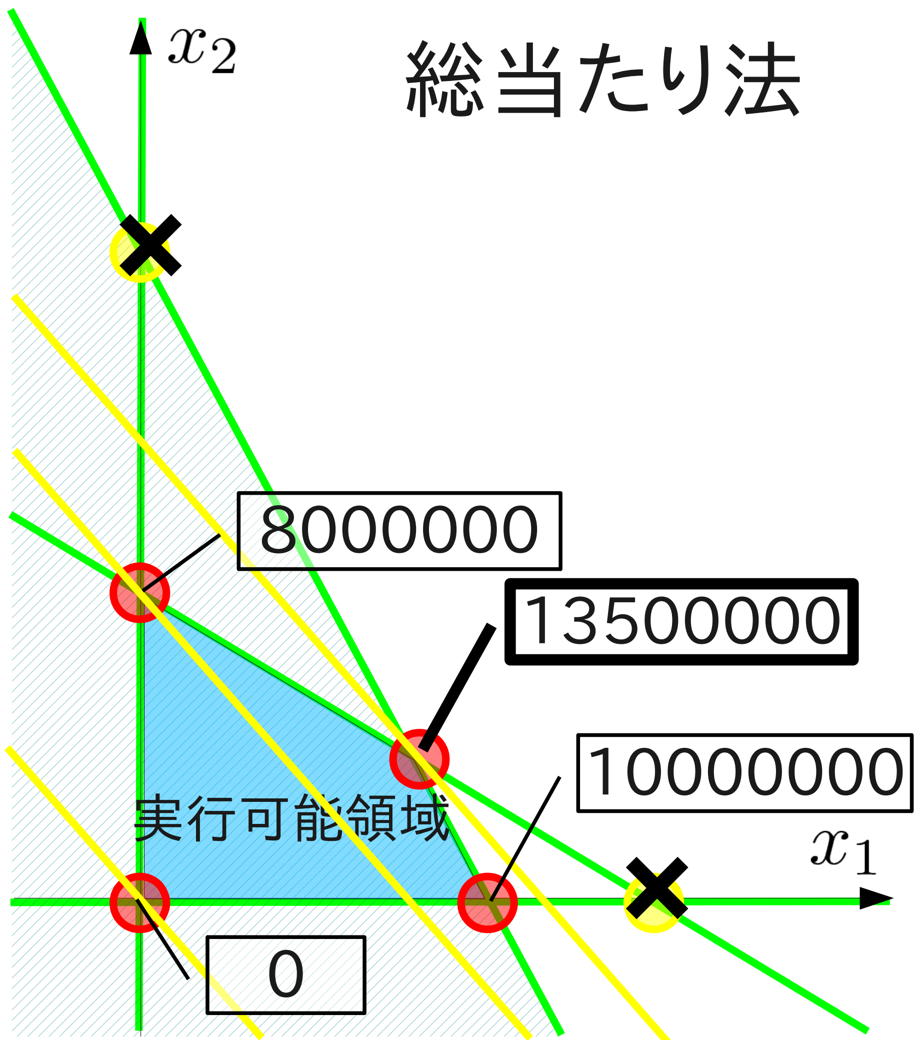
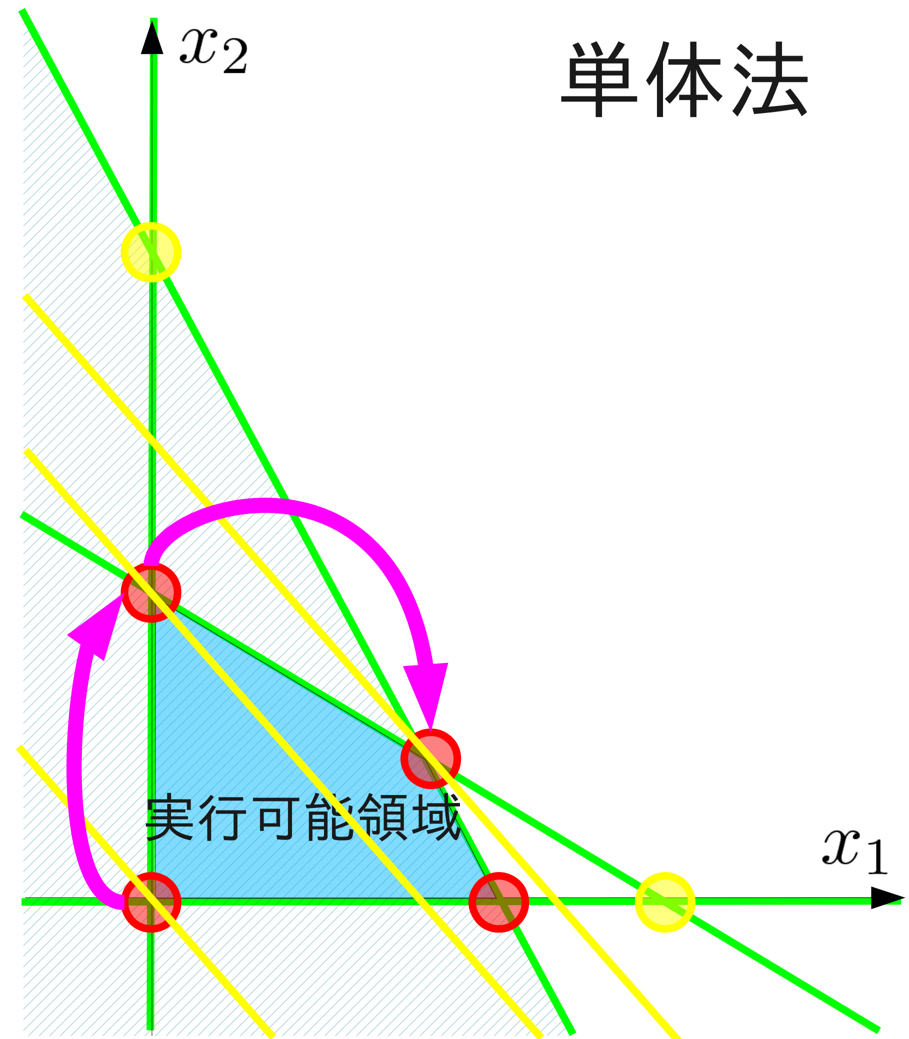
数理計画法

第4回：単体法の実践

復習:単体法



x_2
総当たり法
8000000
13500000
10000000
実行可能領域
x_1
0



x_2
単体法
実行可能領域
x_1

復習:演習問題

コーヒードリンクの生産に必要な原料とその利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

最大の利益を与えるコーヒードリンクの生産量は?

1. 課題1 (simplex表にもとづく)単体法を用いて最適解を求めなさい
2. グラフを描き、1で辿った端点の経路を示しなさい

コーヒードリンクの生産に必要な原料とその利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

変数の定義を決める

$x_1 \times 100[\mathrm{g}]$　$x_2 \times 100[\mathrm{g}]$　珈琲飲料、珈琲牛乳の生産量

問題に対応する標準形を書き出す

線形計画問題

```
maximize
```

$$5x_1 + 4x_2$$

```
subjecto to
```

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 &\le 1650000 \\ 10x_1 + 14x_2 &\le 1400000 \\ 9x_1 + 20x_2 &\le 1800000 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

等式標準形

```
minimize
```

$$z = -5x_1 - 4x_2$$

```
subjecto to
```

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650000 \\ 10x_1 + 14x_2 + x_4 &= 1400000 \\ 9x_1 + 20x_2 + x_5 &= 1800000 \\ z + 5x_1 + 4x_2 &= 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

等式標準形

minimize

$$z = -5x_1 - 4x_2$$

subjecto to

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650000 \\ 10x_1 + 14x_2 + x_4 &= 1400000 \\ 9x_1 + 20x_2 + x_5 &= 1800000 \\ z + 5x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

等式標準形をもとにして、最初の simplex 表を作る

Z	X1	X2	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

simplex表の操作により単体法を実行する。

基底変数 基底変数 基底変数 基底変数

Z	X1	X2	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

係数が1になっている変数のうち、目的関数と合せて制約条件と同数の変数を基底変数とする。今回の例では、

後から追加した x_3, x_4, x_5

simplex表の操作により単体法を実行する。

基底変数 非基底変数 非基底変数 基底変数 基底変数 基底変数

Z	X1	X2	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

基底変数ではない変数が
非基底変数になる、
今回の例では、

元々の変数 x_1, x_2

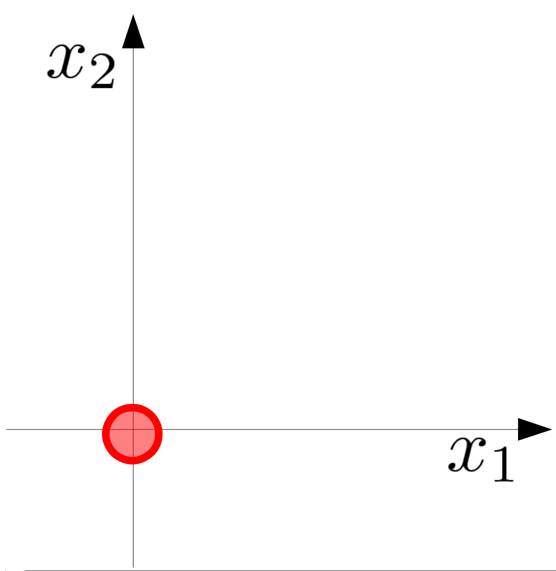
simplex表の操作により単体法を実行する。

Z　基	X1　非	X2　非	X3　基	X4　基	X5　基	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

基底変数・非基底変数の区別を判り易く示す。
どちらか片方だけでも十分。

simplex表の操作により単体法を実行する。

Z　基	X1　非	X2　非	X3　基	X4　基	X5　基	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	



$$
\begin{aligned}
15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650000 \\
10x_1 + 14x_2 + x_4 &= 1400000 \\
9x_1 + 20x_2 + x_5 &= 1800000 \\
z + 5x_1 + 4x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
(z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 16500000, 1400000, 1800000)
$$

非基底変数はゼロ、残りの変数は非負でなければならない。今回はOK

基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1　非	X2　非	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

非基底変数にだけシルシを付ける。
実際の作業では、これが最初の段階になる。
以降、基底変数⇔非基底変数の交換を進める。

基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1　非	X2　非	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

1.交換により目的関数が改善（減少）する。

$$z = 0 \rightarrow z + 5x_1 = 0 \text{ or } z + 4x_2 = 0$$

- 係数が正ならば目的関数は改善(減少)する。

まず、非基底変数の中から基底変数に換えるものを決める。
入れ換えで目的関数が改善するものを選ばなくてはならない、
例では x_1, x_2 を基底変数とした場合の目的関数値を考える。
目的関数の定義式より係数が正の変数を選べば良い。

基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

1.交換により目的関数が改善（減少）する。

$$z = 0 \rightarrow z + 5x_1 = 0 \text{ or } z + 4x_2 = 0$$

- 係数が正ならば目的関数は改善(減少)する。

今回は x_1, x_2 のいずれとも係数が正なので、どちらでもOK。
とりあえず、目的関数が速く減るように大きい方を選ぶこと
にして、x_1 の方を非基底変数→基底変数とする。

基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	$/15 = 110000$
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

次に、x_1 との交換の相手を基底変数の x_3, x_4, x_5 から見つける。
交換後に全ての変数が非負条件を満たすものを選ぶ。
例えば、x_3 が非基底変数になると現れる等式を考える。

2.交換後も非負条件を満す。

$$x_3 = 1650000 \to 15x_1 = 1650000$$

- 定数項を係数で割り最大増加量を求める。
- 最小の最大増加量を与える非基底変数を選ぶ。

基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	$/15 = 110000$
	10	14		1		1400000	$/10 = 140000$
	9	20			1	1800000	$/9 = 200000$
1	5	4				0	

同様に $x_3,\ x_4,\ x_5$ 非基底変数となった場合を考え、x_1の増加量を比較して、最小の増加量を与える交換を採用する。

2.交換後も非負条件を満す。

$$x_3 = 1650000 \rightarrow 15x_1 = 1650000$$

- 定数項を係数で割り最大増加量を求める。
- 最小の最大増加量を与える非基底変数を選ぶ。

基底変数と非基底変数の交換候補を決める

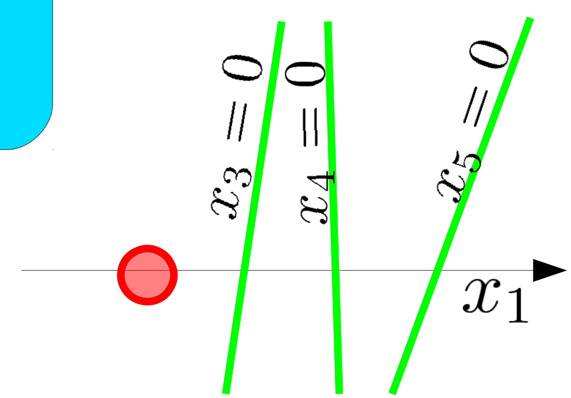
Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	$/15 = 110000$
	10	14		1		1400000	$/10 = 140000$
	9	20			1	1800000	$/9 = 200000$
1	5	4				0	

最小の増加量を与える交換により、新しい
交点が実行可能領域外に出ないようにする

2.交換後も非負条件を満す。

$$x_3 = 1650000 \rightarrow 15x_1 = 1650000$$

- 定数項を係数で割り最大増加量を求める。
- 最小の最大増加量を与える非基底変数を選ぶ。



基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	$/15 = 110000$
	10	14		1		1400000	$/10 = 140000$
	9	20			1	1800000	$/9 = 200000$
1	5	4				0	

ここまでの作業でsimplex表は上のようになる。
この状態に対応する連立方程式は

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650000 \\ 10x_1 + 14x_2 + x_4 &= 1400000 \\ 9x_1 + 20x_2 + x_5 &= 1800000 \\ z + 5x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

なので、これを解く必要がある。

交換後の連立方程式を解く

$\times \frac{1}{15}$

Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
	~~15~~ 1	~~11~~ 11/15	~~1~~ 1/15			~~1650000~~ 110000	/15 = 110000
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

基底変数に関する連立

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 110000 \\
\cancel{15x_1} &\cancel{= 1650000} \\
10x_1 + x_4 &= 1400000 \\
9x_1 + x_5 &= 1800000 \\
z + 5x_1 &= 0
\end{aligned}
$$

新たに基底変数となり、ゼロから正に値の変わる x_1 の値を求めるために、x_1 の係数で両辺を割る

simplex表では、対応する段の係数を全て割る

交換後の連立方程式を解く

	Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
$\times\frac{1}{15}$		~~15~~ → 1	~~11~~ → 11/15	~~1~~ → 1/15			~~1650000~~ → 110000	/15 = 110000
$-\times 10$		~~10~~ → 0	~~14~~ → 20/3	−2/3	1		~~1400000~~ → 300000	/10 = 140000
$-\times 9$		~~9~~ → 0	~~20~~ → 67/5	−3/5		1	~~1800000~~ → 810000	/9 = 200000
$-\times 5$	1	~~5~~ → 0	~~4~~ → 1/3	−1/3			~~0~~ → −550000	

基底変数に関する連立方程式を解き基本解を得る

$$\boxed{x_4 = 300000}$$
$$\boxed{x_5 = 810000}$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 110000 \\
\cancel{10x_1 + x_4} &\cancel{= 1400000} \\
\cancel{9x_1 + x_5} &\cancel{= 1800000} \\
z + 5x_1 &= 0 \\
\boxed{z} &\boxed{= -550000}
\end{aligned}
$$

前段で得た関係式

$x_1+(11/15)x_2+(11/15)x_3=110000$

を使って他の方程式から x_1 を消去する

交換後の連立方程式を解く

	Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
$\times\frac{1}{15}$		~~15~~ 1	~~11~~ 11/15	~~1~~ 1/15			~~1650000~~ 110000	/15 = 110000
$-\times 10$		~~10~~ 0	~~14~~ 20/3	−2/3	1		~~1400000~~ 300000	/10 = 140000
$-\times 9$		~~9~~ 0	~~20~~ 67/5	−3/5		1	~~1800000~~ 810000	/9 = 200000
$-\times 5$	1	~~5~~ 0	~~4~~ 1/3	−1/3			~~0~~ −550000	

基底変数に関する連立方程式を解き基本解を得る

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad + 11x_2 + x_3 &= 110000 \\
+ 14x_2 \quad\quad x_4 &= 300000 \\
+ 20x_2 \quad\quad x_5 &= 810000 \\
z \quad + 4x_2 \quad\quad &= -550000
\end{aligned}
$$

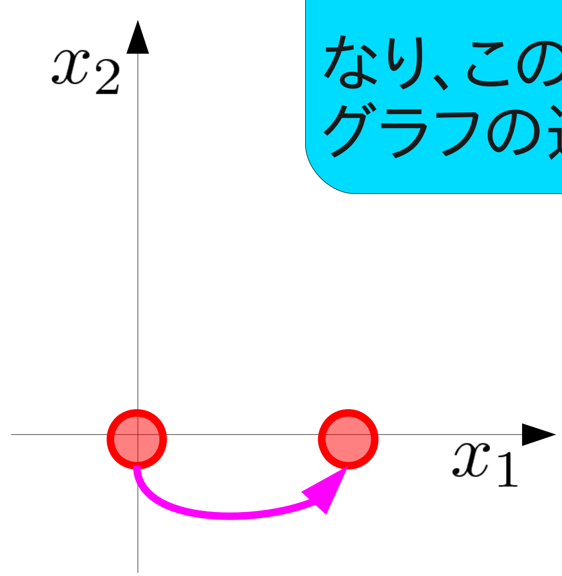
$$(z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-550000, 110000, 0, 0, 300000, 810000)$$

simplex表の定数欄に現われた基本解は非負条件を満たす

交換後の連立方程式を解く

	Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
$\times\frac{1}{15}$		~~15~~ 1	~~11~~ $11/15$	~~1~~ $1/15$			~~1650000~~ 110000	$/15 =$ 110000
$-\times 10$		~~10~~ 0	~~14~~ $20/3$	$-2/3$	1		~~1400000~~ 300000	$/10 =$ 140000
$-\times 9$		~~9~~ 0	~~20~~ $67/5$	$-3/5$		1	~~1800000~~ 810000	$/9 =$ 200000
$-\times 5$	1	~~5~~ 0	~~4~~ $1/3$	$-1/3$			~~0~~ -550000	

ここまでの作業で、simplex表は上のようになり、このときまでの基本解の移動は左下のグラフの通り



$$(z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$
$$= (-550000, 110000, 0, 0, 300000, 810000)$$

表を更新する

	Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
$\times\frac{1}{15}$		$\cancel{15}$ 1	$\cancel{11}$ $11/15$	$\cancel{1}$ $1/15$			$\cancel{1650000}$ 110000	$/15 = 110000$
$-\times 10$		$\cancel{10}$ 0	$\cancel{14}$ $20/3$	$-2/3$	1		$\cancel{1400000}$ 300000	$/10 = 140000$
$-\times 9$		$\cancel{9}$ 0	$\cancel{20}$ $67/5$	$-3/5$		1	$\cancel{1800000}$ 810000	$/9 = 200000$
$-\times 5$	1	$\cancel{5}$ 0	$\cancel{4}$ $1/3$	$-1/3$			$\cancel{0}$ -550000	

新しい表に書き写して作業を進める。そのまま上書きでも可。

Z	X1	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
	1	11/15	1/15			110000	
		20/3	-2/3	1		300000	
		67/5	-3/5		1	810000	
1		1/3	-1/3			-550000	

新しい表で基底変数･非基底変数の交換を続ける

Z	X1	X2 ~~非~~	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
	1	11/15	1/15			110000	$/(11/15) = 150000$
		20/3	-2/3	1		300000	$/(20/3) = 45000$
		67/5	-3/5		1	810000	$/(67/5) = 60447.\cdots$
1		1/3	-1/3			-550000	

非基底変数のうち、目的関数の定義式で係数が正のものを選び、基底変数に換える

今回の例では、x_2

目的関数の定義式以外の定数項をその式での x_2 の係数で割り、結果を最大増加量の欄に記す。

新しい表で基底変数･非基底変数の交換を続ける

Z	X1	X2 ~~非~~	X3 非	X4 非	X5	定数	最大増加量
	1	11/15	1/15			110000	$/(11/15) = 150000$
		20/3	-2/3	1		300000	$/(20/3) = 45000$
		67/5	-3/5		1	810000	$/(67/5) = 60447.\cdots$
1		1/3	-1/3			-550000	

最小の増加量 45000 を与える交換を選ぶと、

非基底変数になるのは x_4 となる

新しい表で基底変数･非基底変数の交換を続ける

$\times \frac{3}{20}$

Z	X1	X2 ~~非~~	X3 非	X4 非	X5	定数	最大増加量
	1	11/15	1/15			110000	
		~~20/3~~ 1	~~2/3~~ $-1/10$	~~1~~ $3/20$		~~300000~~ 45000	
		67/5	-3/5		1	810000	
1		1/3	-1/3			-550000	

x_2 と x_4 の交換で現われた連立方程式を解く。新しい基底変数の値を定めるために2段目の式を x_2 の係数$(20/3)$で割る。

新しい表で基底変数･非基底変数の交換を続ける

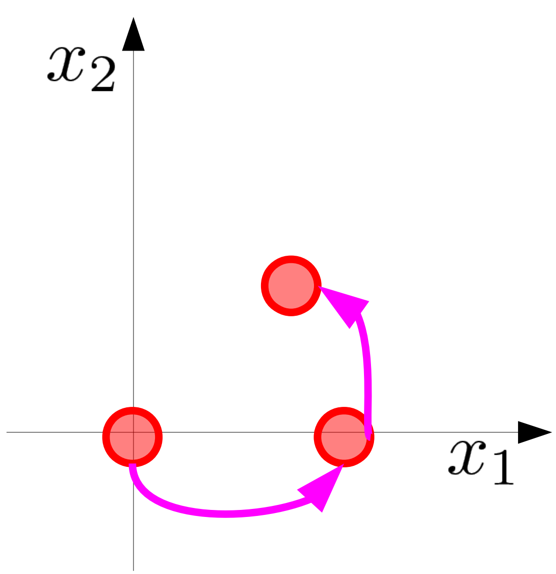
	Z	X1	X2 ~~非~~	X3 非	X4 非	X5	定数	最大増加量
$-\times\frac{11}{15}$		1	~~11/15~~ 0	~~1/15~~ 7/50	$-\frac{11}{100}$		~~110000~~ 77000	
$\times\frac{3}{20}$			~~20/3~~ 1	~~2/3~~ $-1/10$	~~1~~ 3/20		~~300000~~ 45000	
$-\times\frac{67}{5}$			~~67/5~~ 0	~~-3/5~~ $-37/50$	$-\frac{201}{100}$	1	~~810000~~ 207000	
$-\times\frac{1}{3}$	1		~~1/3~~ 0	~~-1/3~~ $-9/30$	$-\frac{1}{20}$		~~-550000~~ -565000	

x_2 について得た関係式を使って、他の段から x_2 を消去すると、連立方程式の解が定数欄に現われる。

新しい表で基底変数・非基底変数の交換を続ける

	Z	X1	X2 ~~非~~	X3 非	X4 非	X5	定数	最大増加量
$-\times\frac{11}{15}$		1	~~11/15~~ 0	~~1/15~~ 7/50	$-\frac{11}{100}$		~~110000~~ 77000	/(11/15) = 150000
$\times\frac{3}{20}$			~~20/3~~ 1	~~2/3~~ −1/10	~~1~~ 3/20		~~300000~~ 45000	/(20/3) = 45000
$-\times\frac{67}{5}$			~~67/5~~ 0	~~-3/5~~ −37/50	$-\frac{201}{100}$	1	~~810000~~ 207000	/(67/5) = 60447.…
$-\times\frac{1}{3}$	1		~~1/3~~ 0	~~-1/3~~ −9/30	$-\frac{1}{20}$		~~-550000~~ −565000	

ここまでの作業でsimplex表は上のようになり、目的関数の定義式に現われる非基底変数の係数は全て負になる。



$$(z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$
$$= (-565000, 77000, 45000, 0, 0, 207000)$$

これ以上改善できないので、この時の基本解が最適解になる。

単体法のまとめ

- 最も基本的な単体法による解法
  1. 等式標準形を作り、係数を用いて simplex表を作る。
  2. slack変数surplus変数から基底変数を選ぶ
  3. 残りの変数を非基底変数とし、以下を繰り返す
     1. 次の条件を満す基底変数・非基底変数の交換を行
        目的関数が改善(減少)する
        交換後に基本解が非負条件を満す
     2. 基底変数の連立方程式を解き基本解を求める
  4. 改善ができなくなったら終了し、その時点の基本解を最適解とする
- 問題点
  - 最初の実行可能解を決める方法が欠けている
  - 最適解ではないのに目的関数が改善されない場合がある
  - 変数選択の候補を限定できない

演習問題4
解答用紙左上に名前･学年･学籍番号を記入

5Lのミックスジュース生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題:利益を最大化するミックスジュースの生産量は?

課題1: simplex 表による単体法を用いて最適解を求めなさい。

課題2: グラフを描き、課題1で辿った端点の経路を示しなさい。

課題3:授業の感想･意見があれば書いてください