復習:演習問題11

解答用紙に名前･学年･学籍番号を記入し、提出

次の線形計画問題の双対問題を求め、主問題･双対問題の実行可能領域に対応する多面体をグラフに描け

また、制約式･目的関数に関わる平面の法線ベクトルを描き、双対変数どうしの関係を説明せよ

maximize
$$z = x_1 + x_2$$
subject to
$$\begin{array}{rrcl} x_1 & +2x_2 & \leq & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 2 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

minimize
$$w = 2y_1 + 2y_2$$
subject to
$$\begin{array}{rrcl} y_1 & +2y_2 & \geq & 1 \\ 2y_1 & +y_2 & \geq & 1 \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

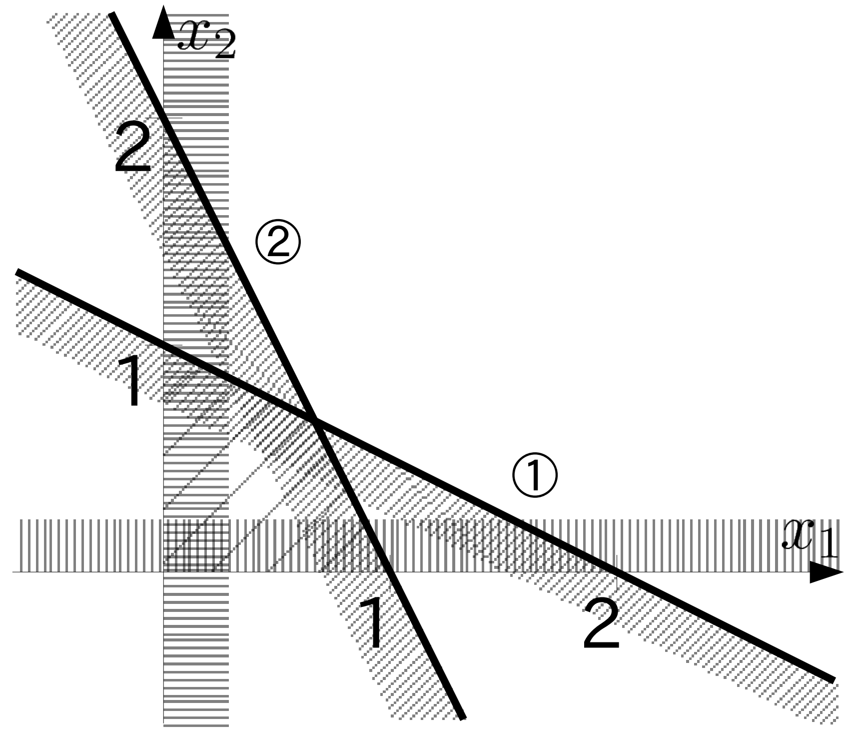
復習:演習問題11

実行可能領域に対応する多面体をグラフに描け

主問題

maximize
$z = x_1 + x_2$
subject to

$$\begin{array}{rrcll} x_1 & +2x_2 & \leq & 2 & ① \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 2 & ② \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$



復習：演習問題11

実行可能領域に対応する多面体をグラフに描け

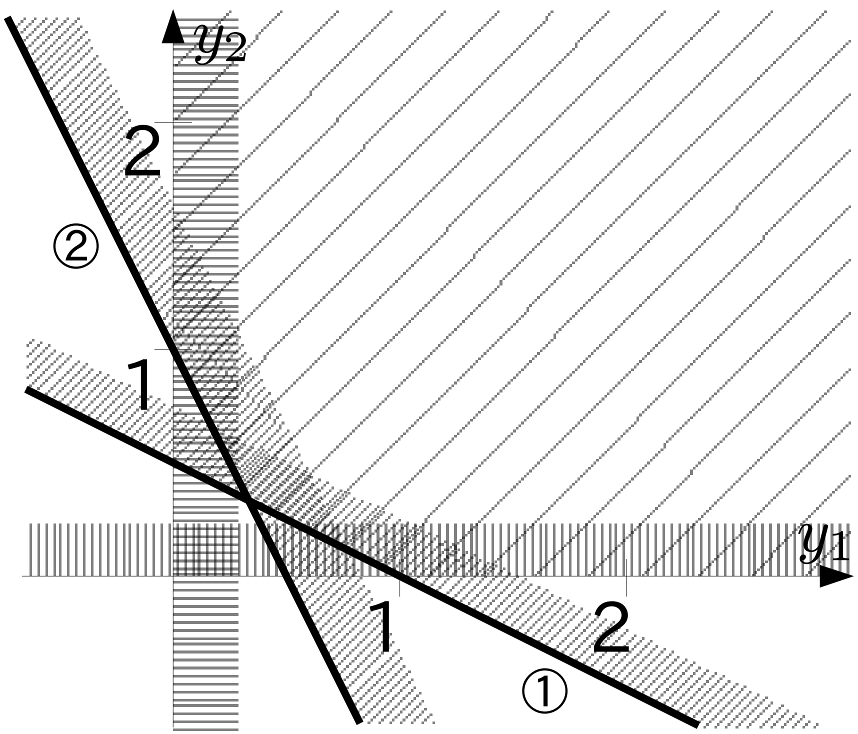
双対問題

minimize

$$w = 2y_1 + 2y_2$$

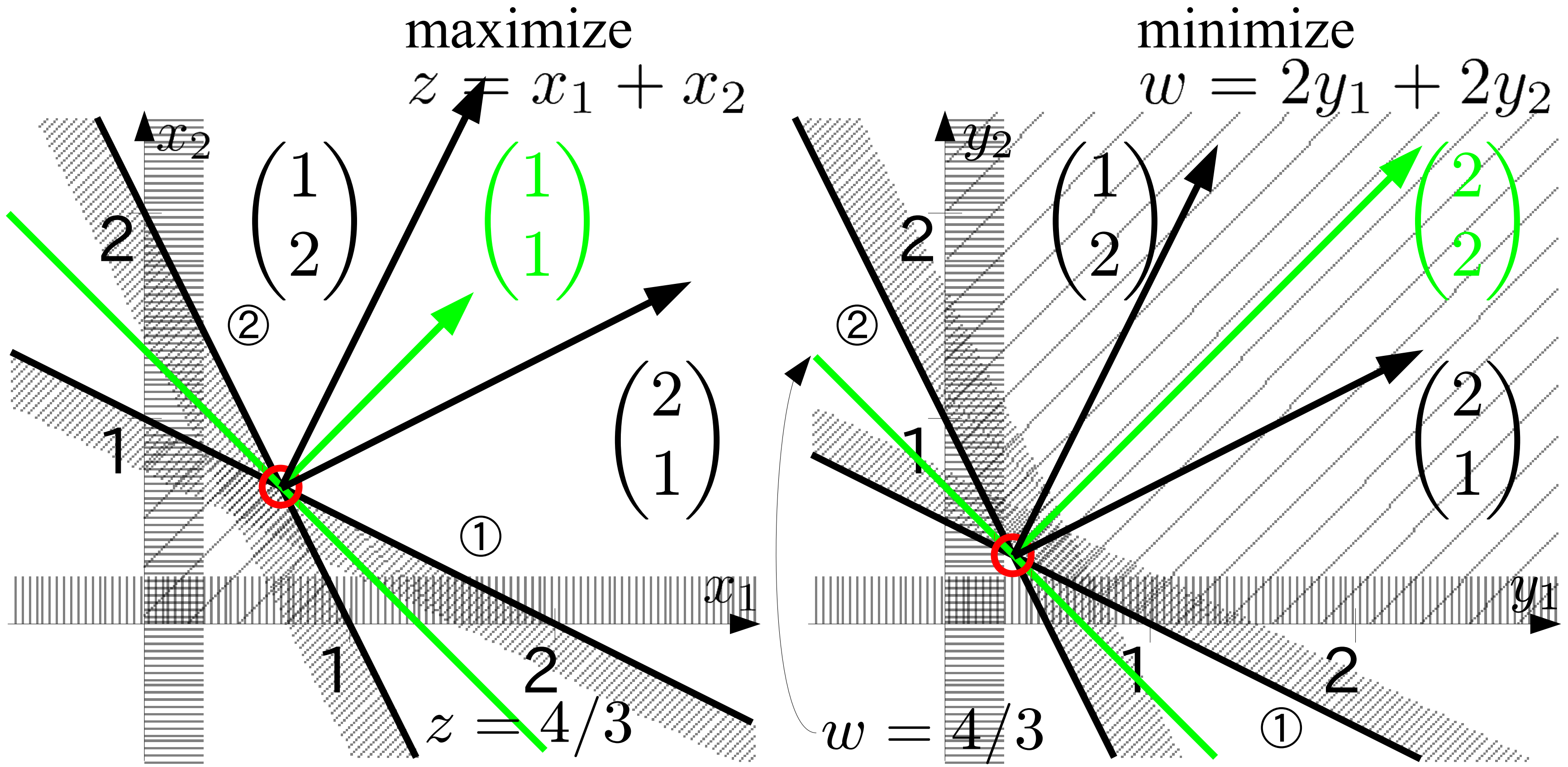
subject to

$$\begin{array}{rrcll} y_1 & +2y_2 & \geq & 1 & ① \\ 2y_1 & +y_2 & \geq & 1 & ② \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 & \end{array}$$



復習:演習問題11

最適解を与える制約式・目的関数に関わる平面の法線ベクトルを描き、



復習：演習問題11

双対変数同士の関係を説明せよ

目的関数の法線ベクトル
＝ $y_1$①の法線ベクトル
＋ $y_2$②の法線ベクトル

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

目的関数
＝y_1制約式①＋y_2制約式②

$$z=x_1+x_2\le\frac{1}{3}2+\frac{1}{3}2=\frac{4}{3}$$

主問題

maximize
$z=x_1+x_2$
subject to

$$\begin{array}{rrcll} x_1 & +2x_2 & \le & 2 & ① \\ 2x_1 & +x_2 & \le & 2 & ② \\ & x_1,x_2 & \ge & 0 & \end{array}$$

最適解：

$$(z,x_1,x_2,s_1,s_2)=(\tfrac{4}{3},\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3},0,0)$$

復習:演習問題11

双対変数同士の関係を説明せよ

目的関数の法線ベクトル
= $x_1$①の法線ベクトル
＋ $x_2$②の法線ベクトル

$$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

目的関数
＝x_1制約式①＋x_2制約式②

$$w=2y_1+2y_2\geq\frac{2}{3}1+\frac{2}{3}1=\frac{4}{3}$$

双対問題

minimize
$w=2y_1+2y_2$
subject to

$$\begin{array}{lllll} y_1 & +2y_2 & \geq & 1 & ① \\ 2y_1 & +y_2 & \geq & 1 & ② \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

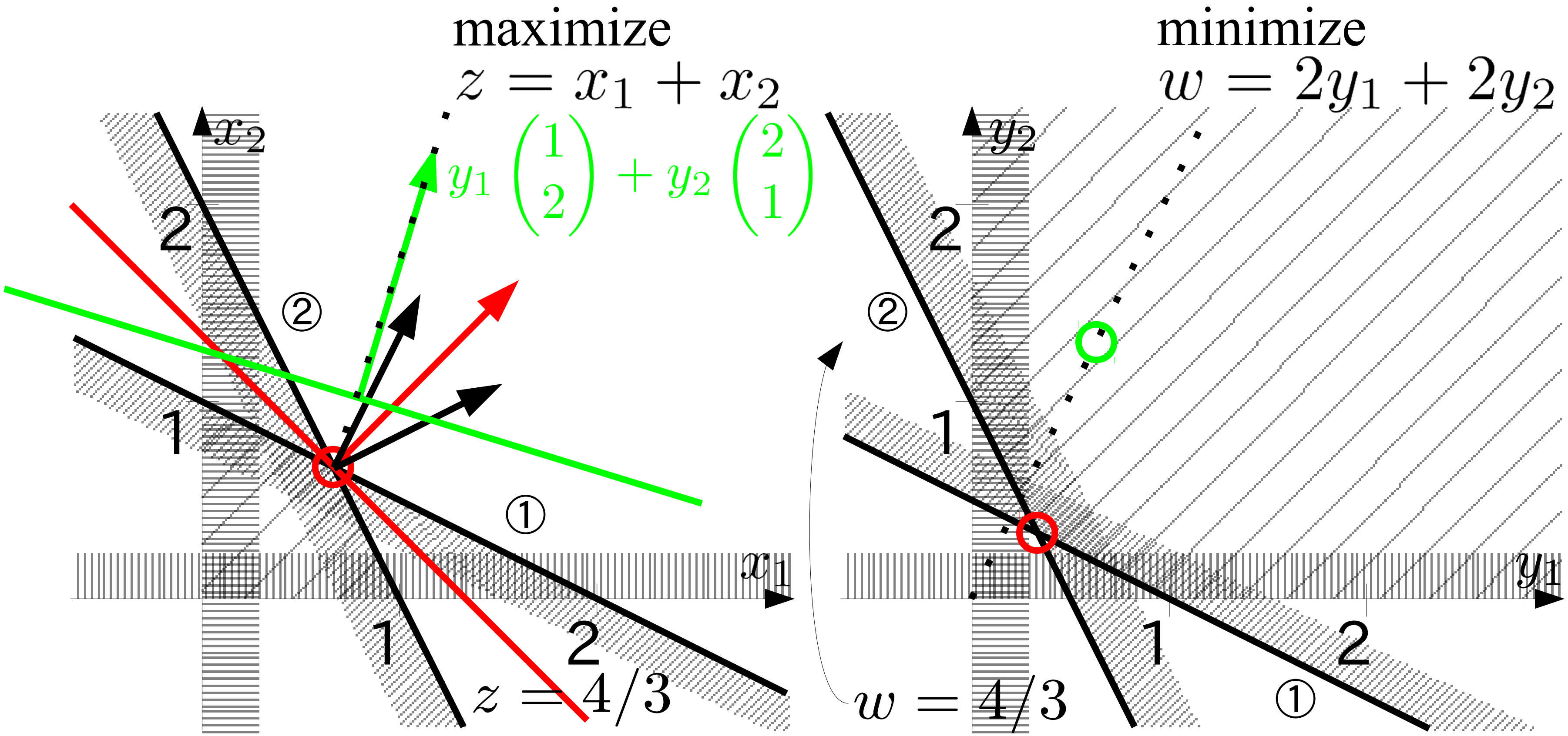
最適解

$$(w, y_1, y_2, t_1, t_2) = (\tfrac{4}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, 0, 0)$$

双対変数値と支持(超)平面

法線ベクトルの組合せで目的関数値に対する制限が決まる

⇒一番厳しい制限＝目的関数と同一法線



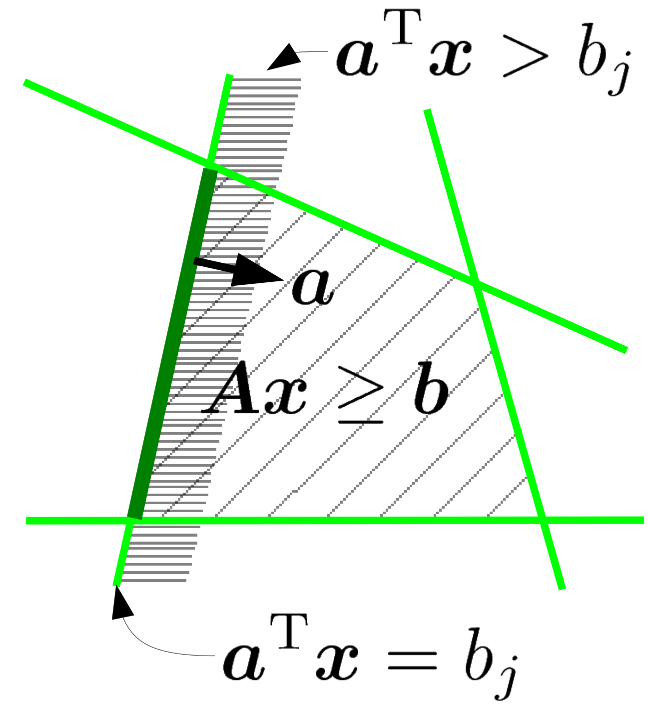
復習+α:線形計画問題と多面体

多面体:
　線形計画問題を考えるベクトル空間において、制約等式、不等式の定める領域、全ての制約を満たす多面体=実行可能領域

(超)平面:
　(線形)制約等式を満たす点の集合

支持超平面:
　多面体を構成する不等式の一つが単独で構成する多面体の境界

面:
　多面体とその支持超平面の交わり



$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \vdots \\ b_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

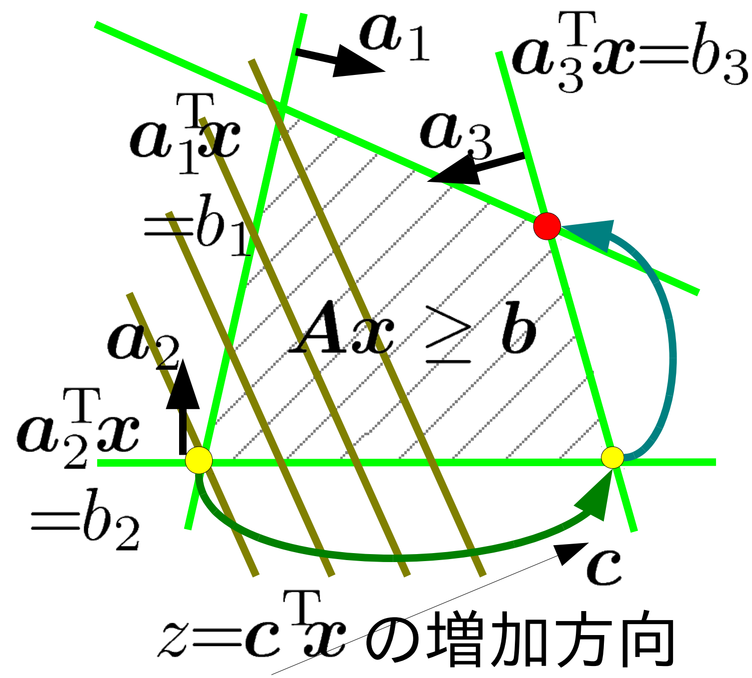
復習+α:線形計画問題と多面体

交点:
　複数の(超)平面の交わりのうち、点を成すもの

$$A=\begin{pmatrix} a_1^{\mathrm{T}} \\ a_2^{\mathrm{T}} \\ a_3^{\mathrm{T}} \\ \vdots \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

多面体の頂点:
　支持(超)平面の成す交点

単体法の原理:
　目的関数が増加するように多面体の頂点を移動し、最適解を求める方法
　出発点となる頂点から頂点を構成する支持超平面を順番に入れ換えて目的関数を増加させる
　総当たり法よりも効率が良い?

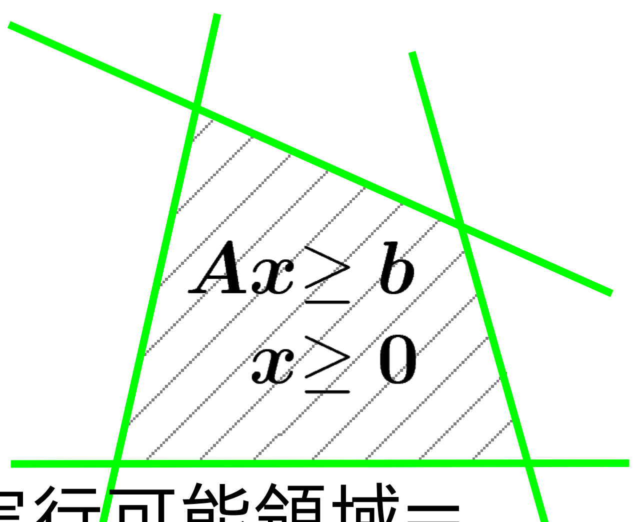


内点法の原理

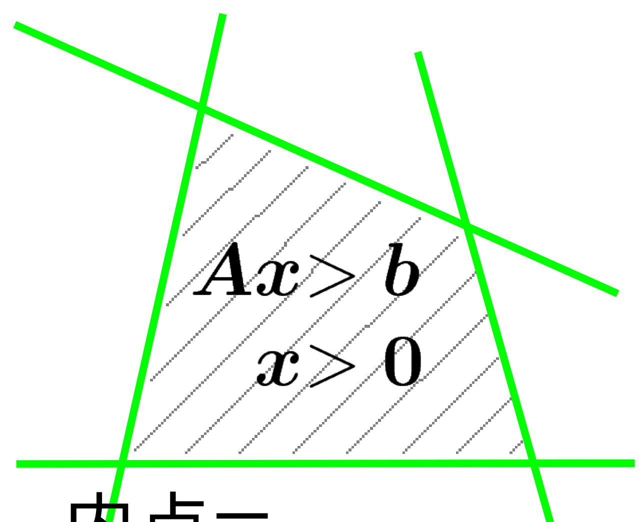
不等式標準形

minimize
$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
subject to
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

内点:
不等式標準形の制約式から等号を除いた条件を満たす点を内点と呼ぶ



実行可能領域＝
$$\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$



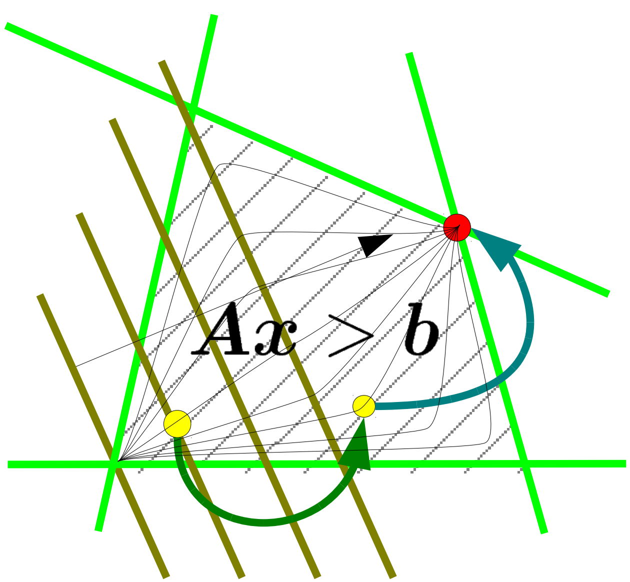
内点＝
$$\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}\}$$

内点法の原理

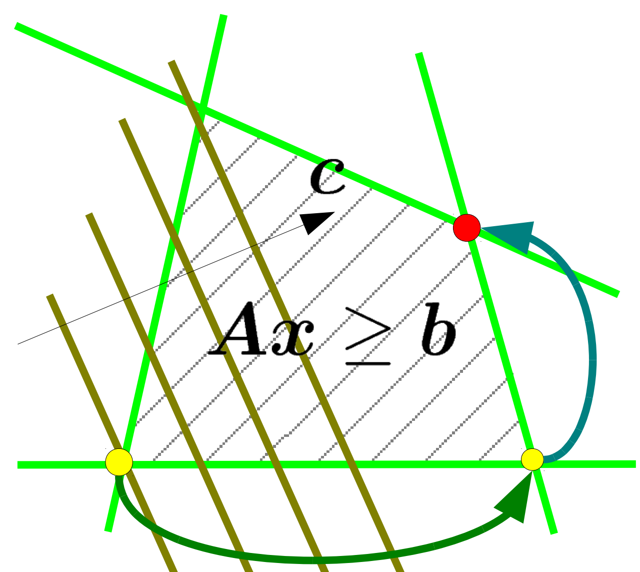
内点法の原理:
　内点領域中に最適解へ向かうベクトル場からなるう軌跡を作り、軌跡に沿って内点領域を通る経路を近似的に求める方法。

不等式標準形

minimize
$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
subject to
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$



内点法



単体法

内点法の原理

双対定理：
主問題･双対問題の実行可能解 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m, \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$において
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$が最適解 $\iff \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$

そこで、与えられた線形計画問題を$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ を実現する点$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^{m+n}$を求める問題に置換えて考える

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が主･双対問題の最適解でないとき、両者の目的関数には差がある、これを双対ギャップと呼ぶベクトルで評価する

$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ より、

$$0\leq\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$
$$=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$
$$=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}$$
$$=(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}$$

但し $\boldsymbol{s}$ はスラック変数で $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{s}$

主問題	双対問題
minimize $z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}$	maximize $w=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ subject to $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}$

自己双対型内点法の原理

前頁より目的関数値の差:$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}$

そこで、

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{s}\end{pmatrix}$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^{m+n}$ を考える

さらに、

$$\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})\equiv\begin{pmatrix}x_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & x_m & & & \\ & & & s_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & s_n\end{pmatrix}$$

とおけば、$\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}$ の非負性より

$$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{s}\end{pmatrix}=0\Longleftrightarrow\boldsymbol{X}\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}$$

したがって、最適解を求めることは $\boldsymbol{X}\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{t}$ を求めることと等しい

内点法の原理

内点法の原理、
元の線形計画問題を解き、最適解を求めることは次の方程式を解くことと等しい

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{t} \equiv \mathrm{diag}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{s} \geq 0,$$

そこで、$\boldsymbol{X}\boldsymbol{t}{=}\boldsymbol{0}$ を解く代りに次の方程式を解く

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{t} = \lambda\boldsymbol{1},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{s} \geq 0,$$

$$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}{=}((\boldsymbol{c}{-}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}), \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}, \lambda \geq 0$$

λ を縮小するとともに反復的に改良を繰返し、十分小さい λ に対する近似解を元の問題の近似解とする

内点法の原理

双対ギャップ t を縮小する反復解法
反復の k 段目の変数 $(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{s}_k, \boldsymbol{t}_k)$ をX, t とおく、k+1段目への改善量を△で表せば改善量の満たすべき方程式は次の通り

$$(\boldsymbol{X}+\Delta \boldsymbol{X})(\boldsymbol{t}+\Delta \boldsymbol{t})=\lambda \mathbf{1},$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s}+\Delta \boldsymbol{x}-\Delta \boldsymbol{s})=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}+\Delta \boldsymbol{x} \geq 0, \boldsymbol{s}+\Delta \boldsymbol{s} \geq 0,$$

$$\boldsymbol{t}+\Delta \boldsymbol{t}=\boldsymbol{A}^{T}(\boldsymbol{y}+\Delta \boldsymbol{y})-\boldsymbol{c}, \boldsymbol{t}+\Delta \boldsymbol{t} \geq 0, \lambda>0.$$

X と t に関する非線形部分で2次以上の項を無視すれば

$$\boldsymbol{T} \Delta \boldsymbol{x}+\boldsymbol{X} \Delta \boldsymbol{t}=\lambda \mathbf{1}$$

ただし、$\boldsymbol{T}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})$

内点法の原理

式を整理して、線形方程式を得る

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{A} \Delta \boldsymbol{x} = 0 \\
\Delta \boldsymbol{t} = \boldsymbol{A}^T \Delta \boldsymbol{y} \\
\boldsymbol{T} \Delta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{X} \Delta \boldsymbol{t} = -[\boldsymbol{X} \boldsymbol{t} - \lambda \mathbf{1}]
\end{gathered}
$$

実際の内点法においては初期の実行可能解、

$$(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{s}^k)$$

更新のためのλの決定は簡単ではない。
そこで、具体的な初期解の決定方法や反復の手順について、様々な工夫がされている。