# 数理計画法

## 第11回：多面体と双対定理・相補性定理

# 今後の授業日程について

- 今日の授業
  - 1月18日、第11回「多面体と双対定理･相補性定理」
- 今後の授業
  - 1月25日、第12回「内点法の原理」
  - 2月1日、 第13回「演習」
- 期末試験
  - 2月8日、 第14回「期末試験」

    1時限目、工学部4号館18番教室
- まとめ
  - 2月15日、第15回「その他の最適化法」

    ＋**期末試験結果について**

# 授業関連情報について

- http://comp.cs.ehime-u.ac.jp/~okano/mathpro/
- 授業で使った資料のダウンロード
- 13回目の授業「演習」の資料
  - 用意でき次第連絡しますので、あらかじめダウンロードしておいてください。

# 復習：線形計画問題と多面体

定義：$n$ 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

このように行列 $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}$ 、ベクトル $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}$ で表わされる部分集合$\mathcal{P}$を $\mathbb{R}^n$ の多面体と呼ぶ。

※この定義では面や直線、点、半平面も多面体となる

面： $\boldsymbol{A}_1 = (a_1, a_2, a_3)$

直線： $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \end{pmatrix}$

点： $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{pmatrix}$

※上は全て 3次元の場合

定義：有界多面体

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{P}, ||x|| \leq \exists M$ を満たす定数 $M$ が存在するとき、$\mathcal{P}$ を有界多面体と呼ぶ。

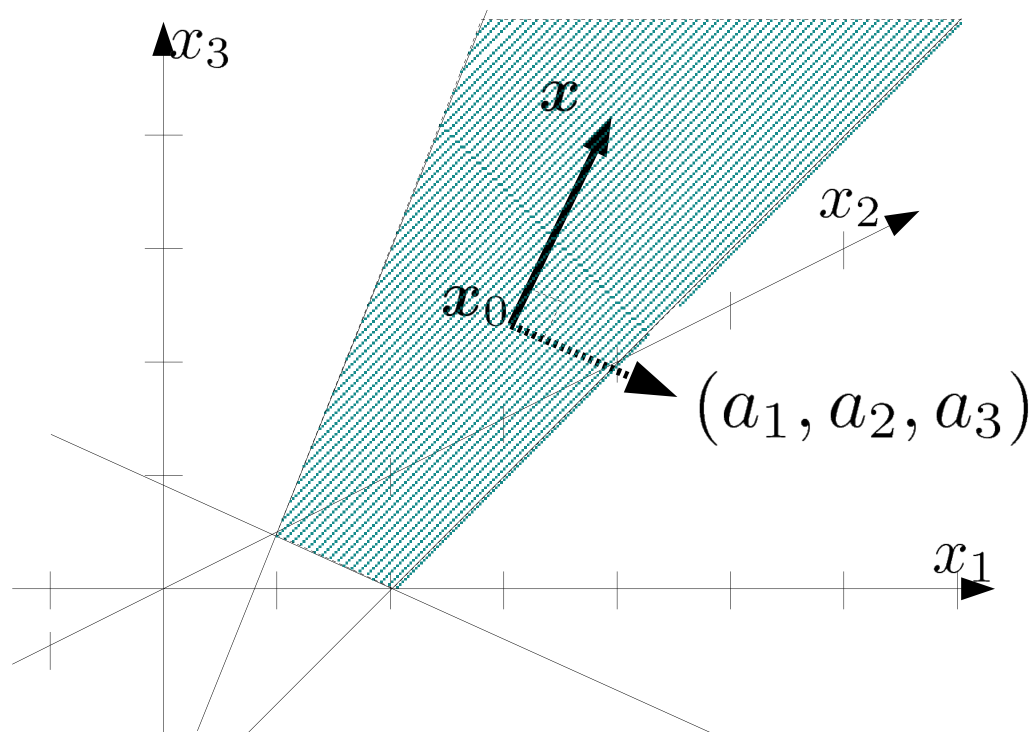
# 復習:線形計画問題と多面体

定義: $n$ 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \cancel{\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2}\}$$

3次元の平面を構成する多面体:

$$\boldsymbol{A}_1 = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_1 = b_1 \qquad \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_0 = b_1$$




$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

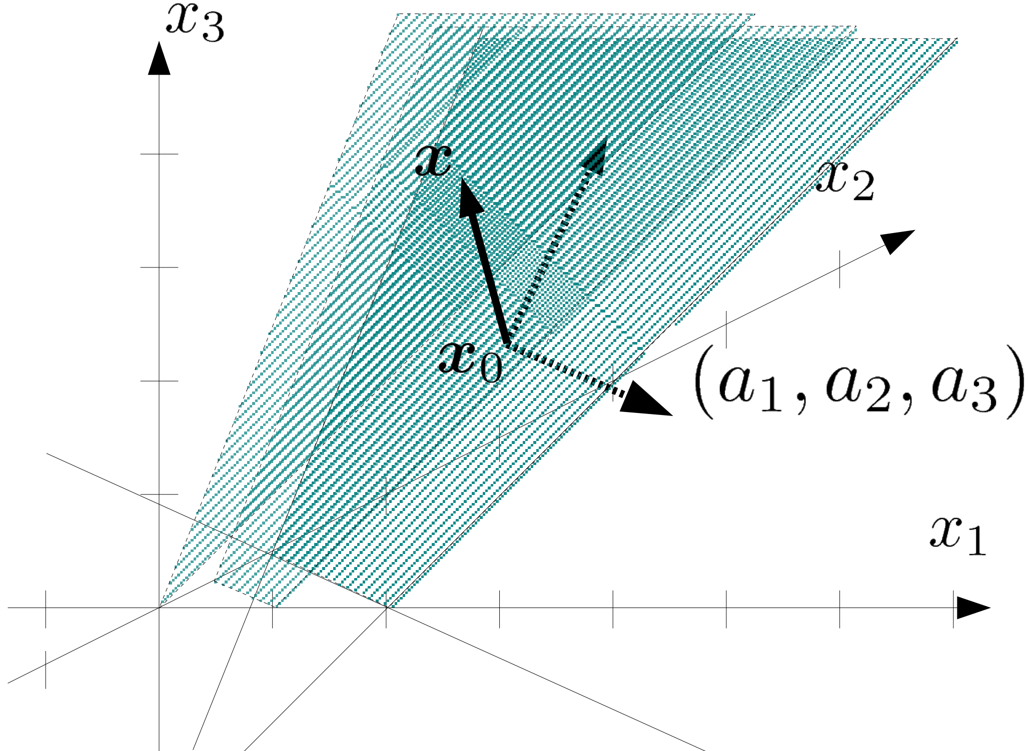
# 復習：線形計画問題と多面体

定義：$n$ 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \cancel{\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1}, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体：

$$\boldsymbol{A}_2 = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_2 = b_2 \qquad \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_0 = b_2$$




$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \leq 0\}$$

$$|(a_1, a_2, a_3)||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \cos\theta \leq 0 \Rightarrow \theta \geq \pi/2$$

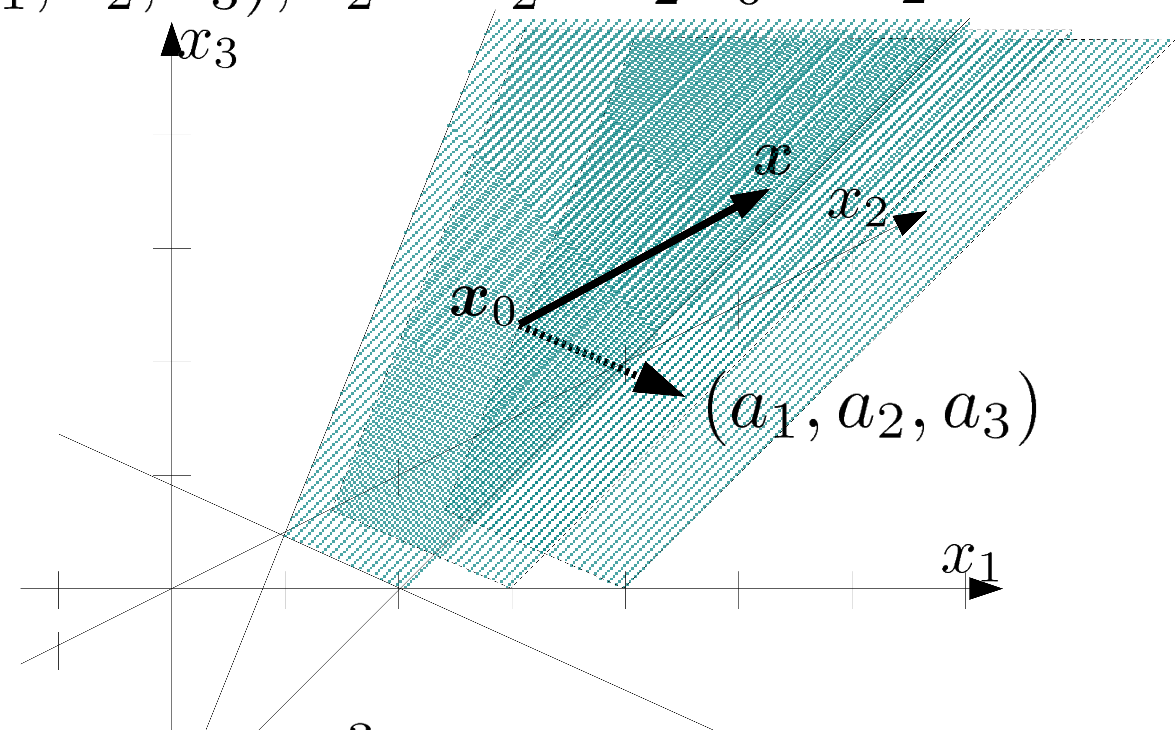
# 復習:線形計画問題と多面体

定義: $n$ 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \cancel{\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1}, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体:

$$\boldsymbol{A}_2 = -(a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_2 = b_2 \quad \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_0 = b_2$$




$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \geq 0\}$$

$$|(a_1, a_2, a_3)||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \cos\theta \geq 0 \Rightarrow \theta \leq \pi/2$$

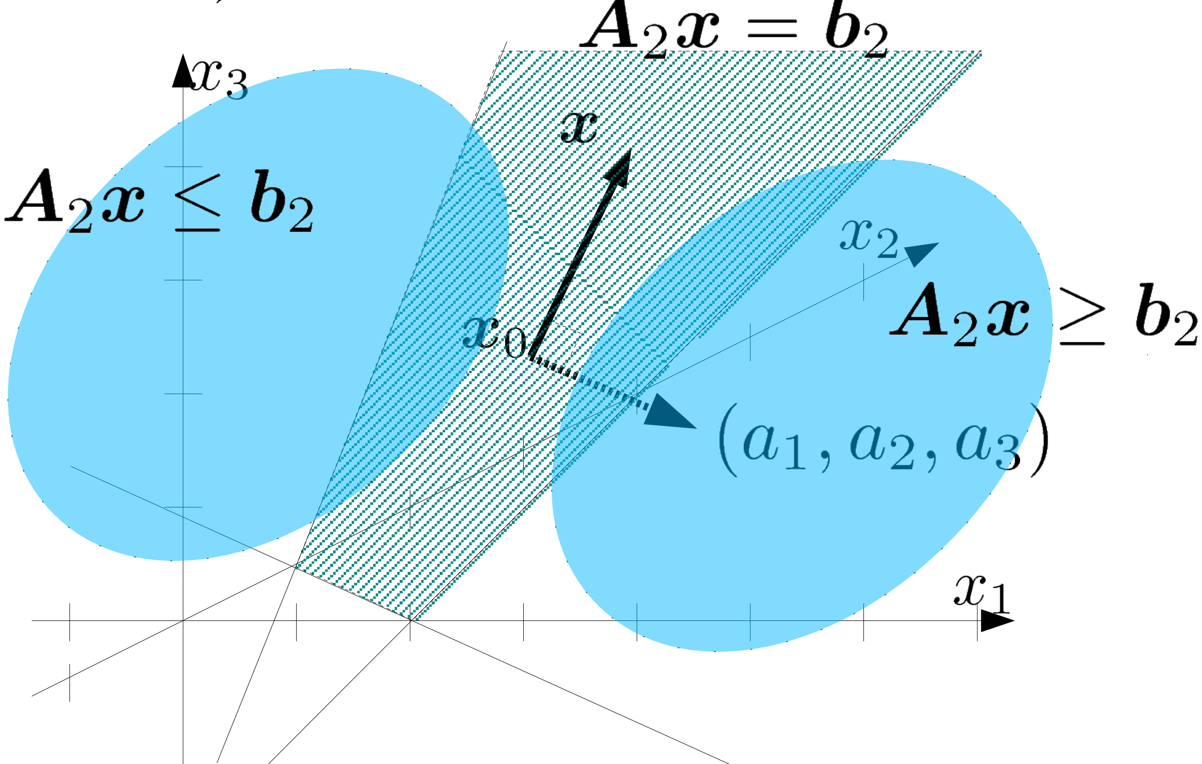
# 復習:線形計画問題と多面体

定義: $n$ 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体:

$$\boldsymbol{A}_2 = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_2 = b_2$$




$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

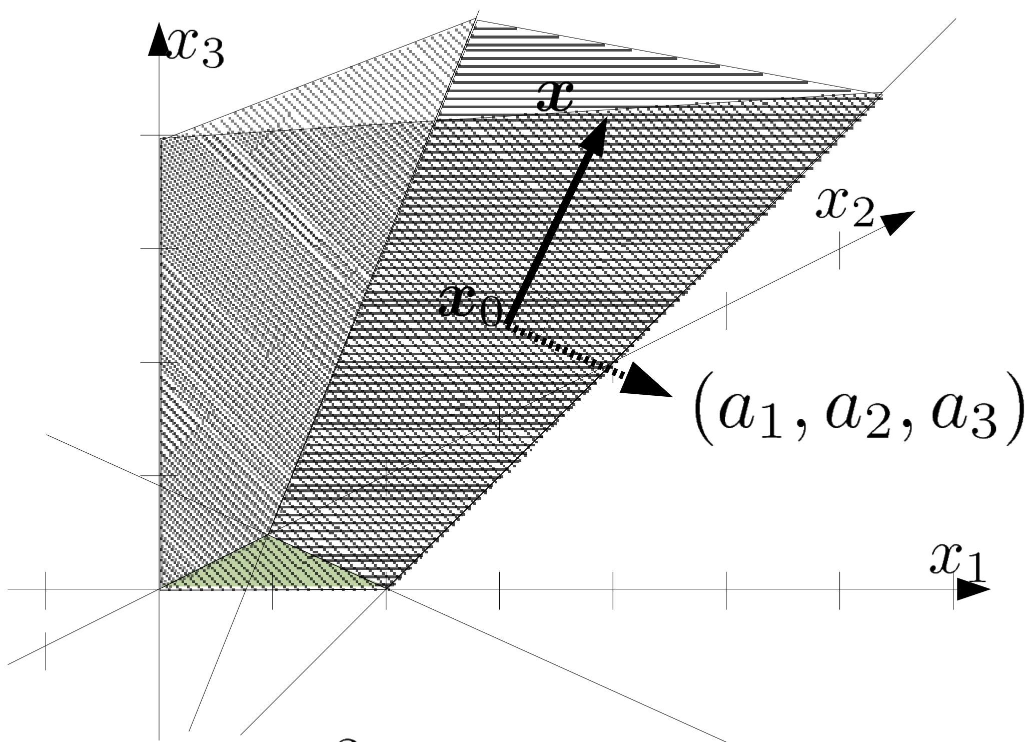
# 復習:線形計画問題と多面体

定義: $n$ 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \cancel{\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1}, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元領域を2分する多面体:

$$\boldsymbol{A}_2 = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_2 = b \qquad \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_0 = b$$




$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \le 0\}$$

# 復習:線形計画問題と多面体

定義: $n$ 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \cancel{\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1}, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

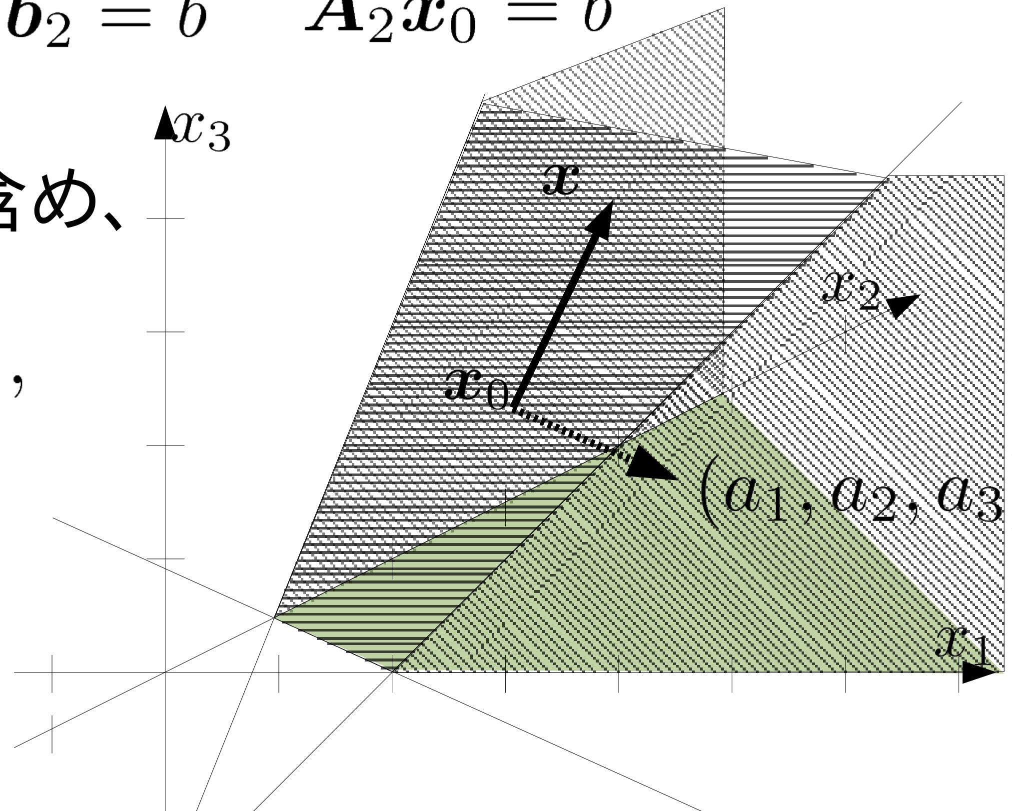
3次元領域を2分する多面体:

$$\boldsymbol{A}_2 = -(a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_2 = b \qquad \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_0 = b$$

正確には非負条件も含め、

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -(a_1, a_2, a_3) \\ -\boldsymbol{I} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} b \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$




$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid -(a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \leq 0\}$$

# 復習：線形計画問題と多面体

定義：$n$次元実ベクトル空間$\mathbb{R}^n$の多面体$\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \cancel{\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2}\}$$

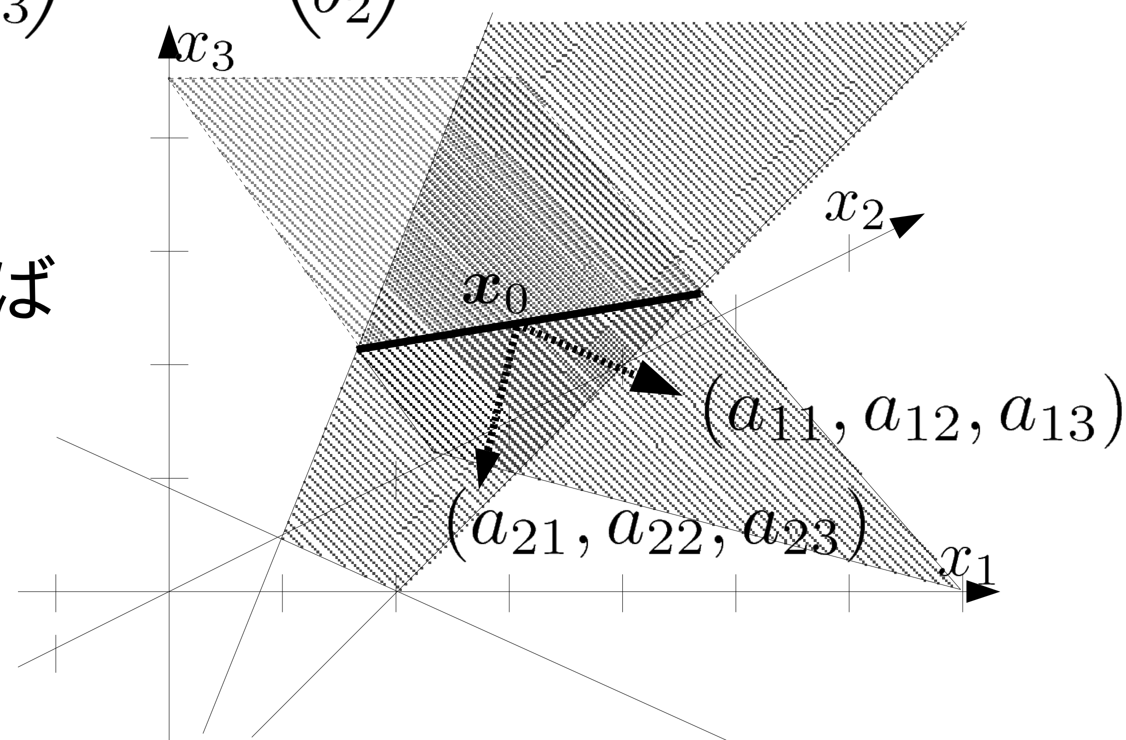
3次元の直線を構成する多面体：

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}_1$$

非負条件を入れれば

線分になる




$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \end{pmatrix} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

# 復習：線形計画問題と多面体

定義：$n$次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \cancel{\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2}\}$$

3次元の直線を構成する多面体：

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}_1$$

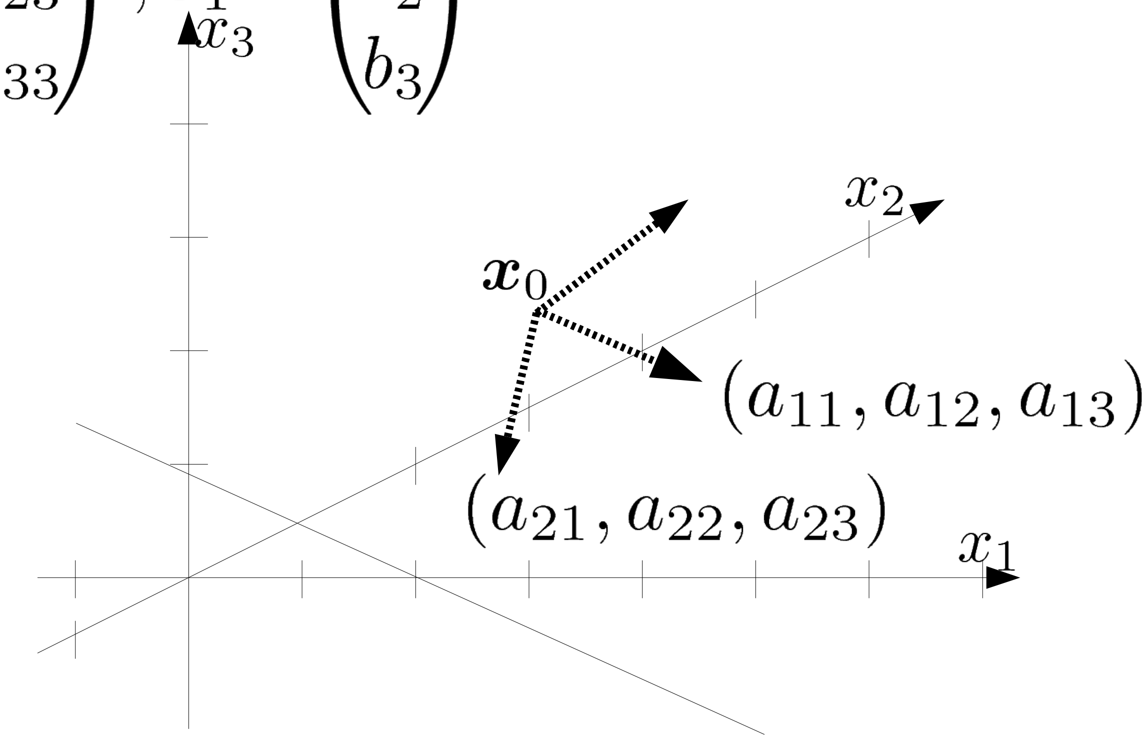
3つのベクトル

$(a_{11}, a_{12}, a_{13})$
$(a_{21}, a_{22}, a_{23})$
$(a_{31}, a_{32}, a_{33})$

が一次独立なら

$$\det \boldsymbol{A}_1 \neq 0$$

$\therefore$ $x_0$ が一意に決まる



# 復習:線形計画問題と多面体

定義: $n$ 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{N_1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{N_1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_{N_2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_{N_2} \end{pmatrix}$$

多面体を構成する平面の法線ベクトル:

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{N_1}, \boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_{N_2}$$

　不等式標準形の不等式制約の係数に対応する「minimize $z$ , subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$ 」のとき、$\boldsymbol{A}$ の行ベクトル毎に平面が考えられる。

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$$

平面 $\ell$ : $\boldsymbol{a}_\ell^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq b_\ell \qquad \ell = 1, \ldots, n$

# 復習：演習問題10

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

$$z = x_1 + 2x_2$$

minimize $x_1 + x_2 \geq 4,\ x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0,\ \ x_2 \leq 3,$

subject to $x_1, x_2 \geq 0.$

課題2：主問題と双対問題の実行可能領域を、目的関数を表す平面とともに図示し、図を用いてそれぞれの最適解を示せ。

# 復習：演習問題10

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

$$z = x_1 + 2x_2$$

minimize $x_1 + x_2 \geq 4,\ x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0,\ \ x_2 \leq 3,$

subject to $x_1, x_2 \geq 0.$

minimize

$z = (1, 2)\boldsymbol{x}$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$

maximize

$w = (4, 2, -3)\boldsymbol{y}$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$

# 復習：演習問題10

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

$$z = x_1 + 2x_2$$

minimize $x_1 + x_2 \geq 4,\ x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0,\ \ x_2 \leq 3,$

subject to $x_1, x_2 \geq 0.$

minimize

$$z = (1,2)\boldsymbol{x}$$

subject to

3つの平面

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}$$

2つの平面

maximize

$$w = (4, 2, -3)\boldsymbol{y}$$

2つの平面

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}$$

3つの平面

# 復習：演習問題10

minimize

$$z = (1, 2)\boldsymbol{x}$$

subject to

3つの平面

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}$$

2つの平面

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0$$

maximize

$$w = (4, 2, -3)\boldsymbol{y}$$

2つの平面

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}$$

3つの平面

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq 0$$

# 復習：演習問題10

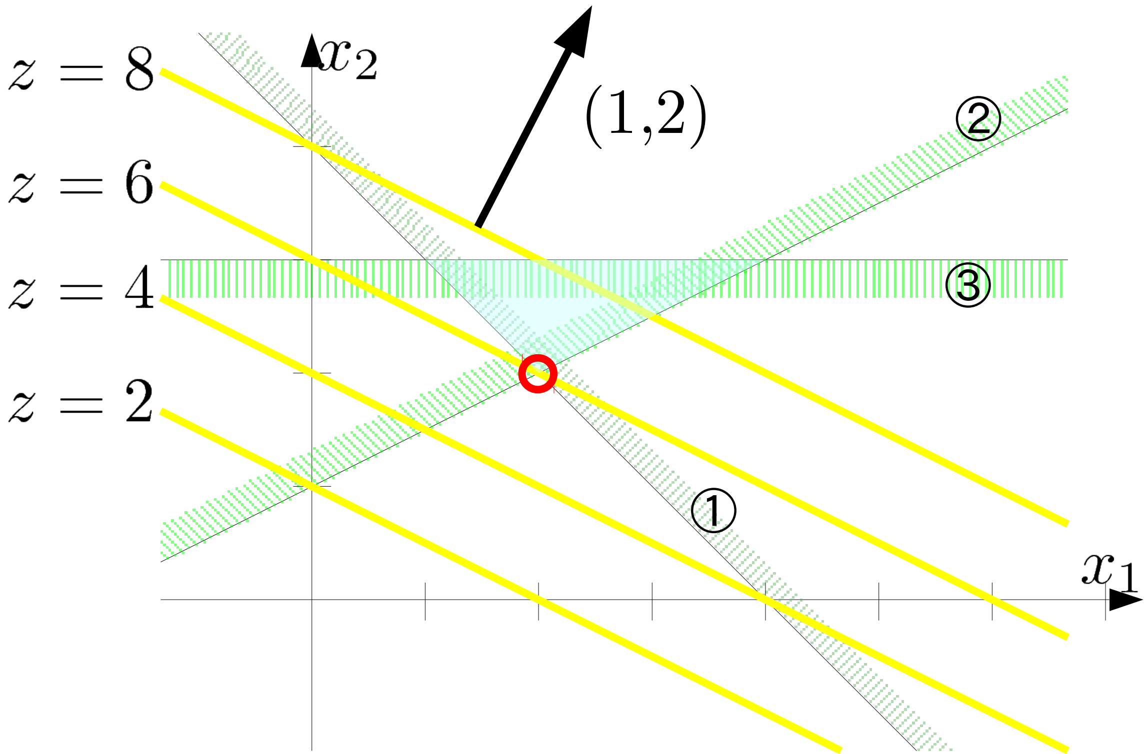
minimize

$$z = (1, 2)\boldsymbol{x}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$



# 復習:演習問題10

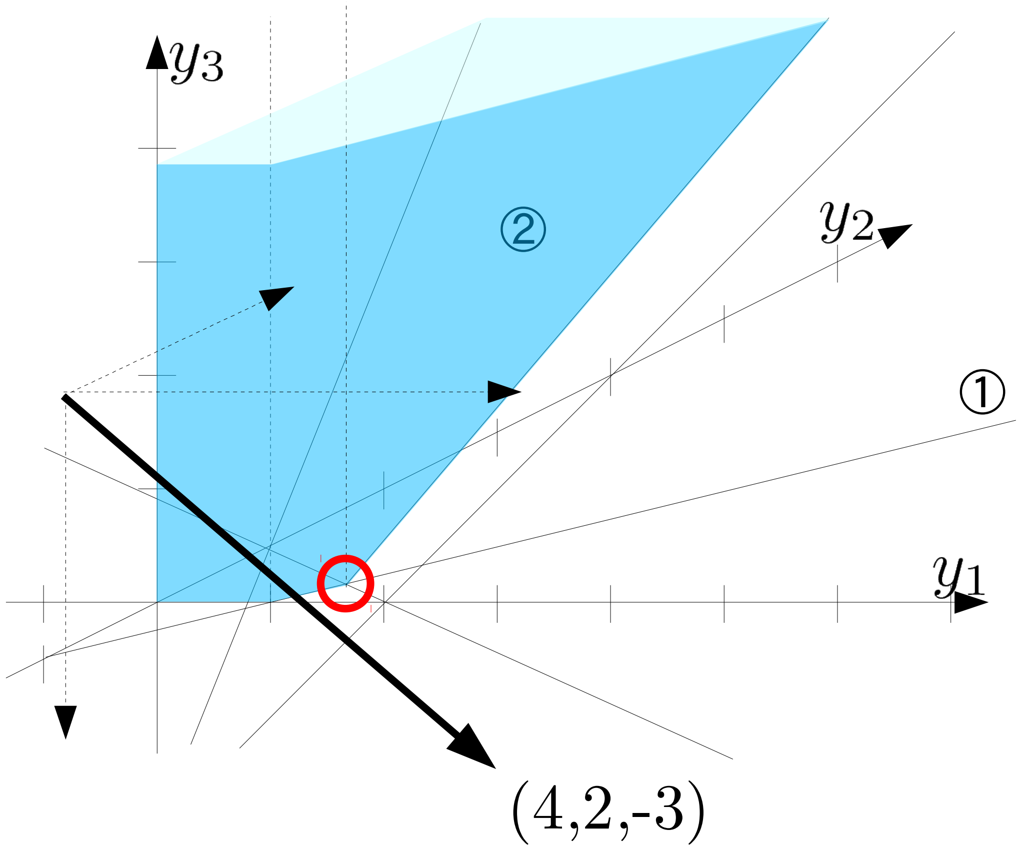
maximize

$$w = (4, 2, -3)\boldsymbol{y}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$



# 制約式の構成する多面体

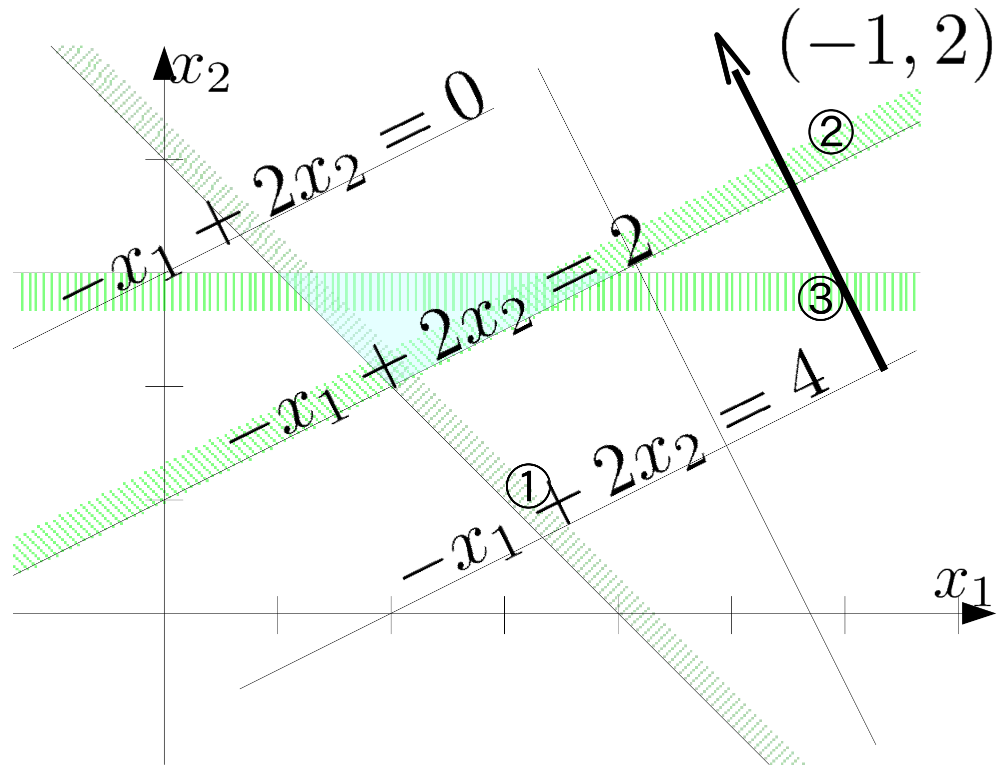
## 不等式標準形

minimize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4 & ① \\ -x_1 + 2x_2 &\geq 2 & ② \\ -x_2 &\geq -3 & ③ \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$




## 等式標準形

minimize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - s_1 &= 4 & ① \\ -x_1 + 2x_2 - s_2 &= 2 & ② \\ -x_2 - s_3 &= -3 & ③ \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

主変数が法線ベクトル方向に変化するとスラック変数値が増加する。

# 制約式の構成する多面体

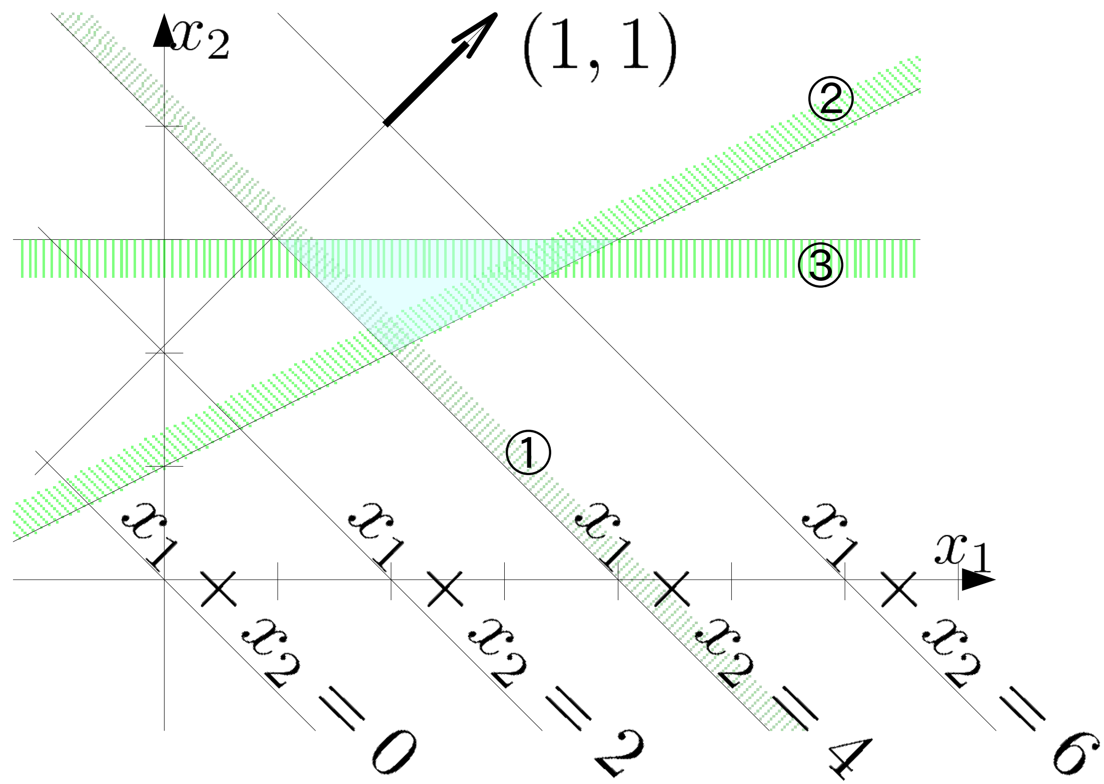
### 不等式標準形

minimize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$x_1 + x_2 \geq 4 \quad ①$$
$$-x_1 + 2x_2 \geq 2 \quad ②$$
$$-x_2 \geq -3 \quad ③$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$




### 等式標準形

minimize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$x_1 + x_2 - s_1 = 4 \quad ①$$
$$-x_1 + 2x_2 - s_2 = 2 \quad ②$$
$$-x_2 - s_3 = -3 \quad ③$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

主変数が法線ベクトル方向に変化するとスラック変数値が増加する。

# 制約式の構成する多面体

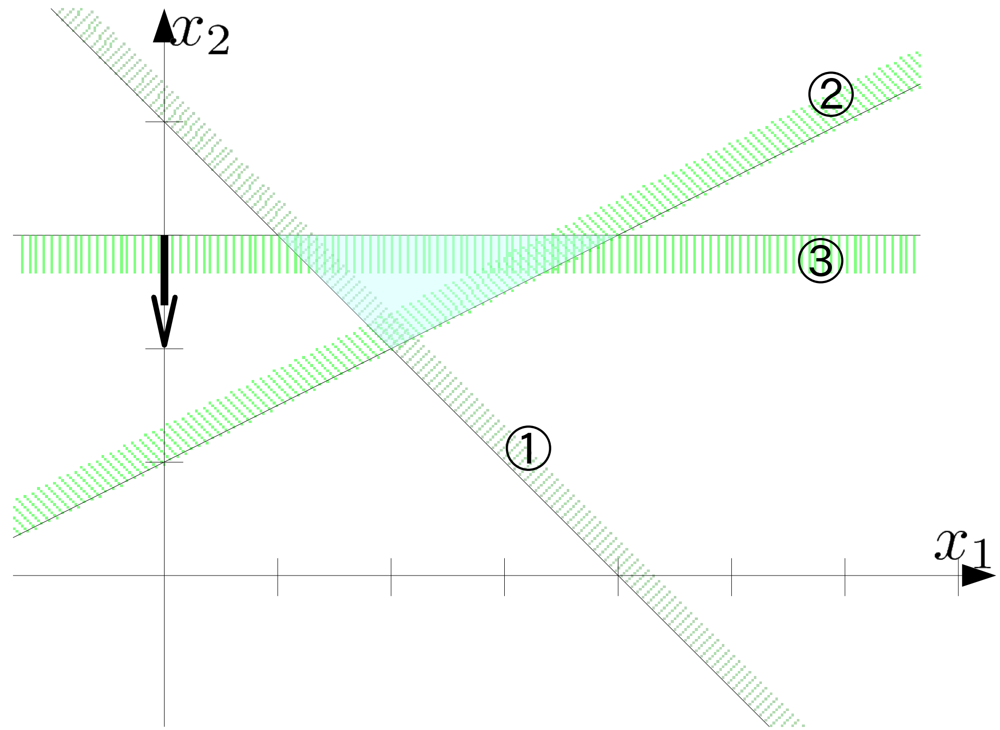
### 不等式標準形

minimize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$x_1 + x_2 \geq 4 \quad ①$$
$$-x_1 + 2x_2 \geq 2 \quad ②$$
$$-x_2 \geq -3 \quad ③$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$




### 等式標準形

minimize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$x_1 + x_2 - s_1 = 4 \quad ①$$
$$-x_1 + 2x_2 - s_2 = 2 \quad ②$$
$$-x_2 - s_3 = -3 \quad ③$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

主変数が法線ベクトル方向に変化するとスラック変数値が増加する。

# 復習:主問題と双対問題の関係

maximize

$z = 2x_1 + x_2 + x_3$

subject to

$$
\begin{array}{rrrcll}
2x_1 & +2x_2 & -x_3 & \leq & 4 & ① \\
2x_1 & & 4x_3 & \leq & 4 & ② \\
-4x_1 & +3x_2 & -x_3 & \leq & 1 & ③
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

最大化問題

minimize

$w = 4y_1 + 4y_2 + y_3$

subject to

$$2y_1 + 2y_2 - 4y_3 \geq 2$$

$$2y_1 + 3y_3 \geq 1$$

$$-y_1 + 4y_2 - y_3 \geq 1$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

最小化問題

最大化問題は、制約式の定める
上界に一番近い実行可能解を探す問題
2つの制約式から分かる上界の例:

$z \leq$ (①+②)/2 $\;\; 2x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 \leq 4$

①②③の組み合わせで得られる関係式

$y_1 \times$ ①$+ y_2 \times$ ②$+ y_3 \times$ ③

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$ であれば、

$$= (2y_1 + 2y_2 - 4y_3)x_1 + (2y_1 + 3y_3)x_2$$
$$+(-y_1 + 4y_2 - y_3)x_3 \leq (4y_1 + 4y_2 + y_3)$$

関係式の係数が目的関数の係数より大きければ、
$z \leq 4y_1 + 4y_2 + y_3$ により
目的関数の上界を得ることができる。

このとき、最も厳しい上界を求める問題、
すなわち $4y_1 + 4y_2 + y_3$ の最小化問題が
$z$ の上限を求める問題に対応する。

# 目的関数の作る平面

不等式標準形

minimize

$z = x_1 + 2x_2$

subject to

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\geq 4 & ① \\
-x_1 + 2x_2 &\geq 2 & ② \\
-x_2 &\geq -3 & ③ \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

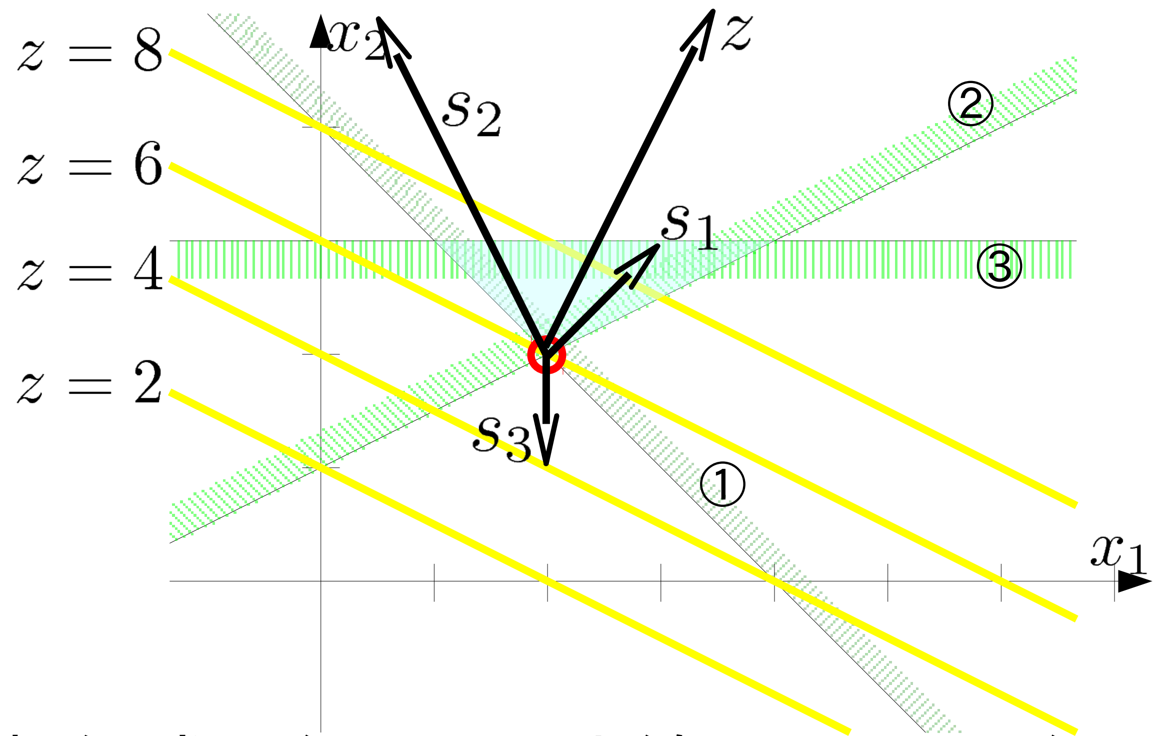
等式標準形

minimize

$z = x_1 + 2x_2$

subject to

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - s_1 &= 4 & ① \\
-x_1 + 2x_2 - s_2 &= 2 & ② \\
-x_2 - s_3 &= -3 & ③ \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

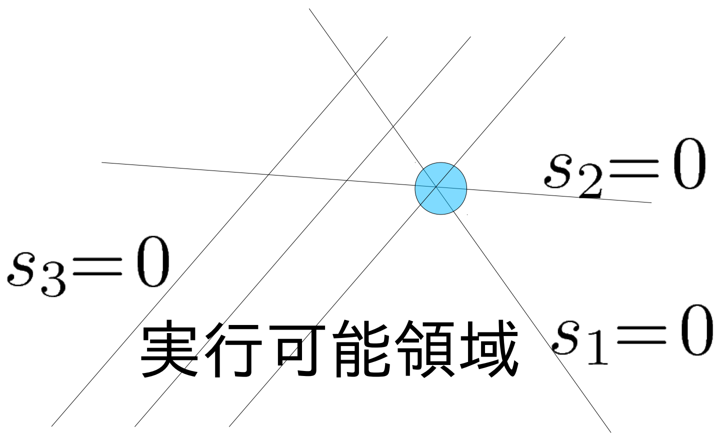



制約式の組合せ=法線ベクトルの組合せ
※目的関数のベクトルと平行にすれば、
双対定理に対応する下限の式が得られる

$y_1 s_1 + y_2 s_2 \parallel z \rightarrow$

$z \geq y_1① + y_2② \geq 4y_1 + 2y_2$

# 相補性定理と多面体




minimize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$x_1 + x_2 - s_1 = 4 \quad ①$$

$$-x_1 + 2x_2 - s_2 = 2 \quad ②$$

$$-x_2 - s_3 = -3 \quad ③$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

主変数が2つの平面の交点に対応する値をとる

→対応するスラック変数値はゼロ、他のスラック変数値は正

→目的関数を制限する不等式の係数＝双対変数は正、他の制約式の係数はゼロ

# 演習問題

解答用紙に名前･学年･学籍番号を記入し、提出

次の線形計画問題の双対問題を求め、主問題･双対問題の実行可能領域に対応する多面体をグラフに描け

また、制約式･目的関数に関わる平面の法線ベクトルを描き、双対変数どうしの関係を説明せよ

maximize

$$z = x_1 + x_2$$

subject to

$$\begin{array}{cccc} x_1 & +2x_2 & \leq & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

minimize

$$w = 2y_1 + 2y_2$$

subject to

$$\begin{array}{cccc} y_1 & +2y_2 & \geq & 1 \\ 2y_1 & +y_2 & \geq & 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 & & \end{array}$$