復習

数理計画法＝数理計画問題−問題+法

数理計画問題

maximize $\quad z = f(x_1, \ldots, x_n)$

subject to $\quad g(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in X$

与えられた制約式のもとである関数を最大化する問題

線形計画問題

$f(x_1, \ldots, x_n)$ や $g(x_1, \ldots, x_n)$が線形な場合

線形計画法＝線形計画問題−問題+法

グラフを利用した解法

グラフの交点を総当たりする解法

復習

線形計画問題の素朴な解法

グラフを用いた解法

1. 制約式に対応するグラフを描き
2. グラフを境界とする実行可能領域を求める
3. 目的関数に対応するグラフを描き
4. 目的関数値を増やす(減らす)方向を調べる
5. 実行可能領域の端点から最適解を選ぶ

交点を総当たりする解法

1. 制約式に対応するグラフの方程式を全て求める
2. 方程式の組合せで定まる交点を全て求める
3. 全ての交点の実行可能性を調べる
4. 実行可能な交点の目的関数値を求め最適解を選ぶ

復習:演習問題1

A4用紙を横に使って、左上に名前･学年･学籍番号を記入

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題:利益を最大化する珈琲飲料･珈琲牛乳の1日当り生産量は?

上記の最適化問題について、
課題1: maximize ... subject to ... の形式で
線形計画問題を表現しなさい。

課題2:グラフを用いる解法･交点を総当たりする解法で最適解を求めなさい。

課題3:授業の感想･意見があれば書いてください。

課題1解答例

珈琲飲料の1日当り生産量を $x_1 \times 100[\mathrm{g}]$ とする

珈琲牛乳の1日当り生産量を $x_2 \times 100[\mathrm{g}]$ とする

変数の定義は
残しておく

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & 5x_1 + 4x_2 \\
\text{subject to} & 15x_1 + 11x_2 \le 1650 \times 10^3 \\
& 10x_1 + 14x_2 \le 1400 \times 10^3 \\
& 9x_1 + 20x_2 \le 1800 \times 10^3 \\
& x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0
\end{array}
$$

課題2 グラフを利用した解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 &\le 1650 \times 10^3 \\ 10x_1 + 14x_2 &\le 1400 \times 10^3 \\ 9x_1 + 20x_2 &\le 1800 \times 10^3 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

グラフを与える方程式

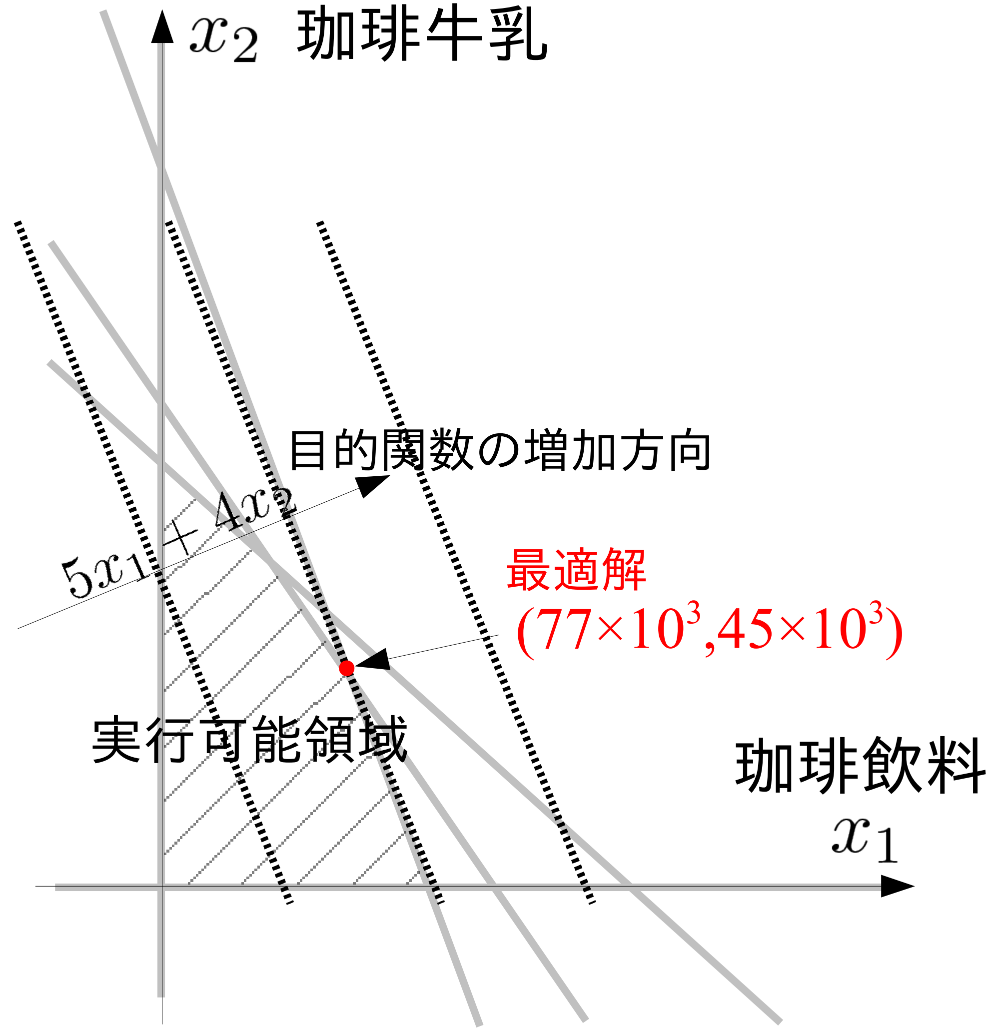
① $15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$

② $10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$

③ $9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$

④ $x_1 = 0$

⑤ $x_2 = 0$



最適解：コーヒ飲料　　77kg
　　　　コーヒー牛乳　45kg

最適値：565千円

課題2 グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 &\leq 1650 \times 10^3 \\ 10x_1 + 14x_2 &\leq 1400 \times 10^3 \\ 9x_1 + 20x_2 &\leq 1800 \times 10^3 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

グラフを与える方程式

① $15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$

② $10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$

③ $9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$

④ $x_1 = 0$

⑤ $x_2 = 0$

方程式	x_1	x_2	実行可能？	目的関数値
①②	77×10^3	45×10^3	○	565×10^3
①③	65.6×10^3	60.4×10^3	×	
①④	0	150×10^3	×	
①⑤	110×10^3	0	○	550×10^3
②③	37.8×10^3	73.0×10^3	○	481×10^3
②④	0	100×10^3	×	
②⑤	140×10^3	0	×	
③④	0	90×10^3	○	360×10^3
③⑤	200×10^3	0	×	
④⑤	0	0	○	0

最適解：コーヒ飲料　77kg
　　　　コーヒー牛乳　45kg
最適値：565千円

「素朴な解法」の問題点と解決法

- グラフを用いた解法
  - 2～3変数までの問題に適用可能
  - 計算機アルゴリズムとして構成し難い
- 交点を総当たりする解法
  - 多変数の問題に適用可能
  - 交点の実行可能性を調べる手間がある
  - 変数が増えると無駄な交点計算が増える
- 単体法（シンプレックス法、Simplex Method)
G. B. Danzig (1947)
  - 問題を標準化し、規則にしたがって表に変換する。
  - 決められた手順で表を更新して最適解を見つける。

線形計画問題の標準化

- 不等式標準形
  - 目的関数は最小化される
  - 制約式は「左辺に変数と係数≧右辺に定数のみ」
  - 全ての変数は非負
- 等式標準形
  - 目的関数は最小化される
  - 制約式は「左辺に変数と係数＝右辺に定数のみ」
  - 全ての変数は非負
- シンプレックス表

  等式標準形の制約式から左辺の係数、右辺の定数、目的関数から左辺の係数をとり表にしたもの

線形計画問題の不等式標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は「左辺に変数と係数≧右辺に定数のみ」
- 全ての変数は非負

• 規則にしたがって問題を書換える

元の問題と正しく対応するように変形すること

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 &\leq 1650 \times 10^3 \\ 10x_1 + 14x_2 &\leq 1400 \times 10^3 \\ 9x_1 + 20x_2 &\leq 1800 \times 10^3 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

元の問題(演習1課題1)

minimize

$$-5x_1 - 4x_2$$

$$\begin{aligned} -15x_1 - 11x_2 &\geq -1650 \times 10^3 \\ -10x_1 - 14x_2 &\geq -1400 \times 10^3 \\ -9x_1 - 20x_2 &\geq -1800 \times 10^3 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

不等式標準形

線形計画問題の不等式標準形

- 目的関数は最小化される
  - -1倍して最小化問題に書換える

$$\text{maximize } 5x_1 + 4x_2 \Longrightarrow \text{minimize } \; -5x_1 - 4x_2$$

- 制約式は「左辺に変数と係数≧右辺に定数のみ」
  - 両辺を-1倍して不等号の向きを揃える

$$x_1 - x_2 \leq 1 \Longrightarrow -x_1 + x_2 \geq -1$$

  - 1つの等式制約を2つの不等式制約で置換え

$$x_1 + x_2 = 1 \Longrightarrow x_1 + x_2 \geq 1, -x_1 - x_2 \geq -1$$

- 全ての変数は非負
  - 非正変数を-1倍した非負変数で置換える

$$x_1 \leq 0 \Longrightarrow x_2 \geq 0 \; (x_2 = -x_1)$$

  - 自由変数を2つの非負変数で置換える

$$x \Longrightarrow x_1, x_2 \geq 0 \; (x = x_1 - x_2)$$

全ての線形計画問題を不等式標準形で表すことができる

線形計画問題の**等式**標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は「左辺に変数と係数＝右辺に定数のみ」
- 全ての変数は非負

• 変数を加えて不等式→等式に書換える
  - **左辺≦右辺→左辺に不足する分を非負変数で補う**
  - 左辺≧右辺→左辺が過剰な分を非負変数で減らす

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 &\le 1650 \times 10^3 \\ 10x_1 + 14x_2 &\le 1400 \times 10^3 \\ 9x_1 + 20x_2 &\le 1800 \times 10^3 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

元の問題(演習1課題1)

minimize

$$-5x_1 - 4x_2$$

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650 \times 10^3 \\ 10x_1 + 14x_2 + x_4 &= 1400 \times 10^3 \\ 9x_1 + 20x_2 + x_5 &= 1800 \times 10^3 \\ x_1 \ge 0&, x_2 \ge 0 \\ x_3 \ge 0&, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

等式標準形

線形計画問題の**等式**標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は「左辺に変数と係数＝右辺に定数のみ」
- 全ての変数は非負

• 不等式標準形で用いた式変形に加え、

• 変数を追加して、不等式を等式と追加変数の非負条件で置換える
  - 左辺≦右辺→左辺に不足する分を非負変数で補う

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \qquad \begin{aligned} 9x_1 + 20x_2 + x_3 &= 1800 \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

  - 左辺≧右辺→左辺が過剰な分を非負変数で減らす

$$9x_1 + 20x_2 \geq 1800 \qquad \begin{aligned} 9x_1 + 20x_2 - x_4 &= 1800 \\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

※元の不等式の成否は追加された変数の非負条件に対応する。
※ x_3をslack変数、x_4 をsurplus変数と呼ぶこともある。

等式標準形のもとでの総当たり解法

等式標準形

minimize
$$-5x_1 - 4x_2$$
subject to
$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650 \times 10^3 \\ 10x_1 + 14x_2 + x_4 &= 1400 \times 10^3 \\ 9x_1 + 20x_2 + x_5 &= 1800 \times 10^3 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

1.3つの方程式で定まる3変数を選ぶ。
2.連立方程式を解き、変数値を定める。
　例: x_1, x_2, x_3 であれば、 x_4, x_5 を無視して、

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650 \times 10^3 \\ 10x_1 + 14x_2 &= 1400 \times 10^3 \\ 9x_1 + 20x_2 &= 1800 \times 10^3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 1400 \times 10^3/37 \\ x_2 &= 2700 \times 10^3/37 \\ x_3 &= 10350 \times 10^3/37 \end{aligned}$$

3.全ての組合せに対して実行し、最適値・最適解を探す

等式標準形のもとでの総当たり解法

x_1 [×10³]	x_2 [×10³]	x_3 [×10³]	x_4 [×10³]	x_5 [×10³]	条件	目的関数[×10³]
		1650	1400	1800		0
	150		-700	-1200	×	
	100	550		-200	×	
	90	660	140			-360
110			300	810		-550
140		-450		540	×	
200		-1350	-600		×	
77	45			207		-565
4400/67	4050/67		-6900/67		×	
1400/37	2700/37	10350/37				-481.08

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

※元の不等式制約には変数の非負条件が対応するので、
全ての変数が非負の場合だけを考えれば良い

線形計画問題の標準形

等式標準形にもとづく総当たりによる解法

1.等式制約と変数の数に対応して、
　全ての組み合わせの連立方程式を解く
2.変数の非負条件を満たす解について目的関数を求める
3.最小（最大）の目的関数値を与える解が最適解となる。

問題点、

・連立方程式の組み合わせ数が爆発的に増加する
・不必要な連立方程式も解く必要がある

次回：単体法
次々回：巡回と最小添字規則

演習問題2

名前･学年･学籍番号を記入し、授業の感想とともに提出

ミックスジュース生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題:利益を最大化する2種類のミックスジュースの生産量は？

課題1: 対応する線形計画問題の不等式標準形を示しなさい。

課題2: 不等式標準形を等式標準形に書換えなさい。

課題3: 総当たりによる解法を用いて最適解を求めなさい。