 + 4y_2 + y_3$

subject to

$$2y_1 + 2y_2 - 4y_3 \geq 2$$
$$2y_1 + 3y_3 \geq 1$$
$$-y_1 + 4y_2 - y_3 \geq 1$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

最小化問題

関係式の係数が目的関数の係数より大きければ、
$z \leq 4y_1 + 4y_2 + y_3$ により
目的関数の上界を得ることができる。

このとき、最も厳しい上界を求める問題、
すなわち $4y_1 + 4y_2 + y_3$ の最小化問題が
z の上限を求める問題に対応する。

主問題と双対問題の関係

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

主問題

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題

一般化して逆を考えると、
与えられた制約式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$ から得られる次の関係式

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \qquad \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{x}$ に対して整理すれば、転置した関係式

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \qquad \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$$

の各行と目的関数の係数との比較から $\boldsymbol{y}$ の制約式

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$$

を得ることができる。このとき、

$$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq z$$

より、z の下界を得る。
最も厳しい下界、すなわち $w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ の最大化問題が
z の下限を求める問題に対応する。

双対問題と双対定理のまとめ

主問題	双対問題
minimize $z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	maximize $w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ subject to $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題は、
最大化問題の最小上界、
最小化問題の最大下界
を求める数理計画問題である。
行列表現を用いた一般的な表現は
左記の通り

双対定理

上式のような線形計画問題とその双対問題が与えられているとき、$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$と $\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$ がそれぞれ主問題、双対問題の実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、これは、それぞれの問題の最適解である。

$$\exists\tilde{\boldsymbol{x}}, \exists\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$
$$\Longrightarrow \forall\boldsymbol{x}, \forall\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

また、どちらか一方に最適解 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ が存在すれば、もう一方にも最適解 $\tilde{\boldsymbol{y}}$ が存在し、双方の最適解が与える目的関数値は等しい。

主問題と双対問題の等式標準形

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

主問題

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$

主問題の等式標準形

主問題の主変数 : $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m)$

$\boldsymbol{x}$ の双対変数 : $\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = (t_1, \ldots, t_n)$

主問題のスラック変数 : $\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = (s_1, \ldots, s_m)$

$\boldsymbol{s}$ の双対変数 : $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題の等式標準形

双対問題の主変数 : $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$

$\boldsymbol{y}$ の双対変数 : $\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = (s_1, \ldots, s_m)$

双対問題のスラック変数 : $\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = (t_1, \ldots, t_n)$

$\boldsymbol{t}$ の双対変数 : $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m)$

双対問題と相補性定理

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

主問題

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題

相補性定理

左式のような線形計画問題とその双対問題が与えられているとき、

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m) \quad \tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$$

がそれぞれ、主問題、双対問題の最適解であるならば、次の関係式が成立する。

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow a_{1j}\tilde{y}_1 + \cdots + a_{nj}\tilde{y}_n = c_j$$

$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow a_{k1}\tilde{x}_1 + \cdots + a_{km}\tilde{x}_m = b_k$$

$$a_{1j}\tilde{y}_1 + \cdots + a_{nj}\tilde{y}_n < c_j \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$

$$a_{k1}\tilde{x}_1 + \cdots + a_{km}\tilde{x}_m > b_k \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

minimize	maximize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$	$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to	subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$
主問題	双対問題

双対定理：

$\tilde{\boldsymbol{x}}$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}$ が実行可能解かつ $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$

$\iff$ $\tilde{\boldsymbol{x}}$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}$ は最適解

弱双対定理：

$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が実行可能解 $\Longrightarrow \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$

$$\because\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

相補性定理：

$\tilde{\boldsymbol{x}}$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}$ は最適解なので $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$ この不等式の等号が成立する。

$$(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0 \qquad (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 0$$

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow a_{1j}\tilde{y}_1 + \cdots + a_{nj}\tilde{y}_n = c_j$$

$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow a_{k1}\tilde{x}_1 + \cdots + a_{km}\tilde{x}_m = b_k$$

$$a_{1j}\tilde{y}_1 + \cdots + a_{nj}\tilde{y}_n < c_j \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$

$$a_{k1}\tilde{x}_1 + \cdots + a_{km}\tilde{x}_m > b_k \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

等式標準形と相補性定理

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$

主問題の等式標準形

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題の等式標準形

相補性定理

左式のような線形計画問題とその双対問題の等式標準形が与えられているとき、

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m) \qquad \tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n)$$
$$\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n) \qquad \tilde{\boldsymbol{t}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{s}_m)$$

がそれぞれ、主問題、双対問題の最適解であるとする。

このとき、次の関係式が成立する。

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0 \qquad \tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$

$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0 \qquad \tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

主問題の等式標準形

maximize

$z = x_1 + 2x_2$

subject to

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & -x_2 & +s_1 & = & 7 \\ 3x_1 & +x_2 & +s_2 & = & 10 \\ -x_1 & +2x_2 & +s_3 & = & 18 \end{array}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_4 \geq 0$$

双対問題の等式標準形

minimize

$w = 7y_1 + 10y_2 + 18y_3$

subject to

$$\begin{array}{rrrrcr} 2y_1 & +3y_2 & -y_3 & -t_1 & = & 1 \\ -y_1 & +y_2 & +2y_3 & -t_2 & = & 2 \end{array}$$

$$y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0$$

相補性定理

$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0 \quad \tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$

$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0 \quad \tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$

$\tilde{x}_1 = \frac{2}{7}$ $\quad$ $\tilde{t}_1 = 0$

$\tilde{x}_2 = \frac{64}{7}$ $\quad$ $\tilde{t}_2 = 0$ $\quad$ $\Rightarrow$ $\quad$ $3y_2 - y_3 = 1,$ $\quad$ $y_2 + 2y_3 = 2$

$\tilde{s}_1 = \frac{109}{7}$ $\quad$ $\tilde{y}_1 = 0$

$\tilde{s}_2 = 0$ $\quad$ $\tilde{y}_2 = ?$ $\quad$ $\tilde{y}_2 = \frac{4}{7}$

$\tilde{s}_3 = 0$ $\quad$ $\tilde{y}_3 = ?$ $\quad$ $\tilde{y}_3 = \frac{5}{7}$

$\tilde{z} = \frac{130}{7}$ $\quad$ $\tilde{w} = \frac{130}{7}$

主問題の最適解から、双対問題の最適解が定まる。（逆も同様）

まとめ「相補性定理と双対変数」

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$

主問題の等式標準形

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題の等式標準形

主変数:
$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m)$ $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$

スラック変数:
$\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = (s_1, \ldots, s_m)$ $\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = (t_1, \ldots, t_n)$

双対変数

相補性定理

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0 \quad \tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$

$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0 \quad \tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

演習問題

左上に名前･学年･学籍番号を記入

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

minimize $z = x_1 + 2x_2$
subject to $x_1 + x_2 \geq 4,\ x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0,\ \ x_2 \leq 3,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

課題2：双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

課題3：課題2の解答が正しいことを何らかの方法で確認する。