復習:相補性定理と双対変数

主問題と双対問題の変数の対応と、正・零の対応

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$

主問題の等式標準形

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題の等式標準形

主変数: $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m)$　　$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$

双対変数

スラック変数: $\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = (s_1, \ldots, s_m)$　　$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = (t_1, \ldots, t_n)$

相補性定理: $\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0$　　$\tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$

$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0$　　$\tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$

復習:相補性定理を用いた解法

主問題の等式標準形

minimize

$$z = 7x_1 + 10x_2 + 18x_3$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2 \ -x_3-s_1&=1 \\ -x_1 \ +x_2+2x_3-s_2&=2 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

双対問題の等式標準形

maximize

$$w = y_1 + 2y_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 2y_1 \ -y_2+t_1&= \ 7 \\ 3y_1 \ +y_2+t_2&=10 \\ -y_1+2y_2+t_3&=18 \\ y_1, y_2, t_1, t_2, t_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

双対問題の最適解から
主問題の最適解を求める

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= 2/7 > 0 &&\Longrightarrow \tilde{s}_1 = 0 \\ \tilde{y}_2 &= 64/7 > 0 &&\Longrightarrow \tilde{s}_2 = 0 \\ \tilde{t}_1 &= 109/7 > 0 &&\Longrightarrow \tilde{x}_1 = 0 \\ \tilde{t}_2 &= 0 &&\Longrightarrow \tilde{x}_2 > 0 \\ \tilde{t}_3 &= 0 &&\Longrightarrow \tilde{x}_3 > 0 \\ \tilde{w} &= 130/7 &&\Longrightarrow \tilde{z} = 130/7 \end{aligned}$$

残った変数の連立方程式

$$\begin{aligned} 3x_2 \ -x_3&=1 \\ x_2+2x_3&=2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \tilde{x}_2 &= 4/7, \\ \tilde{x}_3 &= 5/7. \end{aligned}$$

逆(主問題→双対問題)も可

復習:演習問題

課題1:次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

minimize $z = x_1 + 2x_2$

subject to $x_1 + x_2 \geq 4,\ x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0,\ \ x_2 \leq 3,$

$x_1, x_2 \geq 0.$

課題2:双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

課題3:課題2の解答が正しいことを何らかの方法で確認する。

復習:演習問題

課題1:次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

minimize

$z = (1,2)\boldsymbol{x}$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}$

minimize

$z = (1,2)\boldsymbol{x}$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}, (s_1, s_2, s_3)^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}$

maximize

$w = (4, 2, -3)\boldsymbol{y}$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}$

maximize

$w = (4, 2, -3)\boldsymbol{y}$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{t} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}, (t_1, t_2)^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}$

復習:演習問題

課題2:双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

$-w$	y_1 ~~非~~	y_2 非	y_3 非	t_1 非	t_2	右辺	
0	1	-1	0	1	0	1	/1=1
0	1	2	-1	0	1	2	/1=2
1	4	2	-3	0	0	0	

$-w$	y_1	y_2 ~~非~~	y_3 非	t_1 非	t_2 非	右辺
0	1	-1	0	1	0	1
0	0	3	-1	-1	1	1
1	0	6	-3	-4	0	-4

$-w$	y_1	y_2	y_3 非	t_1 非	t_2 非	右辺
0	1	0	-1/3	2/3	1/3	4/3
0	0	3/3	-1/3	-1/3	1/3	1/3
1	0	0	-1	-2	-2	-6

最適解: $w = 6, y_1 = 4/3, y_2 = 1/3, y_3 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0$

復習:演習問題

課題2:双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

相補性定理:主・双対問題の最適解に次の関係が成立

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0 \quad \tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$
$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0 \quad \tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

(主問題の主変数: $\tilde{x}_j$、スラック変数: $\tilde{s}_k$
双対問題の主変数: $\tilde{y}_k$、スラック変数: $\tilde{t}_j$)

双対問題の最適解:

$$w = 6, y_1 = 4/3, y_2 = 1/3, y_3 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0$$

↓相補性定理

主問題の最適解: $z = 6, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 > 0, x_1 > 0, x_2 > 0$

制約式より: $x_1 + x_2 = 4, -x_1 + 2x_2 = 2, x_2 + s_3 = 3$

連立方程式を解いて未知の変数を定める

$$x_1 = 2, x_2 = 2, s_3 = 1$$

主問題の最適解: $z = 6, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 1, x_1 = 2, x_2 = 2$

復習:演習問題

課題3:課題2の解答が正しいことを何らかの方法で確認する

課題2の解答: z は $x_1 = x_2 = 2$ において最大値6を得る

minimize

$z = x_1 + 2x_2$

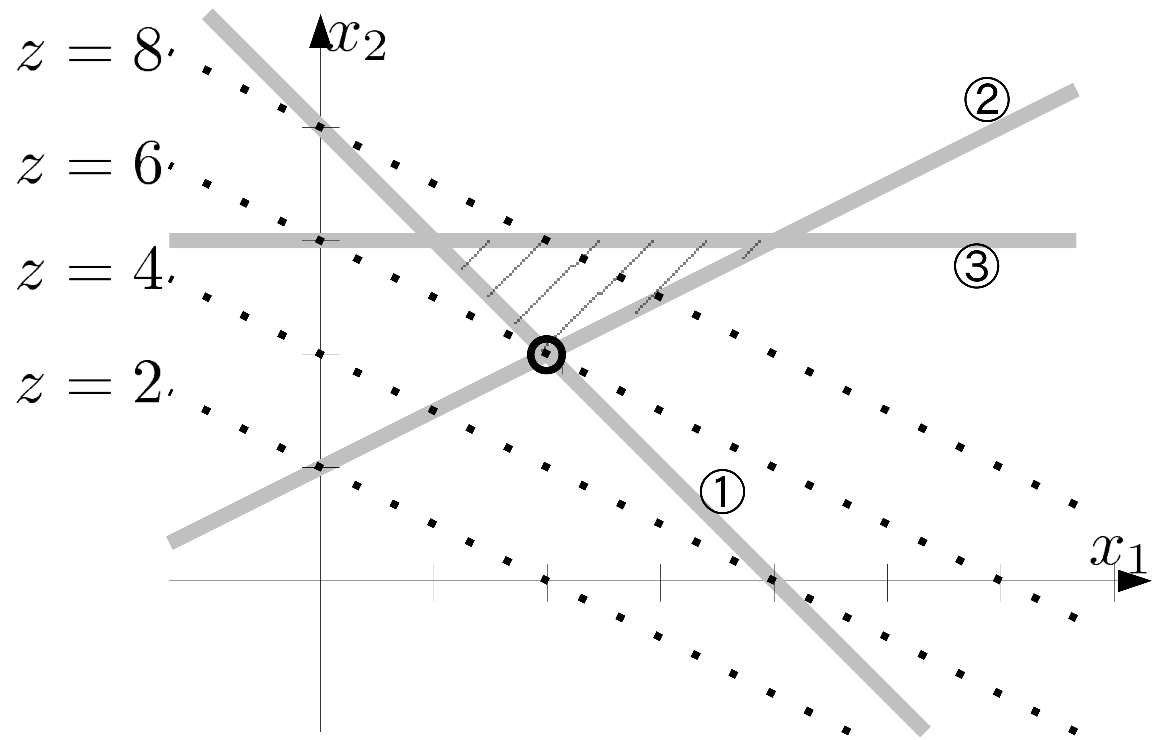
subject to

① $x_1 + x_2 \geq 4$

② $x_2 - 2x_2 + 2 \leq 0$

③ $x_2 \leq 3$

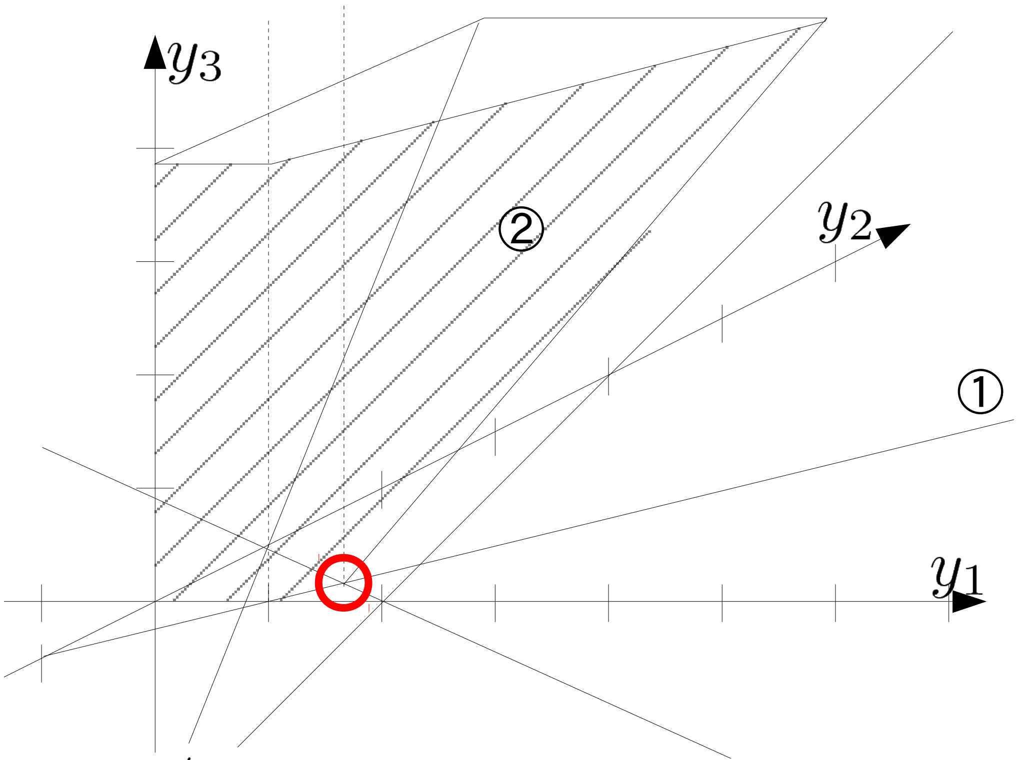
$x_1, x_2 \geq 0$



3次元問題のグラフ

演習問題の双対問題についてもグラフを描く

$$\begin{aligned}
&\text{maximize} \\
&w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3 \\
&\text{subject to} \\
①\ & y_1 - y_2 \leq 1 \\
②\ & y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2 \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}$$



最適解: $w = 6, y_1 = 4/3, y_2 = 1/3, y_3 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0$

線形計画問題と多面体

定義:n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$の多面体

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

のとき、$\mathcal{P}$ を$\mathbb{R}^n$の多面体と呼ぶ。

この定義では、面や直線、点、半平面等も多面体となる。

定義:有界多面体

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{P}, ||x|| \leq \exists M$$

となる、M が存在するとき $\mathcal{P}$ を有界多面体と呼ぶ。

線形計画問題と多面体

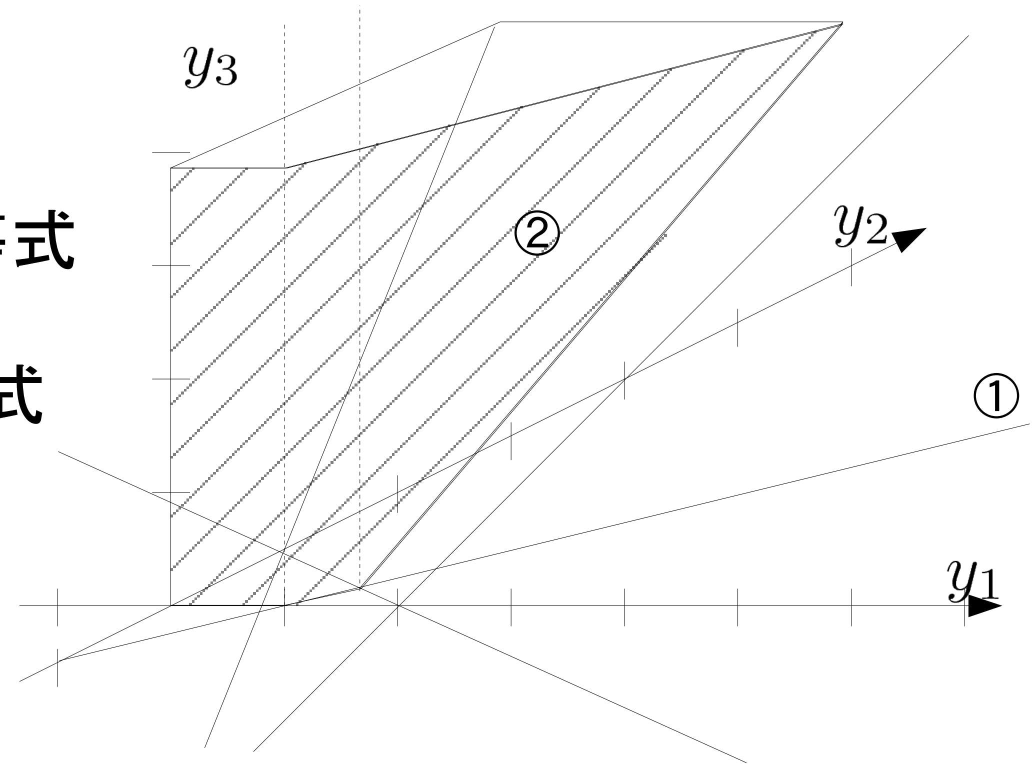
- 妥当不等式

  P が $\mathbb{R}^n$ の多面体のとき、 $\forall\, \boldsymbol{x} \in P \Rightarrow \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ なら

  $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ は P の妥当不等式

- 図の多面体を P とすれば

  $y_1 - y_2 \leq 2$ は P の妥当不等式



P を与える①②③も妥当不等式

① $y_1 - y_2 \leq 1$

② $y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$

③ $y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0$

線形計画問題と多面体

- 支持超平面

  P が $\mathbb{R}^n$ の多面体、$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ が P の妥当不等式のとき、

  $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ の境界が P と交わりを持つなら

  この境界を支持超平面と呼ぶ

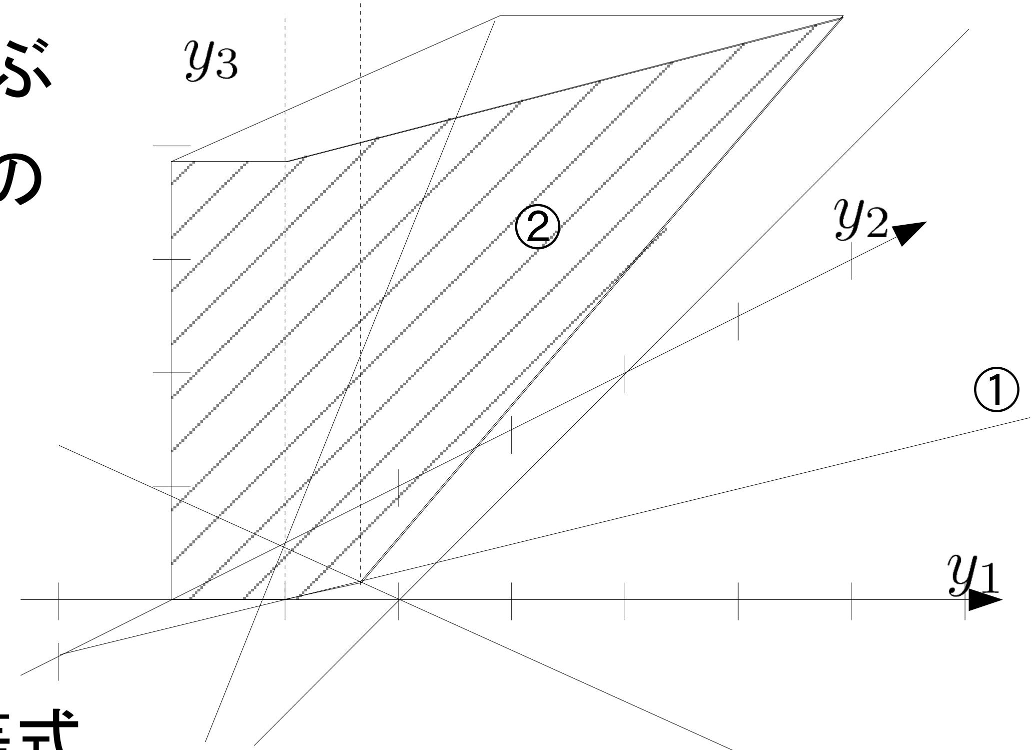
- ①②③の境界は図の多面体の支持超平面

  ① $y_1 - y_2 \leq 1$

  ② $y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$

  ③ $y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0$

  $y_1 - y_2 \leq 2$ は P の妥当不等式ではあるが、その境界は支持超平面ではない



線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

このように行列 $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}$ 、ベクトル $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}$ で表わされる部分集合$\mathcal{P}$を $\mathbb{R}^n$ の多面体と呼ぶ。

※この定義では面や直線、点、半平面も多面体となる

面: $\boldsymbol{A}_1 = (a_1, a_2, a_3)$

直線: $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \end{pmatrix}$

点: $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{pmatrix}$

※上は全て 3次元の場合

定義: 有界多面体

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{P}, ||x|| \leq \exists M$ を満たす定数 M が存在するとき、$\mathcal{P}$ を有界多面体と呼ぶ。

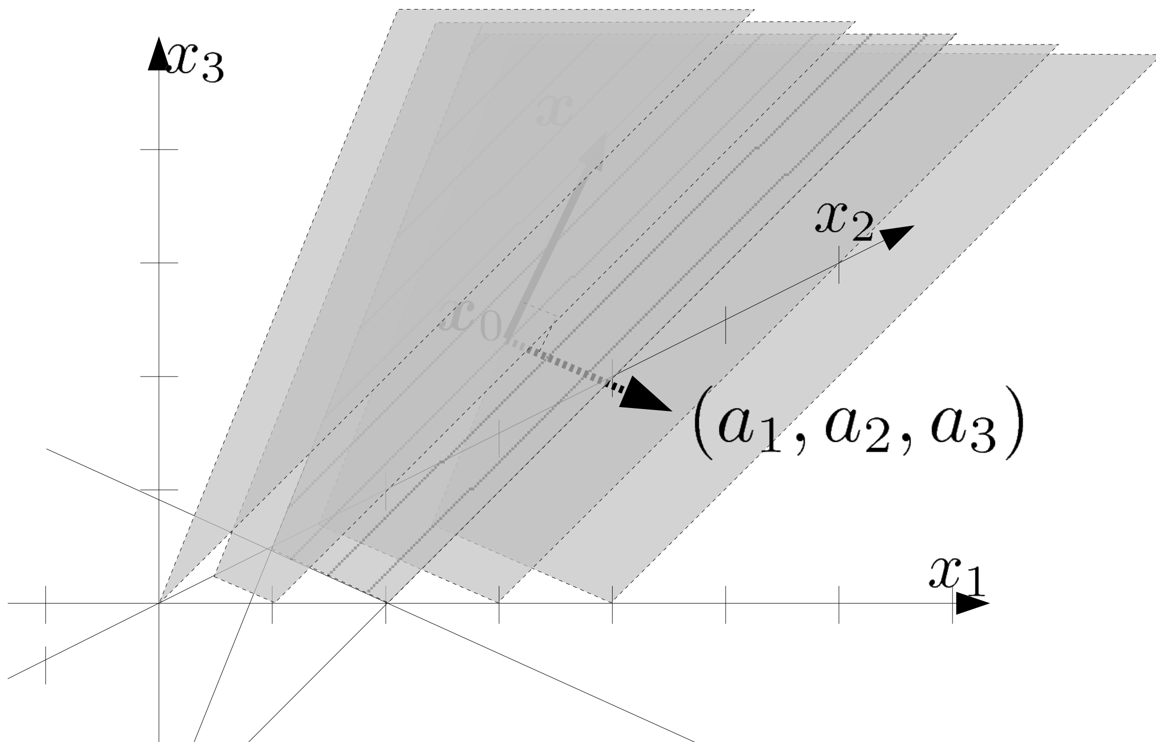
線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体:

$$\boldsymbol{A}_1 = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_1 = b_1 \qquad \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_0 = b_1$$



$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

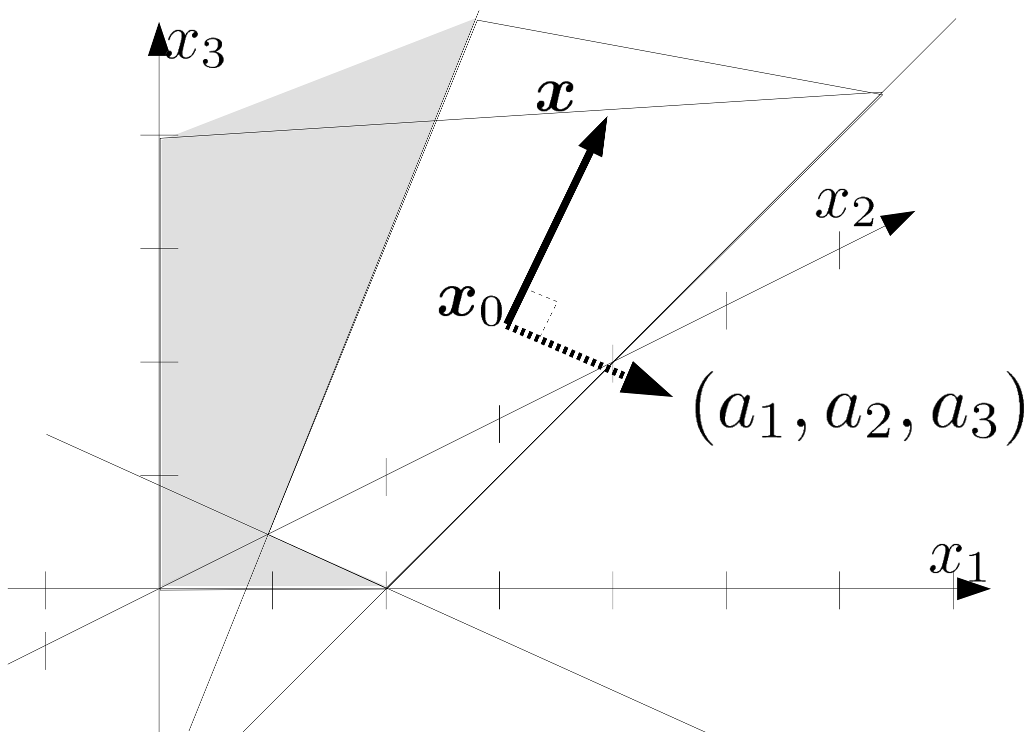
線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元領域を2分する多面体:

$$\boldsymbol{A}_2 = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_2 = b \qquad \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_0 = b$$



$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

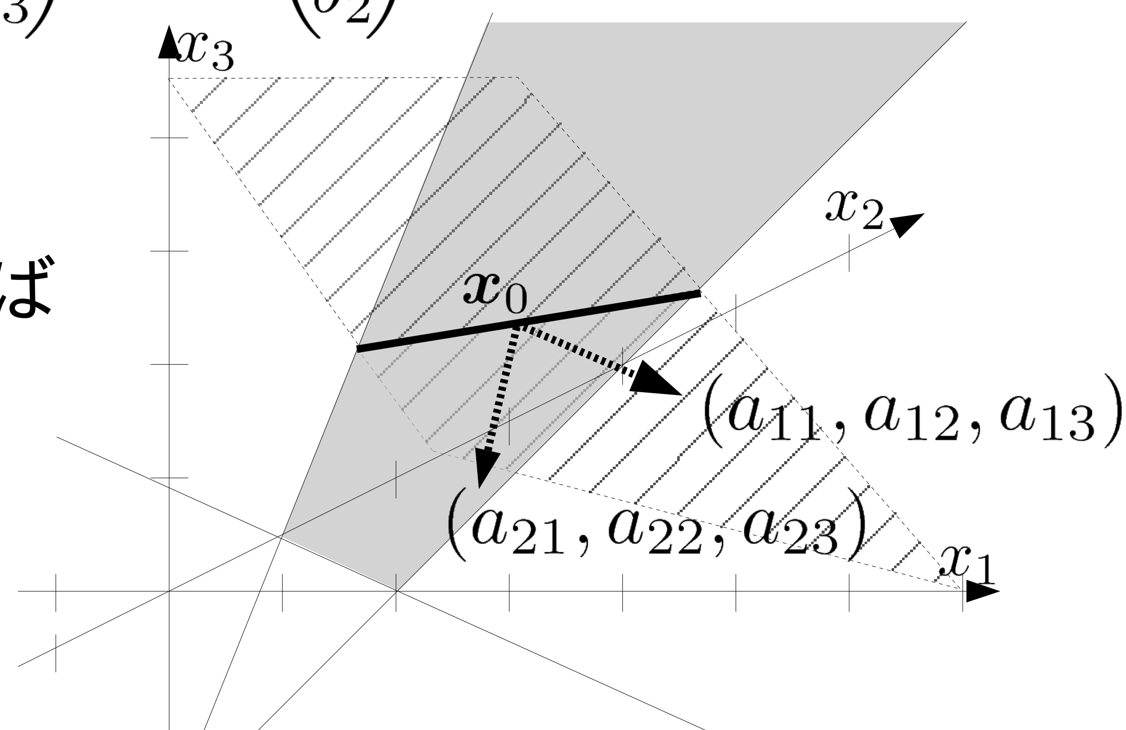
3次元の直線を構成する多面体:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}_1$$

非負条件を入れれば

線分になる



$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

演習問題

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

$$
\begin{array}{ll}
 & z = x_1 + 2x_2 \\
\text{minimize} & x_1 + x_2 \geq 4,\ x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0,\ \ x_2 \leq 3, \\
\text{subject to} & x_1, x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

課題2：主問題と双対問題の実行可能領域を、目的関数を表す平面とともに図示し、図を用いてそれぞれの最適解を示せ。