# 演習課題

## (2008 年度数理計画法の期末試験問題より)

愛媛大学工学部情報工学科

# 数理計画法(2008 年度)

期末試験、問題・答案用紙

氏名等記入欄

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿
学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

愛媛大学＿＿＿＿学部＿＿＿＿学科＿＿＿＿回生

注意事項:

- ノート・資料の持ち込みはできません。
- 筆記具(鉛筆、ボールペン、消しゴム等を含む)、時計以外の道具は机の上に出してはいけません。
- 試験時間は板書で指示します。
- 草稿紙、問題・答案用紙は書き込みの有無に関係無く、全て回収します。
- 草稿紙、問題・答案用紙には必ず氏名と学籍番号、所属を記入してください。
- その他、学科・学部・大学の定める規定にしたがってください。

第 1 問：次の最適化問題について述べよ。

- モカ、キリマンジャロの産地の異なるコーヒー豆を 1:2, 2:1, 1:1 でブレンドし、それぞれキリマンジャロブレンド、モカブレンド、スペシャルブレンドとして提供する喫茶店を考える。焙煎設備の都合でコーヒー豆はどちらも 1 日最大 2kg の製造限度がある。3 ブレンドの値段を下表の通りとした場合に売上高を最大にするブレンド毎の 1 日当り生産量を求めよ。

| ブレンド | | 値段(10g 使用あたり) |
|---|---|---|
| キリマンジャロ | (キリマンジャロ 2:モカ 1) | 700 円 |
| モカ | (キリマンジャロ 1:モカ 2) | 600 円 |
| スペシャル | (キリマンジャロ 1:モカ 1) | 500 円 |

1. 最適化問題に対応する線形計画問題を定め、最小化問題の等式標準形を示せ。
2. 線形計画問題の最適解を求め、最適解・最適値をその解法の説明とともに示せ。

※2kg の製造限度は焙煎後のもので、全量をブレンドの原料に用いることができる。また、生産したコーヒーは全て販売され、売れ残り等は生じないものとする。

解答欄：

1. キリマンジャロブレンドの生産量 $x_1$ [g]
モカブレンドの生産量 $x_2$ [g]
スペシャルブレンドの生産量 $x_3$ [g] とすると
キリマンジャロ豆の使用量 $\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3$ [g]
モカ豆の使用量 $\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3$ [g]
売り上げ $(700x_1+600x_2+500x_3)/10$ [円] となり、
線形計画問題 maximize $70x_1+60x_2+50x_3$
subject to $\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 2000$
$\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 2000$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ を得るので、標準形にして

回答 minimize $-70x_1-60x_2-50x_3$
subject to $\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + x_4 = 2000$
$\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + x_5 = 2000$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

2. 総当たり解法を用いて ${}_5C_2$ =10 通りの組合せを考える
0 にする変数を決め、**残った変数の値**を求め、非負条件を満たす目的関数値を求める

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | 目的関数値 |
|---|---|---|---|---|---|
| **2000** | **2000** | 0 | 0 | 0 | **−260000** |
| **0** | 0 | **4000** | 0 | 0 | −200000 |
| **6000** | 0 | 0 | **−2000** | 0 | |
| **3000** | 0 | 0 | 0 | **1000** | −210000 |
| 0 | **0** | **4000** | 0 | 0 | −200000 |
| 0 | **3000** | 0 | **1000** | 0 | −180000 |
| 0 | **6000** | 0 | 0 | **−2000** | |
| 0 | 0 | **4000** | **0** | 0 | −200000 |
| 0 | 0 | **4000** | 0 | **0** | −200000 |
| 0 | 0 | 0 | **2000** | **2000** | 0 |

よって、最適解は $x_1=x_2=2000, x_3=x_4=x_5=0$ のときの目的関数値 −260000、すなわちキリマンジャロ・モカの両ブレンドとも 2000g 生産したとき最大売上 26 万円を得る。

第 2 問:次の線形計画問題を単体法を用いて解くことを考える。

maximize　$x_1+x_2$

subject to　$2x_1+3x_2 \geq 12,\ 0 \leq x_1 \leq 4,\ 0 \leq x_2 \leq 3$

1. 実行可能領域を図示し、原点 ($x_1=x_2=0$) が実行可能領域に無いことを示せ。
2. 等式標準形を求め、単体法を用いて、その最適解、目的関数の最適値を求めよ。

解答欄:

1.　図より原点は実行可能領域に無い

2.　等式標準形: minimize　$z = -x_1 - x_2$

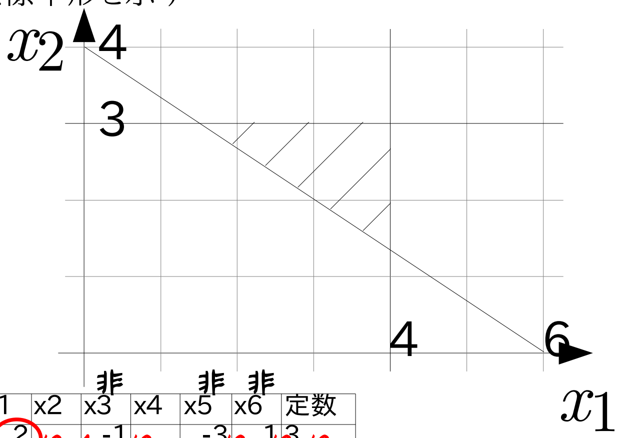
subject to　$2x_1+3x_2-x_3=12,\ x_1+x_4=4,\ x_2+x_5=3,\ x_1,\dots,x_5 \geq 0$

2 段階単体法を実施するので、人工問題を作り、等式標準形を示す

minimize　$z^* = x_6$

subject to

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad + x_6 &= 12\\
x_1 \qquad + x_4 \qquad &= 4\\
x_2 \qquad + x_5 &= 3\\
z^* + 2x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad &= 12\\
z + x_1 + x_2 \qquad &= 0
\end{aligned}
$$




シンプレックス表

| | 非 | 非 | 非 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z*,z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | 定数 |
| | 2 | 3 | -1 | | | 1 | 12 |
| | 1 | | | 1 | | | 4 |
| | | 1 | | | 1 | | 3 |
| z*=1 | 2 | 3 | -1 | | | | 12 |
| z=1 | 1 | 1 | | | | | 0 |

| | 非 | ~~非~~ | 非 | | 非 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z*,z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | 定数 |
| | 2 | 3 | -1 | | | 1 | 12/3=4 |
| | 1 | | | 1 | | | 4 |
| | | 1 | | | 1 | | 3/1=3← 小さい方を選ぶ |
| z*=1 | 2 | 3 | -1 | | | | 12 |
| z=1 | 1 | 1 | | | | | 0 |

| | 非 | | 非 | | 非 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z*,z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | 定数 |
| -3× | 2 | -3 3 | -1 | | -3 | 1 | 12 -9 |
| | 1 | | | 1 | | | 4 |
| | | 1 | | | 1 | | 3 |
| -3× z*=1 | 2 | -3 3 | -1 | | -3 | | 12 -9 |
| -1× z=1 | 1 | -1 1 | | | -1 | | 0 -3 |

| | 非 | | 非 | | 非 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z*,z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | 定数 |
| | 2 | | -1 | | -3 | 1 | 3 |
| | 1 | | | 1 | | | 4 |
| | | 1 | | | 1 | | 3 |
| z*=1 | 2 | | -1 | | -3 | | 3 |
| z=1 | 1 | | | | -1 | | -3 |

| | ~~非~~ | | 非 | | 非 | 非 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z*,z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | 定数 |
| | 2 | | -1 | | -3 | 1 | 3/2=1.5← 小さい方を選ぶ |
| | 1 | | | 1 | | | 4/1=4 |
| | | 1 | | | 1 | | 3 |
| z*=1 | 2 | | -1 | | -3 | | 3 |
| z=1 | 1 | | | | -1 | | -3 |

| | | | 非 | | 非 | 非 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z*,z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | 定数 |
| ÷2 | 2/2=1 | | -1/2 | | -3/2 | 1/2 | 3/2 |
| | 1 | | | 1 | | | 4 |
| | | 1 | | | 1 | | 3 |
| z*=1 | 2 | | -1 | | -3 | | 3 |
| z=1 | 1 | | | | -1 | | -3 |

| | | | 非 | | 非 | 非 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z*,z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | 定数 |
| | 1 | | -1/2 | | -3/2 | 1/2 | 3/2 |
| -1× | -1 1 | | +1/2 | 1 | +3/2 | -1/2 | 4 -3/2 |
| | | 1 | | | 1 | | 3 |
| -2× z*=1 | -2 2 | | +1 -1 | | +3 -3 | -1 | 3 -3 |
| z=1 | -1 1 | | +1/2 | | -1 +3/2 | -1/2 | -3 -3/2 |

| | | | 非 | | 非 | 非 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z*,z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | 定数 |
| | 1 | | -1/2 | | -3/2 | 1/2 | 3/2 |
| | | | 1/2 | 1 | 3/2 | -1/2 | 5/2 |
| | | 1 | | | 1 | | 3 |
| z*=1 | | | | | | -1 | 0 ←z*=0, x6=6 を実現 |
| z=1 | | | 1/2 | | 1/2 | -1/2 | -9/2 |

| | | | ~~非~~ | 非 | 非 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z*,z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | | 定数 |
| +1/2× | 1 | | -1/2 +1/2 | | -3/2 +3/2 | | 3/2 +5/2 |
| ×2 | | | 1/2 1 | 1 2 | 3/2 3 | | 5/2 5 |
| | | 1 | | | 1 | | 3 |
| | | | -1/2 | | -3/2 | | -5/2 |
| -1/2× z=1 | | | 1/2 | | 1/2 | | -9/2 |

| | | | | 非 | 非 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z*,z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | | 定数 |
| | 1 | | | | | | 4 |
| | | | 1 | 2 | 3 | | 5 |
| | | 1 | | | 1 | | 3 |
| | | | | | | | |
| z=1 | | | | | -1 | | -7 |

最適解は $x_1 = 4,\ x_2 = 3,\ z = $ -7

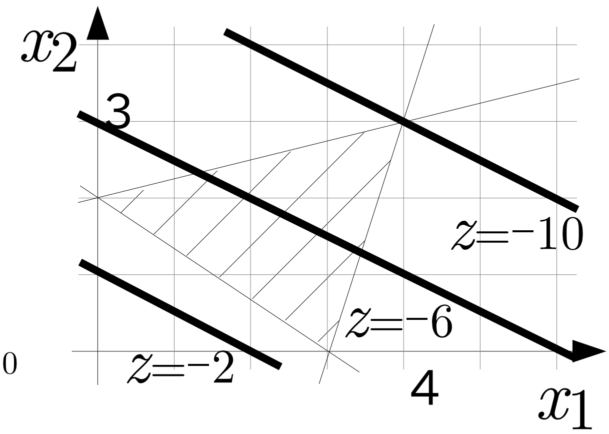
第３問：次の線形計画問題について答えよ。

maximize $x_1 + 2x_2$

subject to $2x_1 + 3x_2 \geq 6,\ -x_1 + 4x_2 \leq 8,\ 3x_1 - x_2 \leq 9$

1. 最小化問題の不等式標準形を示し、最適解を求め、最適値とともに示せ。
2. 与えられた問題の双対問題を示せ。
3. 相補性定理を説明し、主・双対変数の関係を用い２で示した双対問題の最適解を求めよ。

解答欄：




1. 不等式標準形：

minimize $z = -x_1 - 2x_2$

subject to
$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\
x_1 - 4x_2 &\geq -8 \\
-3x_1 + x_2 &\geq -9 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

図より、最適解は $x_1=4,\ x_2=3,\ z=-10$

2. 双対問題（不等式標準形）

maximize $w = 6y_1 - 8y_2 - 9y_3$

subject to
$$
\begin{aligned}
2y_1 + y_2 - 3y_3 &\leq -1 \\
3y_1 - 4y_2 + y_3 &\leq -2 \\
y_1, y_2, y_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

3. 相補性定理は、線形計画問題の最適解において双対変数同士の一方がゼロであればもう一方は正になるということ。

したがって、1, 2 の問題の等式標準形

minimize $z = -x_1 - 2x_2$

subject to
$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 - s_1 &= 6 \\
x_1 - 4x_2 - s_2 &= -8 \\
-3x_1 + x_2 - s_3 &= -9 \\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

maximize $w = 6y_1 - 8y_2 - 9y_3$

subject to
$$
\begin{aligned}
2y_1 + y_2 - 3y_3 + t_1 &= -1 \\
3y_1 - 4y_2 + y_3 + t_2 &= -2 \\
y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

の最適解において、1 の結果より

$x_1=4,\ x_2=3,\ s_1>0,\ s_2 = s_3 = 0$ なので、

双対変数について、

$t_1 = t_2 = y_1 = 0,\ y_2 > 0,\ y_3 > 0$ が言える。

そこで、$t_1, t_2, y_1, y_2, y_3$ の等式制約のうち、ゼロとなる変数を除いて、次の連立方程式を得る。

$$
\begin{aligned}
y_2 - 3y_3 &= -1 \\
-4y_2 + y_3 &= -2
\end{aligned}
$$

これを解いて、双対問題の最適解を求める。

$t_1 = t_2 = y_1 = 0,\ y_2 = 7/11,\ y_3 = 6/11$

$w = 6y_1 - 8y_2 - 9y_3 = -10$