# 数理計画法

## 第1回：数理計画問題・線形計画問題とは何か

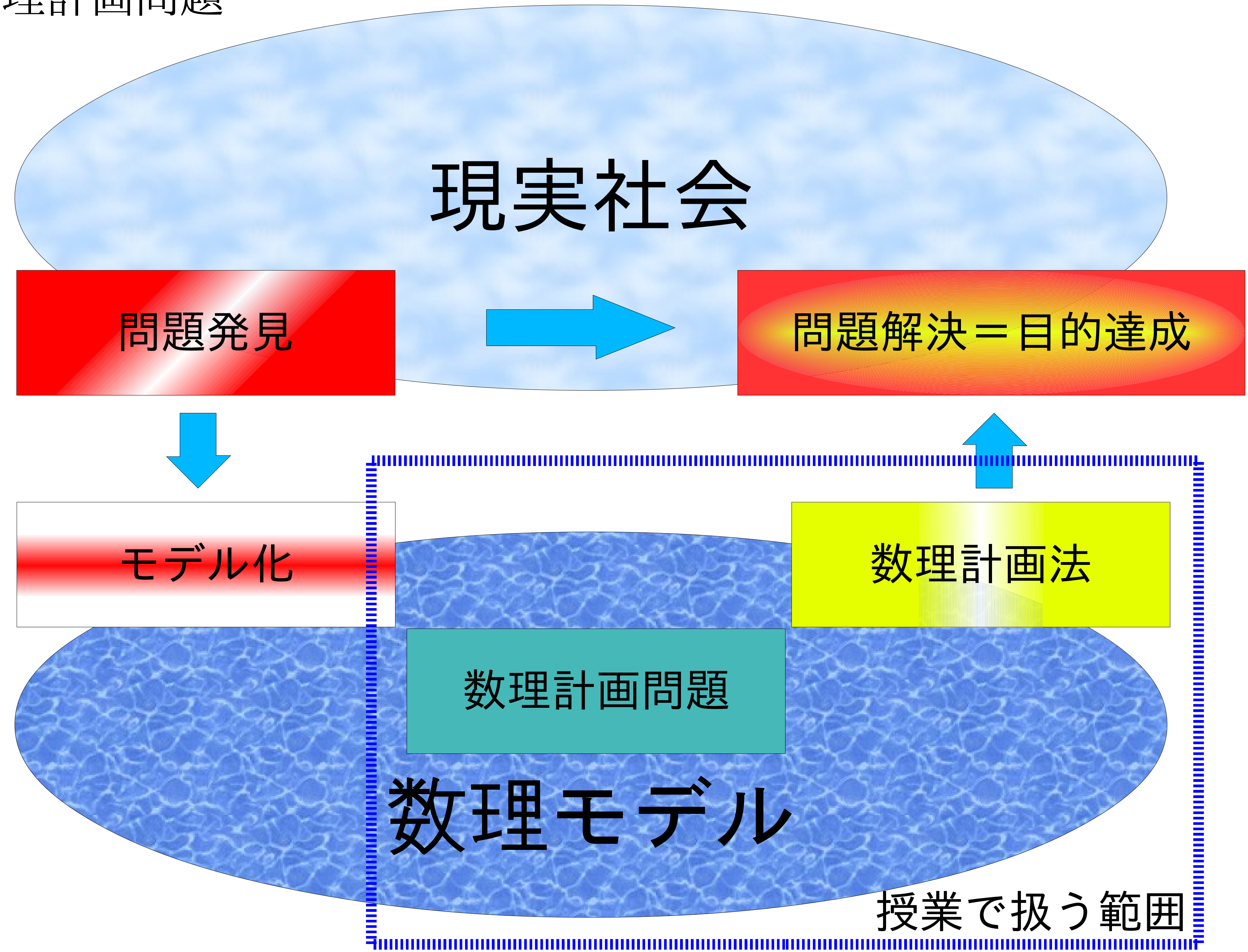
数理計画法＝数理計画問題−問題+法
線形計画法＝線形計画問題−問題+法

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & z = f(x_1, \ldots, x_n) \\
\text{subject to} & g(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in X
\end{array}
$$

与えられた制約式のもとである関数を最大化する問題

線形計画問題⊂数理計画問題⊂最適化問題

数理計画問題



# 数理計画法による目的達成の手順

1. 問題発見
   操作できるものは何か（変数と制約式）
   得られた結果をどう評価するのか（目的関数）
2. モデル化
   同じ問題でもモデル化の方法は多様
   違う問題でも類似数理モデルに共通の方法が使える
3. 数理計画法
   問題の種類に応じた方法、効率の良い方法、コストの低い方法、手間の多い方法…
4. 目的達成
   最適解を実行することはできるのか、
   得られる結果は目的に合ったものか、

# 数理モデルと数理計画問題の分類

- 数理モデル作成の例
- 数理計画問題の類別
- 線形計画問題とは何か

# 数理モデル作成の例

ミックスジュース5Lあたりの原材料と利益

| 原材料 | トロピカル | フレッシュ | 最大供給量 |
|---|---|---|---|
| マンゴー液 | 3L | 1L | 45キロL |
| オレンジ液 | 1L | 2L | 40キロL |
| 利益 | 600円 | 500円 | |

問題：利益を最大化する2種類のミックス
　　　ジュースの生産量は？

変数　　：生産量　トロピカルミックス　$x_1 \times 5[\mathrm{L}]$
　　　　　　　　　フレッシュミックス　$x_2 \times 5[\mathrm{L}]$

制約式　：供給量　マンゴー液　$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3 [\mathrm{L}]$
　　　　　　　　　オレンジ液　$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3 [\mathrm{L}]$

目的関数：利益　$600x_1 + 500x_2$

負の生産量が無いことに注意

# 数理計画問題の表現と用語

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &\leq 45 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 40 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

最大化(minimize:最小化)

目的関数(objective func.)

制約式(constraints)

最適解(optimal solution)　目的関数の最大値を与える解

※大域的/局所的最適解:　あとで、

最適値(optimal value)　最適解をとる目的関数の値

実行可能解(feasible solution)　制約式を満たす解

実行可能領域(feasible region)　実行可能解の集合

# 数理計画問題の表現と分類

- 変数の性質による分類
  - 連続型: (実数)
  - 離散型: (整数)
- 条件(制約式、目的関数）の性質による分類
  線形、非線形、微分可・不可、連続、不連続、区分線形…

授業で扱うのは、
連続変数による線形関数の数理計画問題

→線形計画問題

# 線形計画問題と素朴な解法

ミックスジュース5Lあたりの原材料と利益

| 原材料 | トロピカル | フレッシュ | 最大供給量 |
|---|---|---|---|
| マンゴー液 | 3L | 1L | 45キロL |
| オレンジ液 | 1L | 2L | 40キロL |
| 利益 | 600円 | 500円 | |

問題:利益を最大化する2種類のミックスジュースの生産量は?

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

変数:生産量
トロピカルミックス $x_1(\times 5[\mathrm{L}])$
フレッシュミックス $x_2(\times 5[\mathrm{L}])$

目的関数も制約式も全て1次関数であり線形

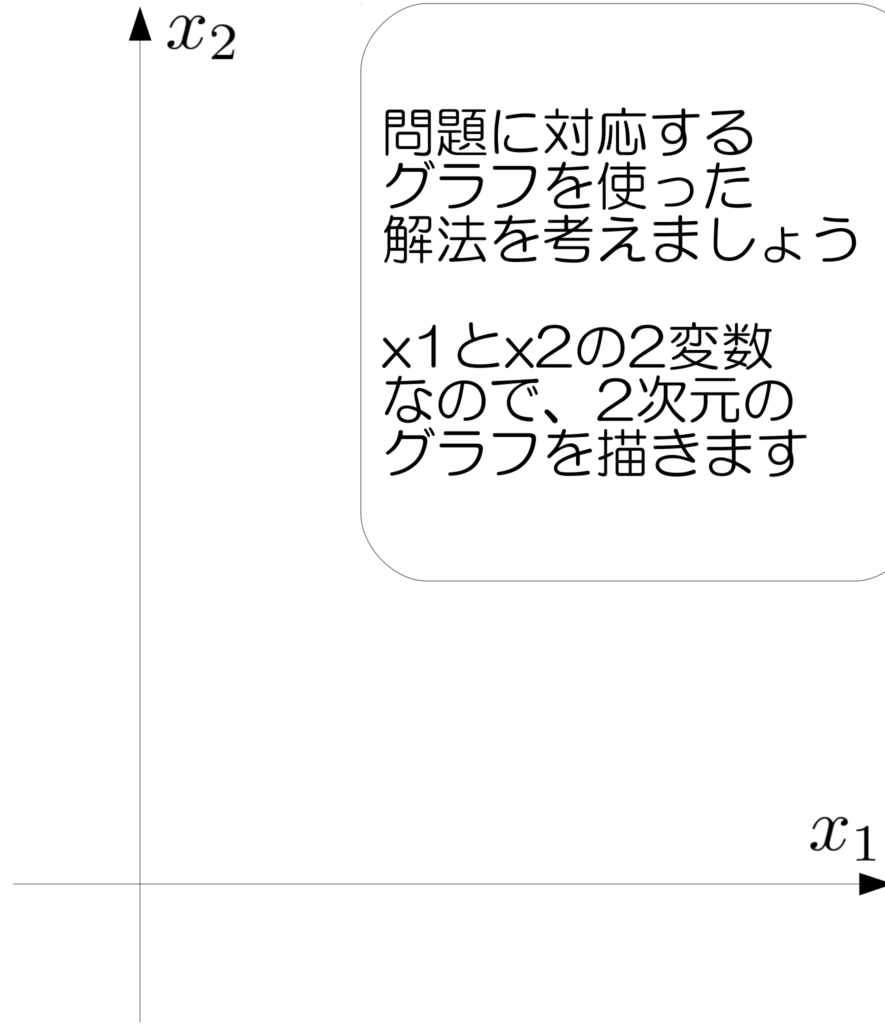
# グラフを利用した解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &\leq 45 \times 10^3 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 40 \times 10^3 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$




問題に対応する
グラフを使った
解法を考えましょう

x1とx2の2変数
なので、2次元の
グラフを描きます

# グラフを利用した解法

maximize

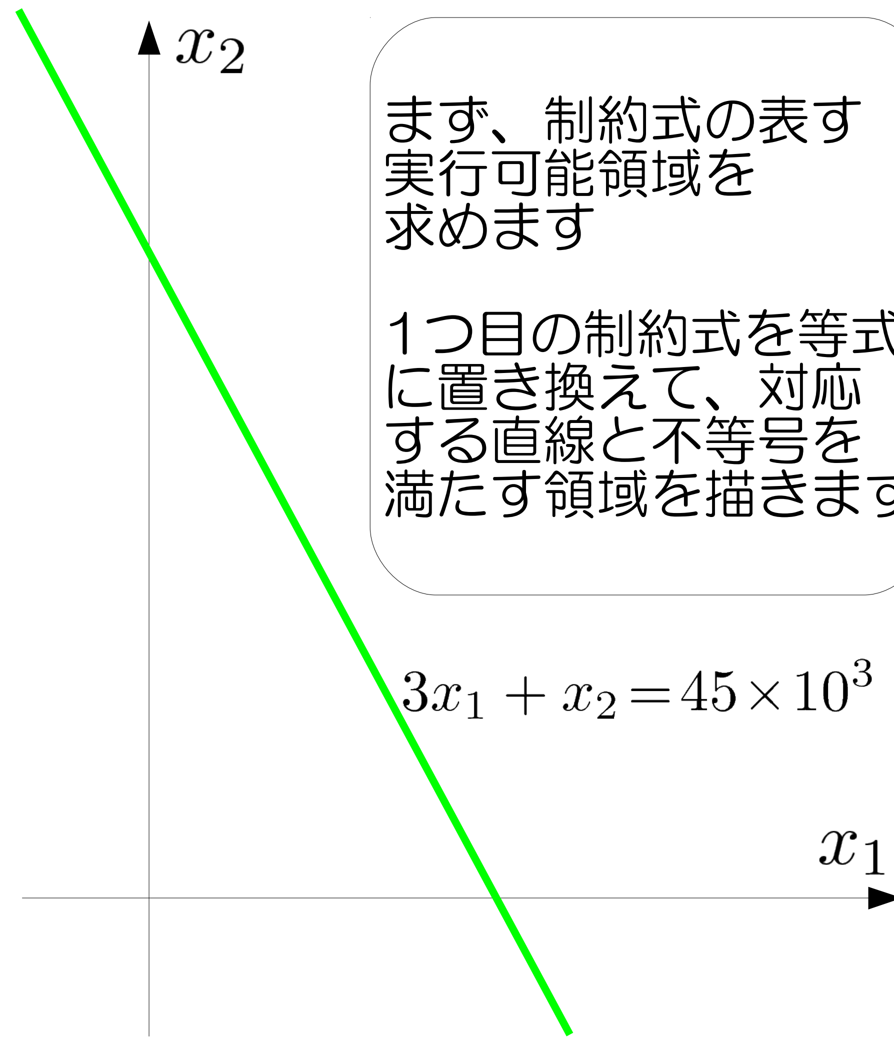
$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$\boxed{3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3}$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

制約式に対応する方程式

$$3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$$




まず、制約式の表す
実行可能領域を
求めます

1つ目の制約式を等式
に置き換えて、対応
する直線と不等号を
満たす領域を描きます

# グラフを利用した解法

maximize

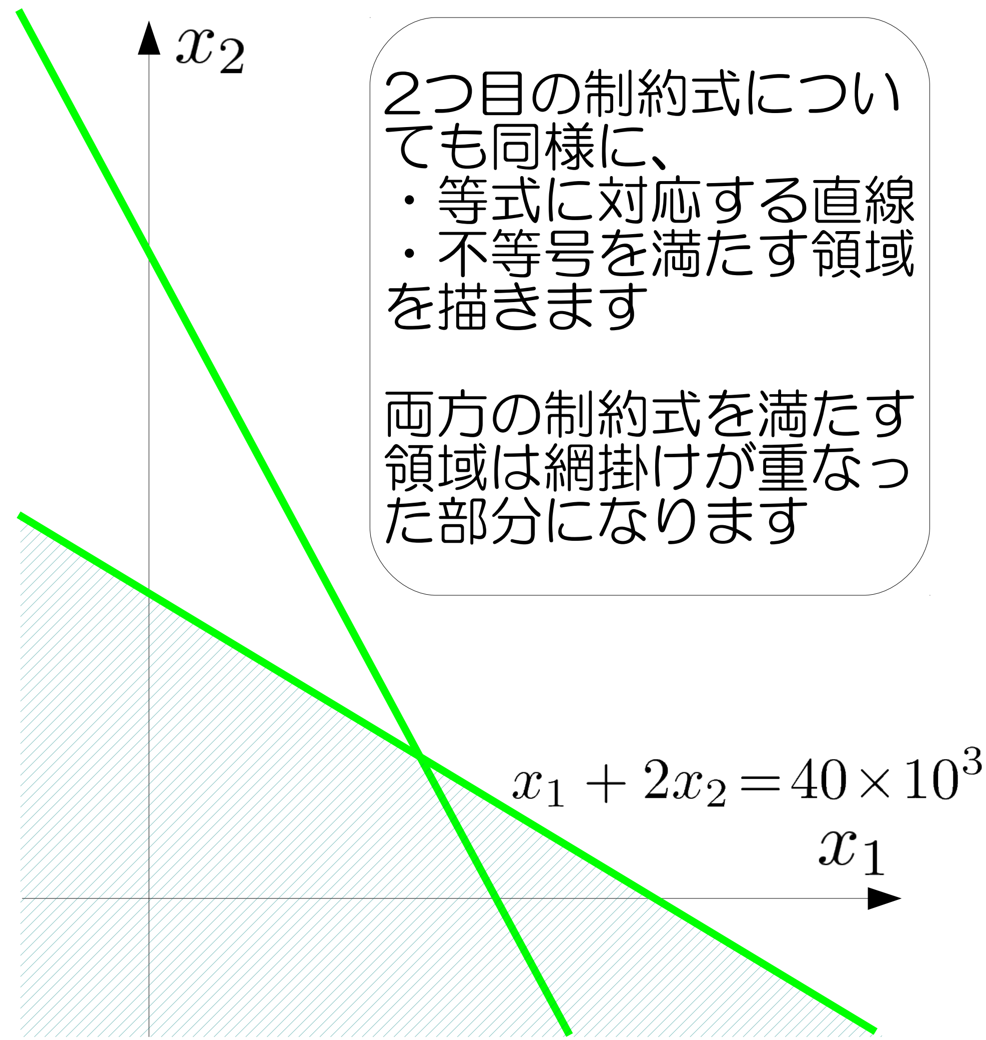
$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$
$$\boxed{x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3}$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

制約式に対応する方程式

$$3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$$




2つ目の制約式についても同様に、
・等式に対応する直線
・不等号を満たす領域
を描きます

両方の制約式を満たす領域は網掛けが重なった部分になります

# グラフを利用した解法

maximize

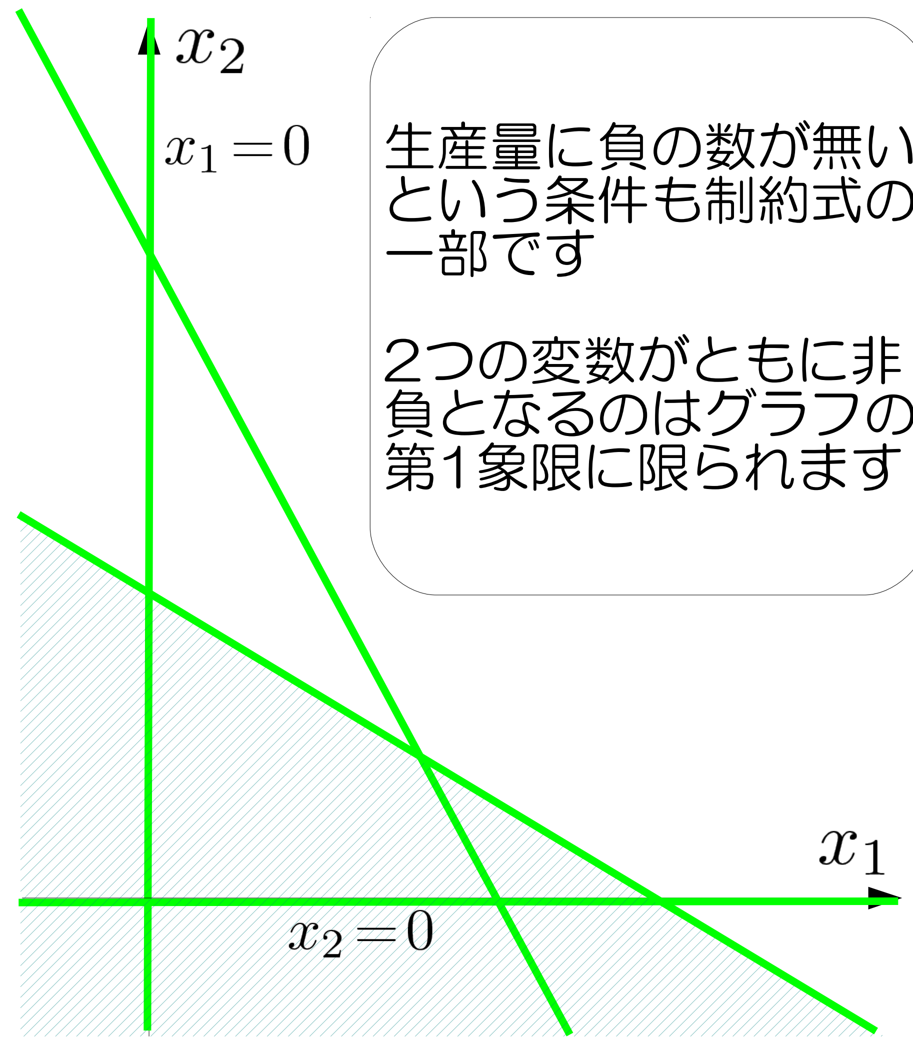
$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$
$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}}$$

制約式に対応する方程式

$$3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$




生産量に負の数が無いという条件も制約式の一部です

2つの変数がともに非負となるのはグラフの第1象限に限られます

# グラフを利用した解法

maximize

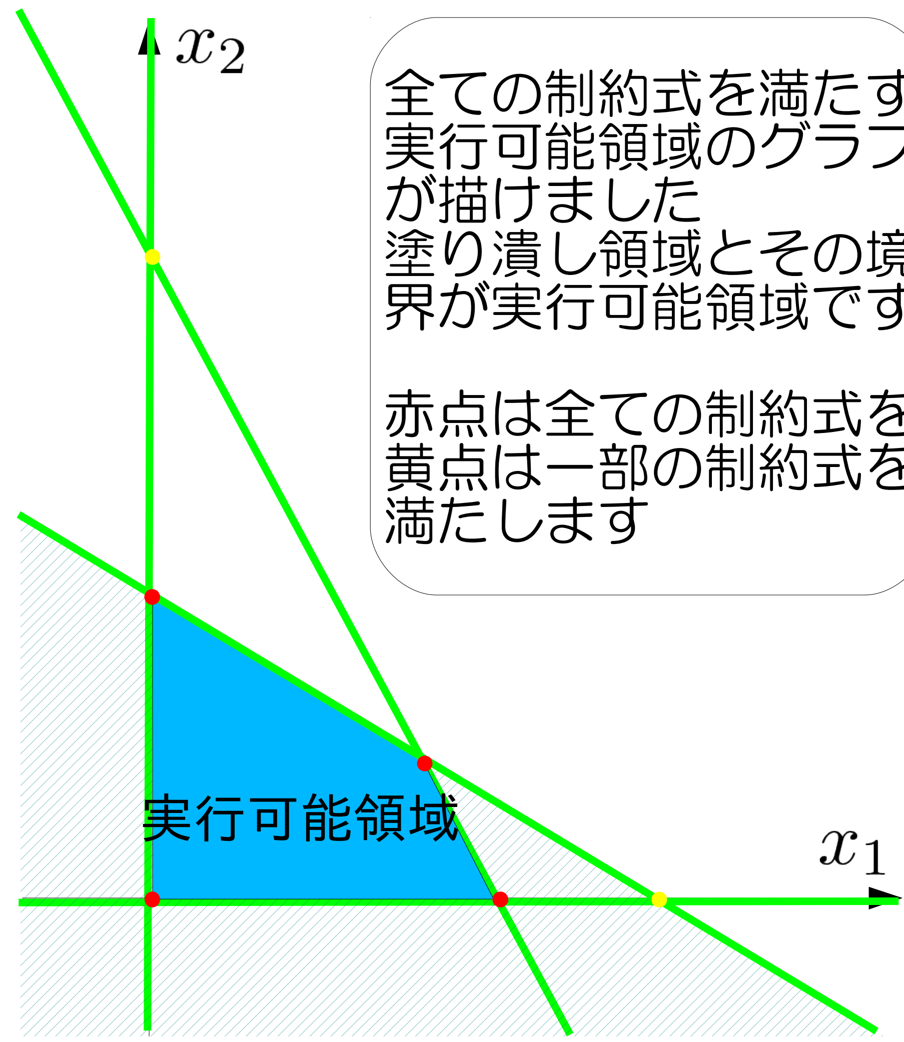
$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

制約式に対応する方程式

$$3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$




全ての制約式を満たす
実行可能領域のグラフ
が描けました
塗り潰し領域とその境
界が実行可能領域です

赤点は全ての制約式を
黄点は一部の制約式を
満たします

# グラフを利用した解法

maximize

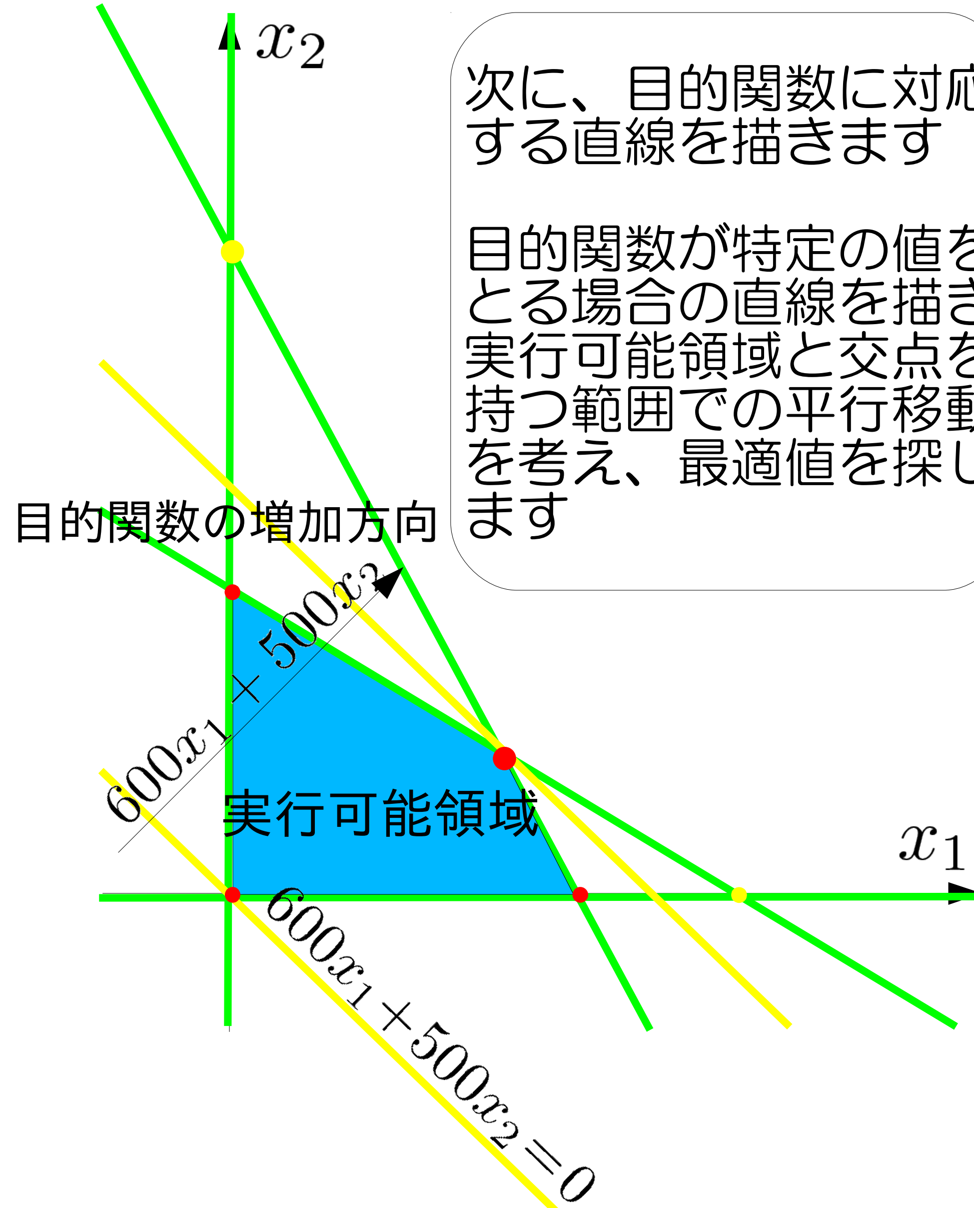
$$\boxed{600x_1 + 500x_2}$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

制約式に対応する方程式

$$3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$




次に、目的関数に対応する直線を描きます

目的関数が特定の値をとる場合の直線を描き実行可能領域と交点を持つ範囲での平行移動を考え、最適値を探します

# グラフを利用した解法

maximize

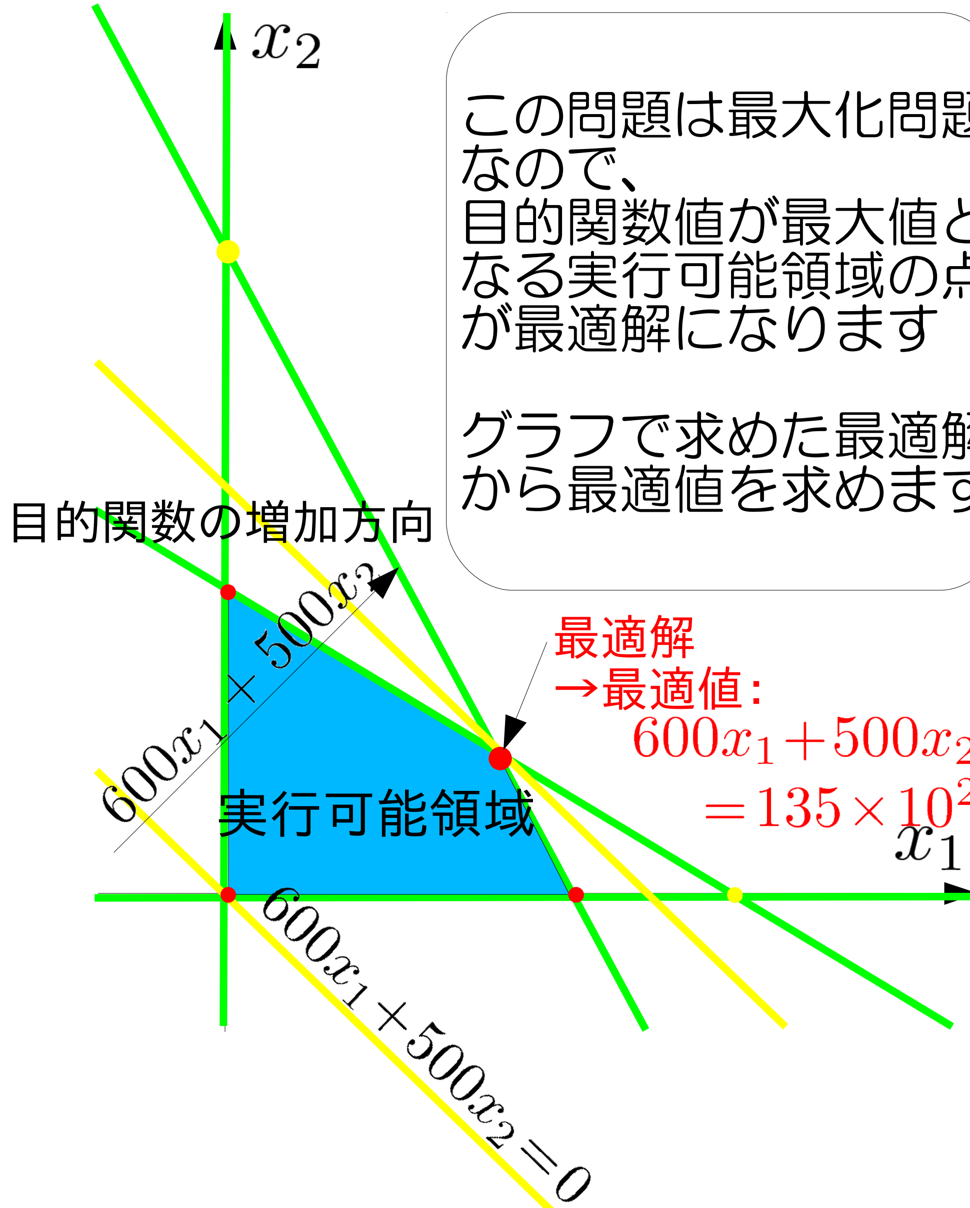
$$\boxed{600x_1 + 500x_2}$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

制約式に対応する方程式

$$3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$




この問題は最大化問題なので、
目的関数値が最大値となる実行可能領域の点が最適解になります

グラフで求めた最適解から最適値を求めます

# グラフを利用した解法

maximize

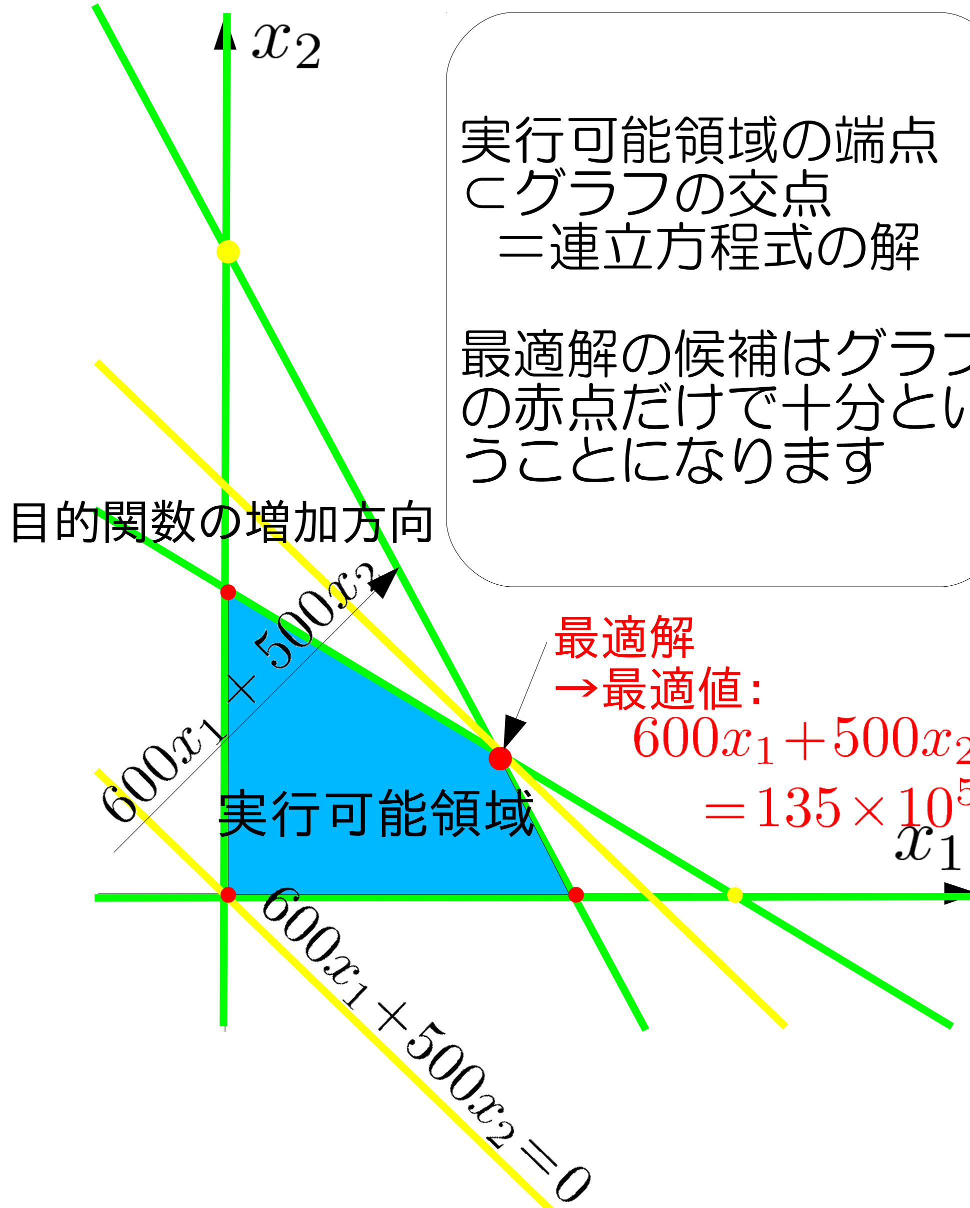
$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &\leq 45 \times 10^3 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 40 \times 10^3 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

制約式に対応する方程式

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45 \times 10^3 \\ x_1 + 2x_2 &= 40 \times 10^3 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$




実行可能領域の端点
⊂グラフの交点
＝連立方程式の解

最適解の候補はグラフの赤点だけで十分ということになります

# グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &\leq 45 \times 10^3 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 40 \times 10^3 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

制約式に対応する方程式

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45 \times 10^3 \\ x_1 + 2x_2 &= 40 \times 10^3 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

最適解が必ずグラフの交点に含まれるなら、

**グラフの交点**
**＝連立方程式の解**

だけを調べれば十分だということになります

# グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$600x_1$

subject to

$3x_1 + 1x$

$x_1 + 2x$

全ての交点を調べるために方程式に番号を振って交点を求める組合せを書き出します

2変数/4制約式なので2つずつ組合せて

$_4C_2$=6通り

の組合せ＝交点となります

| 方程式 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ①② | | | | |
| ①③ | | | | |
| ①④ | | | | |
| ②③ | | | | |
| ②④ | | | | |
| ③④ | | | | |

制約式に対応する方程式

① $3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$

② $x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$

③ $x_1 = 0$

④ $x_2 = 0$

# グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

| 方程式 | $x_1$ ($\times 10^3$) | $x_2$ ($\times 10^3$) | 実行可能? |
|---|---|---|---|
| ①② | 10 | 15 | ○ |
| ①③ | 0 | 45 | × |
| ①④ | 15 | 0 | ○ |
| ②③ | 0 | 20 | ○ |
| ②④ | 40 | 0 | × |
| ③④ | 0 | 0 | ○ |

制約式に対応する方程式

① $3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$
② $x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$
③ $x_1 = 0$
④ $x_2 = 0$

組合せた方程式をそれぞれ解いて全ての交点を求めます

交点の値を制約式に代入して全ての制約式を満たすかどうかを交点毎に調べます

# グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &\leq 45 \times 10^3 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 40 \times 10^3 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

| 方程式 | $x_1$ | $x_2$ $(\times 10^3)$ | 目的関数値 | 実行可能? |
|---|---|---|---|---|
| ①② | 10 | 15 | 13500000 | ○ |
| ①③ | 0 | 45 | | × |
| ①④ | 15 | 0 | 9000000 | ○ |
| ②③ | 0 | 20 | 10000000 | ○ |
| ②④ | 40 | 0 | | × |
| ③④ | 0 | 0 | 0 | ○ |

制約式に対応する方程式

① $3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$
② $x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$
③ $x_1 = 0$
④ $x_2 = 0$

全ての制約式を満たす交点だけを調べれば良いので実行可能な交点の目的関数値を求めます
グラフを使う方法の赤点だけを調べることになります

目的関数値を比較して最適解・最適値を見つけます

# グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

制約式に対応する方程式

① $3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$

② $x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$

③ $x_1 = 0$

④ $x_2 = 0$

| 方程式 | $x_1$ $(\times 10^3)$ | $x_2$ | 目的関数値 | 実行可能? |
|---|---|---|---|---|
| ①② | 10 | 15 | 13500000 | ○ |
| ①③ | 0 | 45 | | × |
| ①④ | 15 | 0 | 9000000 | ○ |
| ②③ | 0 | 20 | 10000000 | ○ |
| ②④ | 40 | 0 | | × |
| ③④ | 0 | 0 | 0 | ○ |

1. 制約式に対応する方程式と交点を定める方程式の組合せを全て書き出す
2. 交点を求め実行可能領域にあることを確認する
3. 実行可能な交点で目的関数値を求めたなかから最適値を探す

## 線形計画問題の素朴な解法

### グラフを用いた解法

- 2〜3変数までの問題に適用可能
  3変数の問題ではグラフは3次元
  実行可能領域は多面体
  現実社会の問題は数十〜数百万変数
- 計算機アルゴリズムとして構成し難い

### 交点を総当たりする解法

- 多変数の問題に適用可能
  n変数の問題でn元連立方程式を問いて交点を求める
  機械的に交点を計算するアルゴリズムが考えられる
- 交点の実行可能性を調べる手間がある
- 変数が増えると無駄な交点計算が増える

次回：線形計画問題の標準形
次々回：単体法

# 演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

| 原材料 | 珈琲飲料(100g中) | 珈琲牛乳(100g中) | 最大供給量 |
|---|---|---|---|
| 珈琲原液 | 15g | 11g | 1650kg/日 |
| ミルク | 10g | 14g | 1400kg/日 |
| ガムシロップ | 9g | 20g | 1800kg/日 |
| 利益 | 5円 | 4円 | |

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の1日当り生産量は？

上記の最適化問題について、
課題1： maximize ... subject to ... の形式で
　線形計画問題を表現しなさい。

課題2：グラフを用いる解法・交点を総当たりする解法
　で最適解を求めなさい。

課題3：授業の感想・意見があれば書いてください。