復習:相補性定理と双対変数

主問題と双対問題の変数の対応と、正・零の対応

minimize

$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$

subject to

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$

主問題の等式標準形

maximize

$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$

subject to

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$

$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題の等式標準形

主変数: $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m)$ $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$

双対変数

スラック変数: $\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = (s_1, \ldots, s_m)$ $\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = (t_1, \ldots, t_n)$

相補性定理: $\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0$ $\tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$

$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0$ $\tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$

復習:相補性定理を用いた解法

主問題の等式標準形

maximize

$z = x_1 + 2x_2$

subject to

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & -x_2 & +s_1 & = & 7 \\ 3x_1 & +x_2 & +s_2 & = & 10 \\ -x_1 & +2x_2 & +s_3 & = & 18 \end{array}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_4 \geq 0$$

双対問題の等式標準形

minimize

$w = 7y_1 + 10y_2 + 18y_3$

subject to

$$\begin{array}{rrrrcr} 2y_1 & +3y_2 & -y_3 & -t_1 & = & 1 \\ -y_1 & +y_2 & +2y_3 & -t_2 & = & 2 \end{array}$$

$$y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0$$

相補性定理

$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0 \quad \tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$

$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0 \quad \tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$

$\tilde{x}_1 = \frac{2}{7}$, $\tilde{x}_2 = \frac{64}{7}$, $\tilde{s}_1 = \frac{109}{7}$, $\tilde{s}_2 = 0$, $\tilde{s}_3 = 0$

$\tilde{t}_1 = 0$, $\tilde{t}_2 = 0$, $\tilde{y}_1 = 0$, $\tilde{y}_2 = ?$, $\tilde{y}_3 = ?$

$3y_2 - y_3 = 1,$

$y_2 + 2y_3 = 2$

$\tilde{y}_2 = \frac{4}{7}$

$\tilde{y}_3 = \frac{5}{7}$

$\tilde{z} = \frac{130}{7} \qquad \tilde{w} = \frac{130}{7}$

主問題の最適解から、双対問題の最適解が定まる。(逆も同様)

復習：演習問題

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

minimize $z = x_1 + 2x_2$
subject to $x_1 + x_2 \geq 4,\ x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0,\ \ x_2 \leq 3,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

課題2：双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

課題3：課題2の解答が正しいことを何らかの方法で確認する。

復習：演習問題

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

minimize

$z = (1,2)\boldsymbol{x}$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}$

maximize

$w = (4,2,-3)\boldsymbol{y}$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}$

minimize

$z = (1,2)\boldsymbol{x}$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}, (s_1, s_2, s_3)^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}$

maximize

$w = (4,2,-3)\boldsymbol{y}$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{t} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}, (t_1, t_2)^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}$

復習：演習問題

課題2：双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

maximize

$$w = (4, 2, -3)\boldsymbol{y}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0$$

minimize $-w$

subject to

$$\begin{array}{rrrrrl} & y_1 & -y_2 & & +t_1 & = 1 \\ & y_1 & +2y_2 & -y_3 & +t_1 & = 2 \\ -w & +4y_1 & +2y_2 & -3y_3 & & = 0 \end{array}$$

$$y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0.$$

定数項とスラック変数の係数が正→原点が実行可能領域

$-w$	y_1 非	y_2 非	y_3 非	t_1	t_2	定数
0	1	-1	0	1	0	1
0	1	2	-1	0	1	2
1	4	2	-3	0	0	0

復習:演習問題

課題2:双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して
元の問題の最適解を求める。

$-w$	y_1 ~~非~~	y_2 非	y_3 非	t_1 非	t_2	右辺	
0	1	-1	0	**1**	0	1	/1=1
0	1	2	-1	0	**1**	2	/1=2
1	4	2	-3	0	0	0	

$-w$	y_1	y_2 ~~非~~	y_3 非	t_1 非	t_2 非	右辺
0	**1**	-1	0	1	0	1
0	0	3	-1	-1	**1**	1
1	0	6	-3	-4	0	-4

$-w$	y_1	y_2	y_3 非	t_1 非	t_2 非	右辺
0	**1**	0	-1/3	2/3	1/3	4/3
0	0	**3/3**	-1/3	-1/3	1/3	1/3
1	0	0	-1	-2	-2	-6

最適解: $w=6, y_1=4/3, y_2=1/3, y_3=0, t_1=0, t_2=0$

復習:演習問題

課題2:双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して
元の問題の最適解を求める。

相補性定理:主･双対問題の最適解に次の関係が成立

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0 \quad \tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$
$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0 \quad \tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

(主問題の主変数: $\tilde{x}_j$、スラック変数: $\tilde{s}_k$
双対問題の主変数: $\tilde{y}_k$、スラック変数: $\tilde{t}_j$)

双対問題の最適解:

$$w = 6, y_1 = 4/3, y_2 = 1/3, y_3 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0$$

↓相補性定理

主問題の最適解: $z = 6, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 > 0, x_1 > 0, x_2 > 0$

制約式より: $x_1 + x_2 = 4, -x_1 + 2x_2 = 2, x_2 + s_3 = 3$

連立方程式を解いて未知の変数を定める

$$x_1 = 2, x_2 = 2, s_3 = 1$$

主問題の最適解: $z = 6, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 1, x_1 = 2, x_2 = 2$

復習:演習問題

課題3:課題2の解答が正しいことを何らかの方法で確認する

課題2の解答: z は $x_1 = x_2 = 2$ において最大値6を得る

minimize

$z = x_1 + 2x_2$

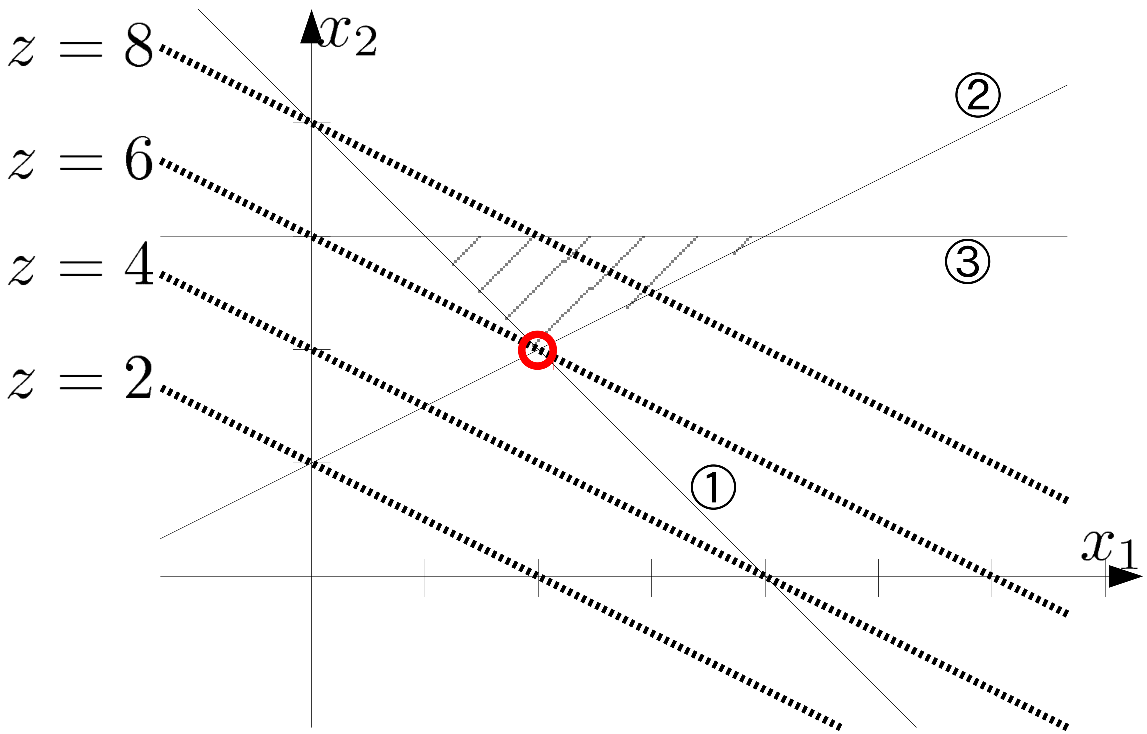
subject to

① $x_1 + x_2 \geq 4$

② $x_2 - 2x_2 + 2 \leq 0$

③ $x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$



線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$の多面体

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

のとき、$\mathcal{P}$ を$\mathbb{R}^n$の多面体と呼ぶ。

この定義では、面や直線、点、半平面等も多面体となる。

定義:有界多面体

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{P}, ||x|| \leq \exists M$$

となる、M が存在するとき $\mathcal{P}$ を有界多面体と呼ぶ。

線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

このように行列 $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}$ 、ベクトル $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}$ で表わされる部分集合$\mathcal{P}$を $\mathbb{R}^n$ の多面体と呼ぶ。

※この定義では面や直線、点、半平面も多面体となる

面: $\boldsymbol{A}_1 = (a_1, a_2, a_3)$

直線: $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \end{pmatrix}$

点: $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{pmatrix}$

※上は全て 3次元の場合

定義:有界多面体

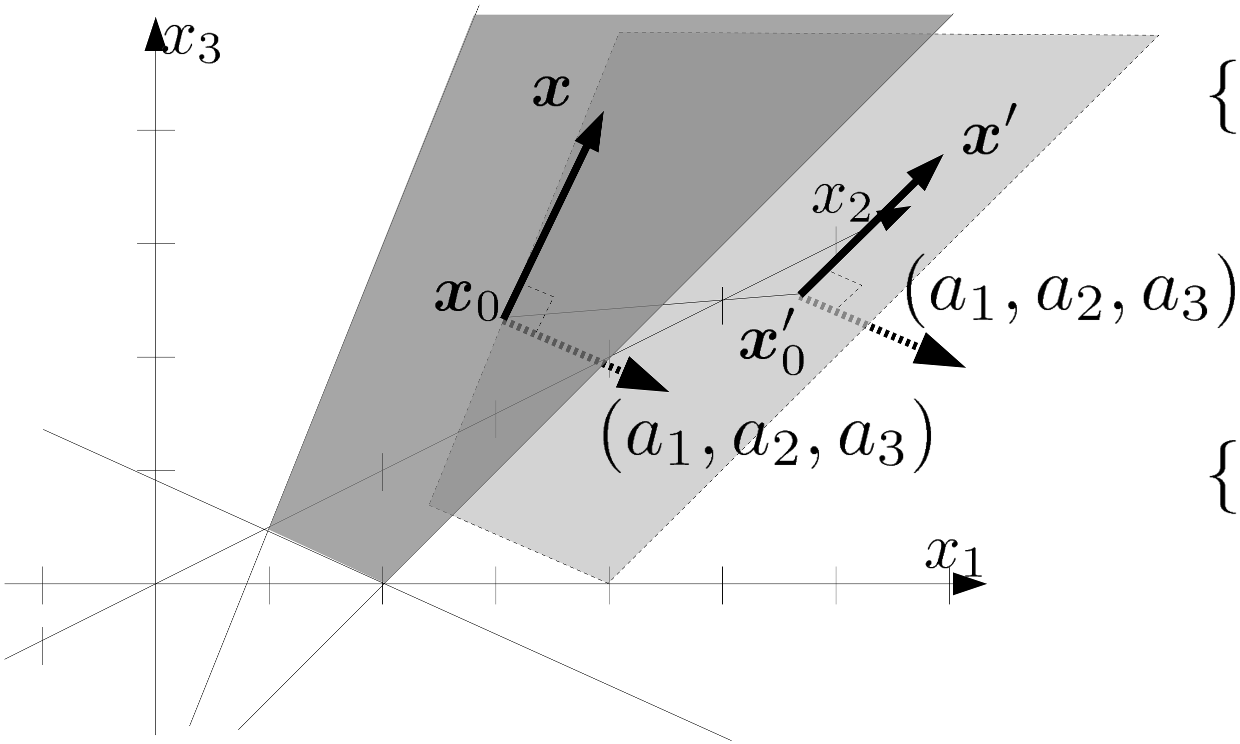
$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{P}, ||x|| \leq \exists M$ を満たす定数 M が存在するとき、$\mathcal{P}$を有界多面体と呼ぶ。

線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体: $\boldsymbol{A}_1 = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_1 = b_1$



$$\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=0\}$$
$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_0 = b_1$$

平行移動

$$\{\boldsymbol{x}' \mid \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}'_0)=0\}$$

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}'_0+\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}_0)=0 \Rightarrow \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}_0+(\boldsymbol{x}'_0-\boldsymbol{x}_0)$$

$=b_1+\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}'_0-\boldsymbol{x}_0)$ $>b_1$ 元の平面に対して$\boldsymbol{A}_1$ と同じ側

$<b_1$ 元の平面に対して$\boldsymbol{A}_1$ と反対側

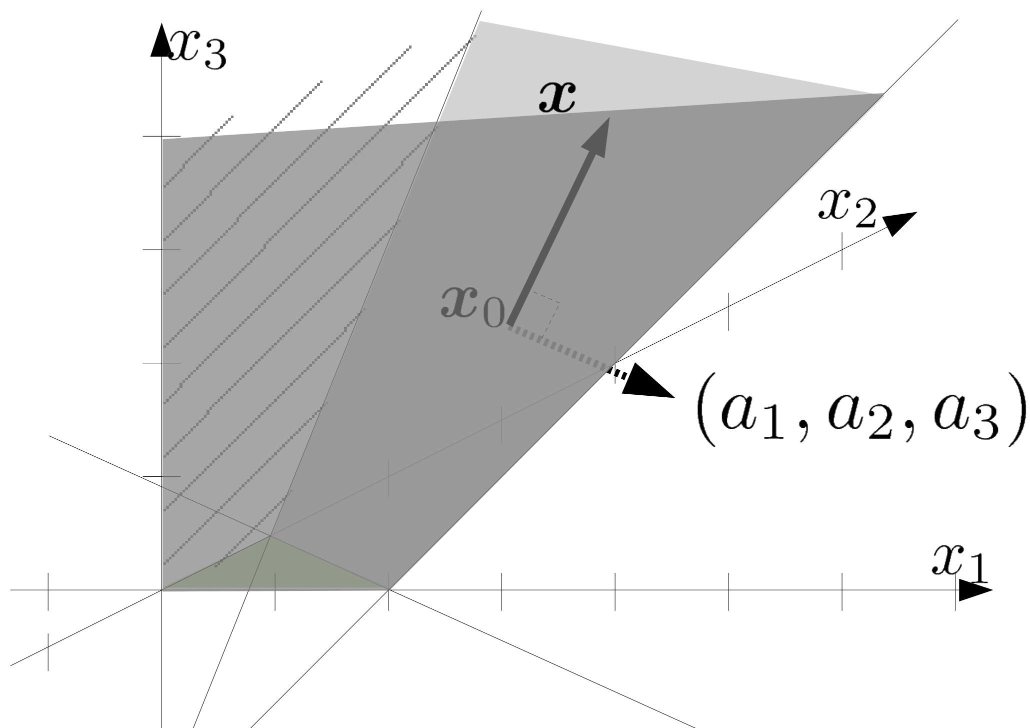
線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元領域を2分する多面体:

$$\boldsymbol{A}_2 = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_2 = b \qquad \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_0 = b$$



$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_2\}$$

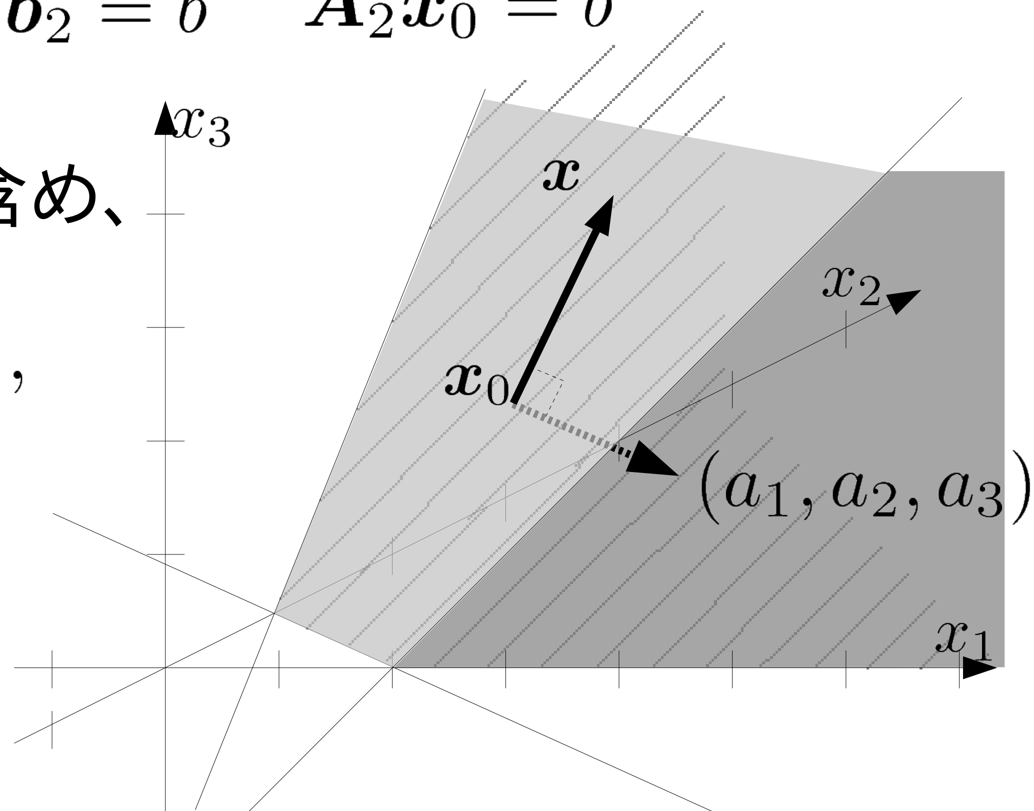
3次元領域を2分する多面体:

$$\boldsymbol{A}_2 = -(a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_2 = b \qquad \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_0 = b$$

正確には非負条件も含め、

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -(a_1, a_2, a_3) \\ -\boldsymbol{I} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} b \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$



$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

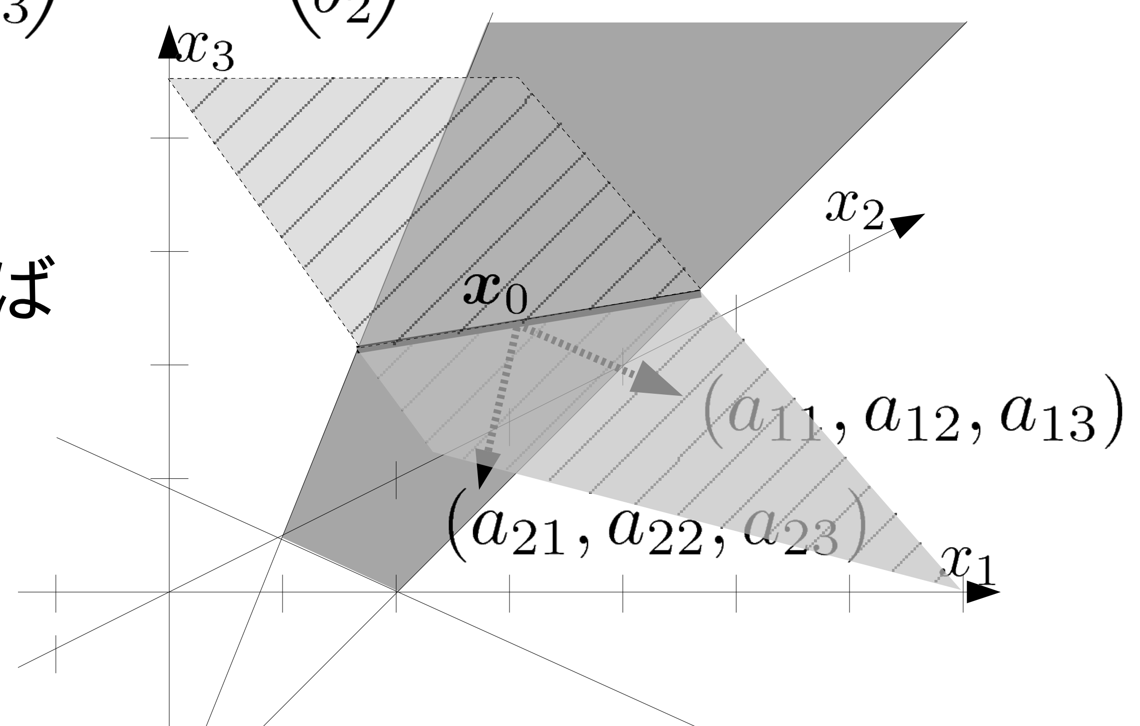
3次元の直線を構成する多面体:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}_1$$

非負条件を入れれば

線分になる



$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{N_1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{N_1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_{N_2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_{N_2} \end{pmatrix}$$

多面体を構成する平面の法線ベクトル:

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{N_1}, \boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_{N_2}$$

不等式標準形の不等式制約の係数に対応する「minimize z , subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$ 」のとき、$\boldsymbol{A}$ の行ベクトル毎に平面が考えられる。

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$$

平面 ℓ : $\boldsymbol{a}_\ell^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq b_\ell \qquad \ell = 1, \ldots, n$

演習問題

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & z = x_1 + 2x_2 \\
\text{subject to} & x_1 + x_2 \geq 4,\ x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0,\ \ x_2 \leq 3, \\
 & x_1, x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

課題2：主問題と双対問題の実行可能領域を、目的関数を表す平面とともに図示し、図を用いてそれぞれの最適解を示せ。