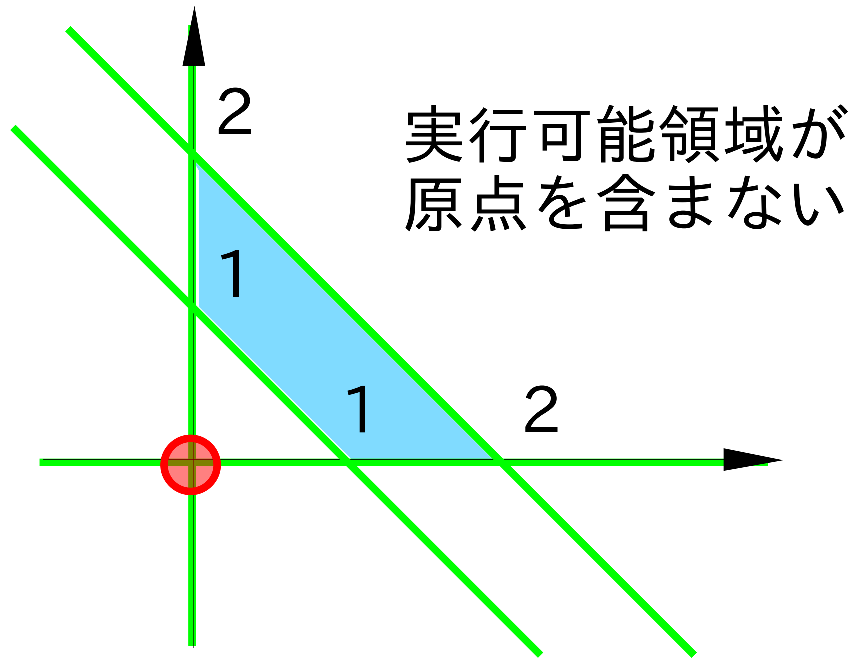
数理計画法

第7回：罰則付単体法

復習：演習問題6（単体法の2段解法）

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

$$\begin{aligned}&\text{maximize} \quad z = x_1 + 2x_2\\&\text{subject to}\\&x_1 + x_2 \leq 2\\&x_1 + x_2 \geq 1\\&x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$



復習：演習問題6（単体法の2段解法）

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} \quad z = x_1 + 2x_2 \\
&\text{subject to} \\
&x_1 + x_2 \leq 2 \\
&x_1 + x_2 \geq 1 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad z = -x_1 - 2x_2 \\
&\text{subject to} \\
&\quad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
&\quad x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
&\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

等式標準形を導く

復習：演習問題6（単体法の2段解法）

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

等式標準形

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad z\\
&\text{subject to}\\
&\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2\\
&\qquad x_1 + x_2 - x_4 = 1\\
&z + x_1 + 2x_2 = 0\\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad z^* = x_5\\
&\text{subject to}\\
&\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2\\
&\qquad x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1\\
&z^* - x_5 = 1\\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

同じもの

人工問題を導く

復習：演習問題6（単体法の2段解法）

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

等式標準形

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad z \\
&\text{subject to} \\
&\quad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
&\quad x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
&z + x_1 + 2x_2 = 0 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad z^* = x_5 \\
&\text{subject to} \\
&\quad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
&\quad x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\
&z^* - x_5 = 1 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\
&z^* + x_1 + x_2 - x_4 = 1
\end{aligned}
$$

2式を両辺加えて

人工問題を導く

復習：演習問題6（単体法の2段解法）

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

等式標準形

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad z \\
&\text{subject to} \\
&\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
&\qquad x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
&z + x_1 + 2x_2 = 0 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

人工問題の等式標準形

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad z^* \\
&\text{subject to} \\
&\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
&\qquad x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\
&z^* + x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

復習:演習問題6(単体法の2段解法)

- 人工問題(or補助問題)の等式標準形に対応して simplex 表を作る
- 単体法を用いて第1段、第2段の線形計画問題を解く

人工問題の等式標準形

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad z^* \\
&\text{subject to} \\
&\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
&\qquad x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\
&z^* + x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

z^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	
0	1	1	0	-1	1	1	
1	1	1	0	-1	0	1	

復習：演習問題6（単体法の2段解法）

- 人工問題(=z* 最小化問題)を解く
  6変数3制約なので、基底/非基底変数は 3/3

z^*	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	
0	1	1	0	-1	1	1	
1	1	1	0	-1	0	1	

各行に1つずつ係数が1の変数を基底変数に選び、残りを非基底変数とする

連立方程式が解けた状態に対応する

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 2 \\
x_1 + x_2 \qquad - x_4 + x_5 &= 1 \\
z^* + x_1 + x_2 \qquad - x_4 \qquad &= 1
\end{aligned}
$$

復習：演習問題6（単体法の2段解法）

- 人工問題(=z* 最小化問題)を解く

z^*	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	/1=2
0	1	1	0	-1	1	1	/1=1
1	1	1	0	-1	0	1	

基底変数と非基底変数を交換して現れた連立方程式を解く

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 \qquad\qquad &= 2 \\ x_1+x_2 \qquad -x_4+x_5 &= 1 \\ z^*+x_1+x_2 \qquad -x_4 \qquad &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1+x_2+x_3 \qquad\qquad &= 2 \\ x_1+x_2 \qquad -x_4+x_5 &= 1 \\ z^*+x_1+x_2 \qquad -x_4 \qquad &= 1 \end{aligned}$$

z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0 ~~1~~	0 ~~1~~	1	1 ~~0~~	-1 ~~0~~	1 ~~2~~	-×1
0	1	1	0	-1	1	1	
1	0 ~~1~~	0 ~~1~~	0	0 ~~-1~~	-1 ~~0~~	0 ~~1~~	

復習：演習問題6（単体法の2段解法）

- 人工問題(=z* 最小化問題)を解く

z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0 ~~1~~	0 ~~1~~	1	1 ~~0~~	-1 ~~0~~	1 ~~2~~	-×1
0	1	1	0	-1	1	1	
1	0 ~~1~~	0 ~~1~~	0	0 ~~-1~~	-1 ~~0~~	0 ~~1~~	

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 &= 1 \\ z^* + x_1 + x_2 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 &= 1 \\ z^* - x_5 &= 0 \end{aligned}$$

連立方程式を解いて得た関係式をもとにシンプレックス表を更新する

z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0	0	1	1	-1	1	
0	1	1	0	-1	1	1	
1	0	0	0	0	-1	0	

復習：演習問題6（単体法の2段解法）

- 非基底変数の係数が非正なので終了
  $z^*=0$ となる最適解が求まった→成功

z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0	0	1	1	-1	1	
0	1	1	0	-1	1	1	
1	0	0	0	0	-1	0	

- 元の線形計画問題: $z = -x_1 - 2x_2$ の最小化問題を解く

z, z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0	0	1	1	-1	1	
0	1	1	0	-1	1	1	
z^* 1	0	0	0	0	-1	0	
z 1	1	2	0	0		0	

- 人工問題専用の目的関数・変数を削除して、目的関数 z の定義式を$\mathrm{simplex}$表に記入すると x_1 に非ゼロ係数がつく

復習：演習問題6（単体法の2段解法）

- 元の線形計画問題: $z{=}-x_1-2x_2$ の最小化問題を解く

z, z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0	0	1	1	-1	1	
0	1	1	0	-1	1	1	
z^* 1	0	0	0	0	-1	0	
z 1	1	2	0	0		0	

- 人工問題専用の目的関数・変数を削除して、目的関数 z の定義式をsimplex表に記入すると x_1 に非ゼロ係数がつく
  x_1 は基底変数なので方程式が解けていないことになる
  ⇒非基底変数 $x_2,\ x_4$ で置き換える

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & x_3 & +x_4 & +x_5 & = 1 \\
 & x_1 & +x_2 & & -x_4 & +x_5 & = 1 \\
z^* & & & & & -x_5 & = 0 \\
z & +x_1 & +2x_2 & & & & = 0
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & x_3 & +x_4 & +x_5 & = 1 \\
 & x_1 & +x_2 & & -x_4 & +x_5 & = 1 \\
z^* & & & & & -x_5 & = 0 \\
z & & +x_2 & & +x_4 & -x_5 & = -1
\end{array}
$$

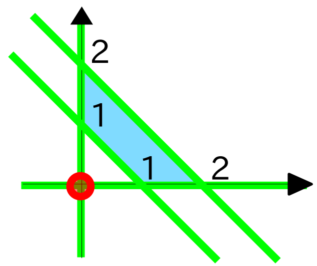
2段目の式 $x_1{+}x_2{-}x_4{+}x_5{=}1$ を利用してを x_1 消去

氏名: 　　　　　　　　　　学籍番号:

演習問題6

次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

$$\begin{aligned}&\text{maximize}\quad z = x_1 + 2x_2\\&\text{subject to}\\&x_1 + x_2 \le 2\\&x_1 + x_2 \ge 1\\&x_1, x_2 \ge 0\end{aligned}$$



図より、原点が実行可能領域に無いので、2段階単体法を用いる

等式標準形を得る

$$\begin{aligned}&\text{minimize}\quad z\\&\text{subject to}\\&\quad x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 2\\&\quad x_1 + x_2 \qquad - x_4 = 1\\&z + x_1 + 2x_2 \qquad\quad = 0\\&x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0\end{aligned}$$

2段解法の人工問題を得る

$$\begin{aligned}&\text{minimize}\quad z^*\\&\text{subject to}\\&\quad x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad = 2\\&\quad x_1 + x_2 \qquad - x_4 + x_5 = 1\\&z^* + x_1 + x_2 \qquad - x_4 \qquad = 1\\&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0\end{aligned}$$

最初のsimplex表

z^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	
0	1	1	0	-1	1	1	
1	1	1	0	-1	0	1	

6変数3制約なので、3変数を非基底変数、残り3変数を基底変数とする

z^*	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	
0	1	1	0	-1	1	1	
1	1	1	0	-1	0	1	

人工問題（z*の最小化問題）を単体法を用いて解く

z*の定義式で正係数を持つ非基底変数を基底変数と交換する

z^*	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	/1=2
0	1	1	0	-1	1	1	/1=1
1	1	1	0	-1	0	1	

基底変数と非基底変数の交換で現れた連立方程式を解く

z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0 ~~1~~	0 ~~1~~	1	1 ~~0~~	-1 ~~1~~	1 ~~2~~	-×1
0	1	1	0	-1	1	1	
1	0 ~~1~~	0 ~~1~~	0	0 ~~-1~~	-1 ~~0~~	0 ~~1~~	

z*=0定義式で正係数を持つ非基底変数が存在しない⇒最適化完了

元の問題の目的関数zをsimplex表に加え、単体法により問題を解く

	z,z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
	0	0	0	1	1	-1	1	
	0	1	1	0	-1	1	1	
z^*	1	0	0	0	0	-1	0	
z	1	1	2	0	0		0	

目的関数の基底変数係数が非ゼロではまずいので、基底変数の関係式を用いて、これを消去してから単体法を開始する

	z,z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
	0	0	0	1	1	-1	1	
	0	1	1	0	-1	1	1	
z^*	1	0	0	0	0	-1	0	
z	1	0	1	0	1	-1	-1	

以下省略

単体法の2段解法、2段目＝元の問題を解くまでにすること

- 連立方程式（制約式）に注目すれば、次の通りになる

$$
\begin{array}{lllllll}
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 2 \\
 & x_1 & +x_2 & & -x_4 & +x_5 & = 1 \\
z^* & +x_1 & +x_2 & & -x_4 & & = 1 \\
z & +x_1 & +2x_2 & & & & = 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllllll}
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 2 \\
 & x_1 & +x_2 & & -x_4 & +x_5 & = 1 \\
z^* & +x_1 & +x_2 & & -x_4 & & = 1 \\
z & +x_1 & +2x_2 & & & & = 0
\end{array}
$$

基底変数であるx1,x3の係数を払う

$$
\begin{array}{lllllll}
 & & & x_3 & +x_4 & +x_5 & = 1 \\
 & x_1 & +x_2 & & -x_4 & +x_5 & = 1 \\
z^* & & & & & -x_5 & = 0 \\
z & +x_1 & +2x_2 & & & & = 0
\end{array}
$$

基底変数であるx1,x3の係数を払う

$$
\begin{array}{llllll}
 & & x_3 & +x_4 & +x_5 & = 1 \\
 & x_1+x_2 & & -x_4 & +x_5 & = 1 \\
z^* & & & & -x_5 & = 0 \\
z & +x_2 & & +x_4 & -x_5 & = -1
\end{array}
$$

- 元の問題を解く前にしていること＝
  人工問題についてしたこと⇒一緒にやってしまえば？

目的関数式の変形を1段目に含む2段解法

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

等式標準形

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad z \\
\text{subject to} \\
\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
\qquad x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
z + x_1 + 2x_2 = 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

人工問題の等式標準形

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad z^* \\
\text{subject to} \\
\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
\qquad x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\
z^* + x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
\boxed{(z + x_1 + 2x_2 = 0)} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

目的関数式の変形を1段目に含む2段解法

- 人工問題(or補助問題)の等式標準形に対応して simplex 表を作る
- 単体法を用いて第1段、第2段の線形計画問題を解く

人工問題の等式標準形

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad z^* \\
\text{subject to} \\
\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
\qquad x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\
z^* + x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
(z + x_1 + 2x_2 = 0) \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

z,z*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	
0	1	1	0	-1	1	1	
z* 1	1	1	0	-1	0	1	
z 1	1	2	0	0	0	0	

目的関数式の変形を1段目に含む2段解法

- 人工問題(=z* 最小化問題)を解く
  6変数3制約なので、基底/非基底変数は 3/3

z,z^*	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	/1=2
0	1	1	0	-1	1	1	/1=1
z^* 1	1	1	0	-1	0	1	
z 1	1	2	0	0	0	0	

z,z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0 ~~1~~	0 ~~1~~	1	1 ~~0~~	-1 ~~0~~	1 ~~2~~	-×1
0	1	1	0	-1	1	1	
z^* 1	0 ~~1~~	0 ~~1~~	0	0 ~~-1~~	-1 ~~0~~	0 ~~1~~	
z 1	0 ~~1~~	1 ~~2~~	0	1 ~~0~~	-1 ~~0~~	-1 ~~0~~	

目的関数式の変形を1段目に含む2段解法

- 非基底変数の係数が非正なので終了
  $z^*=0$ となる最適解が求まった→成功

z,z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0	0	1	1	-1	1	
0	1	1	0	-1	1	1	
z^* 1	0	0	0	0	-1	0	
z 1	0	1	0	1	-1	-1	

- 元の線形計画問題= z の最小化問題を解く

z,z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0	0	1	1	-1	1	
0	1	1	0	-1	1	1	
z^* 1	0	0	0	0	-1	0	
z 1	0	1	0	1	-1	-1	

目的関数式の変形を1段目に含む2段解法から罰則付単体法へ

- zと z^* を区別してみると、

  単体法の2段解法＝

  zと z^*, x_1,...の関係式を用いて、

  　まずz^* を最適化、次にzを最適化する方法

  と言える

- zと z^* を同時に最適化する方法＝罰則付単体法

罰則付単体法

- 2段解法の人工(補助)問題と元の問題を併せた罰則付の線形計画問題を作る

等式標準形

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad z \\
\text{subject to} \\
\qquad x_1 + x_2 + x_3 \qquad\quad = 2 \\
\qquad x_1 + x_2 \qquad\quad - x_4 = 1 \\
z + x_1 + 2x_2 \qquad\qquad\quad = 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

罰則付問題の等式標準形

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad z + Mz^* \\
\text{subject to} \\
\qquad x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad\quad = 2 \\
\qquad x_1 + x_2 \qquad\quad - x_4 + x_5 = 1 \\
z^* + x_1 + x_2 \qquad\quad - x_4 \qquad = 1 \\
(z + x_1 + 2x_2 \qquad\qquad\qquad = 0) \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

罰則付単体法

- 2段階法における人工(補助)問題と元の問題の関係
  - まず z* を最小化して、次に z を最小化する
- 人工問題を同時に解く方法＝罰則付単体法
  - z の最小化と人工変数=0 が成立すれば良い
  - z,z* を同時(z*=0 優先)に最適化＝罰則付単体法
    - z+M×z* (M は大きな数) を最小化する
      M の影響が大きいので z* の最小化→z*=0 が優先的に実現される

罰則付単体法

- 罰則付問題の等式標準形に対応して simplex 表を作る

z+M z*	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_4	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	
0	1	1	0	-1	1	1	
1	1+M	2+M	0	-M	0	M	

- M=100 とした場合

z+M z*	x_1 非	x_2 ~~非~~	x_3	x_4 非	x_4 非	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	/1=2
0	1	1	0	-1	1	1	/1=1
1	101	102	0	-100	0	100	

z+M z*	x_1 0 非	x_2 0	x_3	x_4 1 非	x_4 -1非	定数 1	最大増加量
0	~~1~~	~~1~~	1	~~0~~	~~0~~	~~2~~	-×1
0	1	1	0	-1	1	1	-×102
1	~~101~~	~~102~~	0	~~-100~~	~~0~~	~~100~~	
	-1	0		2	-102	-2	

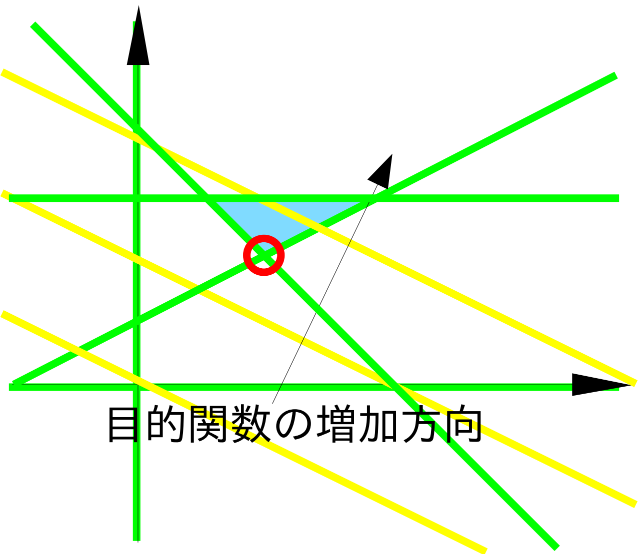
罰則付単体法

- 2段階法における人工(補助)問題と元の問題の関係
  - まず z^* を最小化して、次に z を最小化する
- 人工問題を同時に解く方法＝罰則付単体法
  - z の最小化と人工変数=0 が成立すれば良い
  - z,z^* を同時($z^*=0$ 優先)に最適化＝罰則付単体法
    - $z+M\times z^*$ (M は大きな数) を最小化する
      M の影響が大きいので z^* の最小化→$z^*=0$ が優先的に実現される
- 安全な罰則(M)を決める方法が無い
  - M を任意の数よりも大きい数として扱う
    - 2段階法と同じ手間になる

演習問題7

課題:次の線形計画問題を罰則付単体法を用いて解く

$$\text{maximize} \;\; x_1 + 2x_2$$
$$\text{subject to}$$
$$x_1 + x_2 \geq 4, \quad x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0$$
$$x_2 \leq 3, \;\; x_1, x_2 \geq 0$$



注意: 原点は実行可能領域ではありません

ヒント:

$$\begin{array}{ll} \texttt{min.} & z = -x_1 - 2x_2 \\ \texttt{s.t.} & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \texttt{min.} & z = -x_1 - 2x_2 \\ \texttt{s.t.} & x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$