復習:単体法の2段解法による初期基本解の決定

制約式だけを見ると、

不等式制約では

maximize
$600x_1 + 500x_2$
subject to
$3x_1 + x_2 \leq 45 \times 10^3$
$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$
$x_1, x_2 \geq 0$

「全変数がゼロ」で制約式を満たすことが判り易い

$\Updownarrow$

連立不等式に自明解=ゼロがあることを判断できる

等式標準形にすると、

minimize
$-600x_1 - 500x_2$
subject to
$3x_1 + x_2 + x_3 = 45 \times 10^3$
$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

ゼロにする変数は x_3, x_4 以外

x_3, x_4;追加した変数?

元から等式だったら?

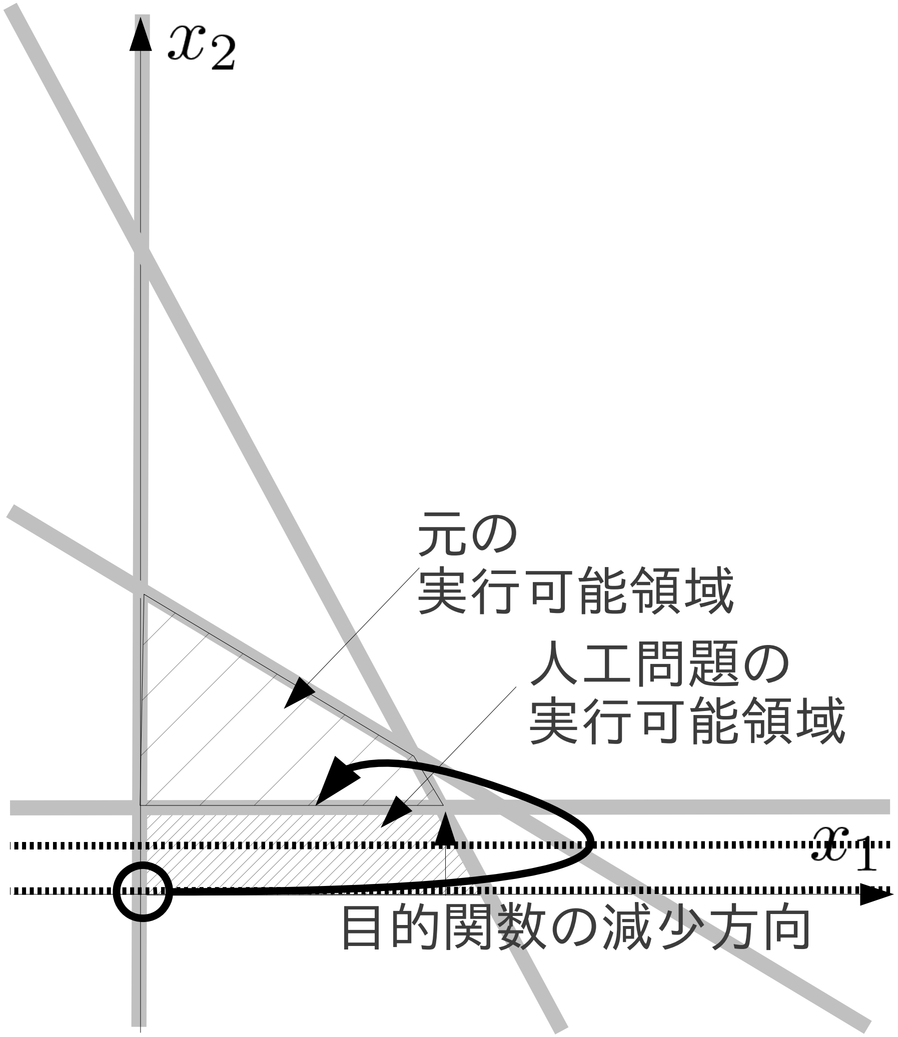
※各式に1つだけの変数

$\Updownarrow$

連立不等式の解が容易に求まるように選択している

復習:単体法の2段解法

2段解法のアイディア



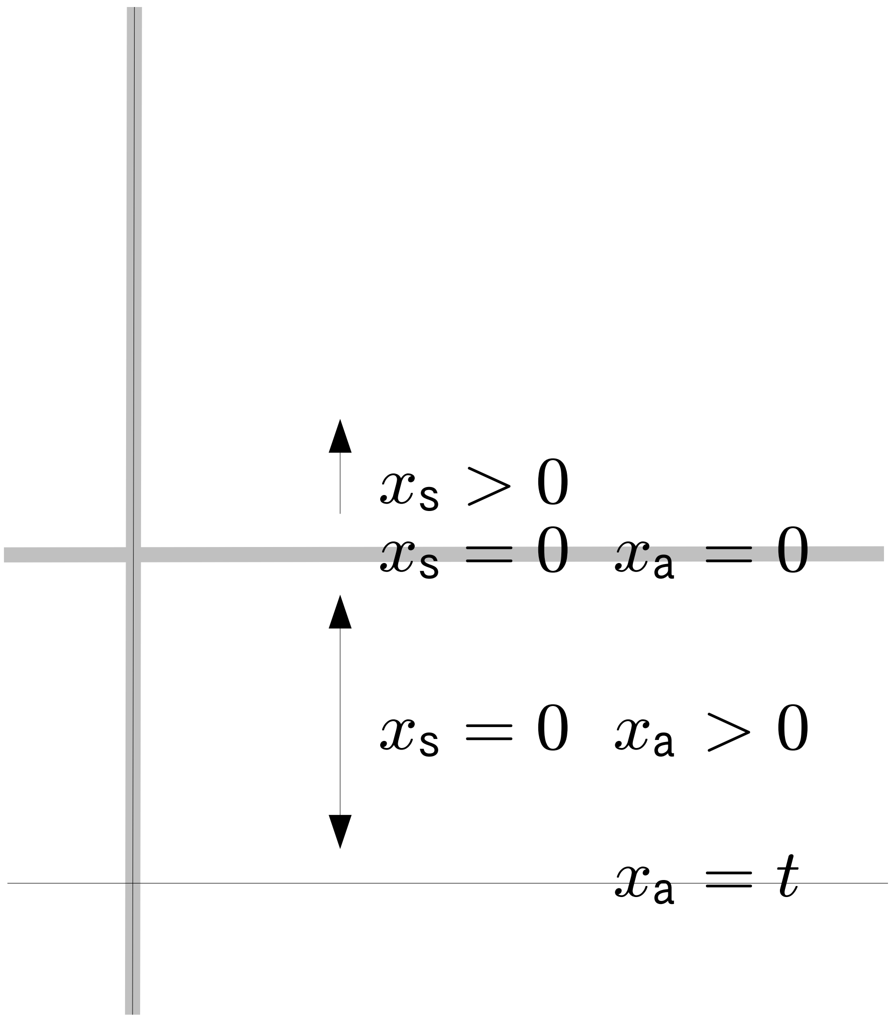
maximize
$600x_1 + 500x_2$
subject to
$3x_1 + x_2 \leq 45 \times 10^3$
$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$
$x_2 \geq 10 \times 10^3$
$x_1, x_2 \geq 0$

0.制約式を変形し、原点が実行可能領域に含まれるようにする

1.元の実行可能領域で最小化される目的関数を定める

2.1と2で作った人工問題を解き、元の問題の端点を求める

復習:単体法の2段解法



原点を実行可能領域外にする制約
＝変数が負orゼロ

例: x_2 - $x_s = t > 0$

$x_2 = 0 \rightarrow x_s = -t < 0$

変数を追加して非負条件を満たす

例: $x_2 - x_s + x_a = t > 0$

$x_2 = 0 \rightarrow x_s = x_a - t$

$\therefore x_a > t > 0 \Rightarrow x_s = x_a - t > 0$

復習:単体法の2段解法

minimize z $\quad \boxed{x_6}$

subject to

$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 + x_3 &= 45 \\
x_1 + 2x_2 + x_4 &= 40 \\
① \quad \boxed{x_2 - x_5} &\boxed{= 10} \\
② \quad \boxed{x_2 - x_5 + x_6 = 10} \\
z + 6x_1 + 5x_2 &= 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

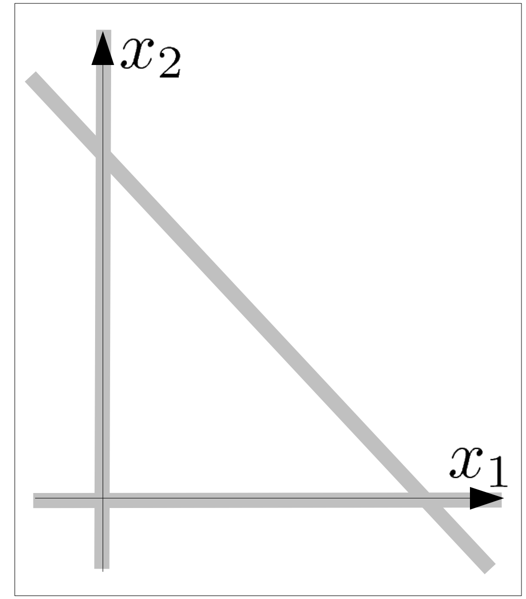
$$\boxed{x_6 \geq 0}$$

1. **<u>基底変数の候補の係数が定数項と異なる符号を持つ</u>**制約式を見つける①
2. 1 の式に人工変数を加え新しい制約式を作る②
3. 人工変数の総和を目的関数とする最小化問題を単体法を用いて解く
4. 3 で得た最適値が0であれば、最適解を元の問題の初期解として採用する

復習:演習問題5

minimize $z = x_1 + 2x_2$

subject to
$$-x_1 - x_2 \geq -1$$
$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



課題1: グラフを描き、原点が実行可能領域ではないことを確認する。

課題2: 2段階 simplex 法の第1段階を用いて実行可能領域の端点を見つける。

復習:演習問題5

等式標準形

minimize z

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 &= 1 \\ z - x_1 - 2x_2 &= 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

人工問題

minimize $z (= x_5)$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 &= 1 \\ z - x_5 &= 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

課題1: グラフを描き、原点が実行可能領域ではないことを確認する。

課題2: 2段階 simplex 法の第1段階を用いて実行可能領域の端点を見つける。

復習:演習問題5

- 人工問題の等式標準形からsimplex 表を準備する

人工問題

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize } z(= x_5) \\
&= -x_1 - x_2 + x_4 + 1 \\
&\text{subject to} \\
&\quad x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
&\quad x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\
&z + x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
&\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

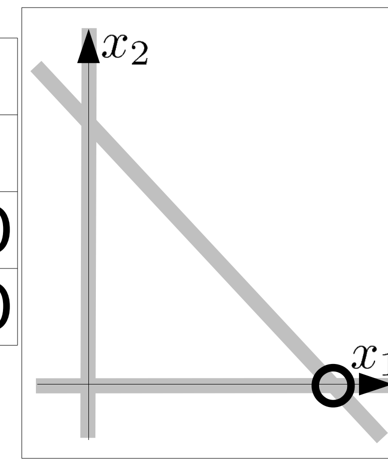
- simplex 表

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数	最大増加量
1	1	1	0	0	1	
1	1	0	−1	1	1	
1	1	0	−1	0	1	

復習:演習問題5

z	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3 非	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	$/1 = 1$
0	1	1	0	-1	1	1	$/1 = 1$
1	1	1	0	-1	0	1	

z	x_1	x_2 非	x_3 非	x_4 非	x_5	定数
0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	-1	-1	1	0
1	0	0	-1	-1	0	0



- 最適解を得る

$$z = 0, x_1 = 1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0$$

- 最適値=0 なので、これを初期解に用いることができる

単体法の2段解法、適用の条件

等式標準形

minimize

$$z = -6x_1 + 6x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ ① \quad -5x_1 + 9x_2 \qquad &= 15 \\ ② \quad -6x_1 + 3x_2 - x_4 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

人工問題の等式標準形

minimize

$$z$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 \ +3x_2+x_3 \qquad &= 6 \\ -5x_1 \ +9x_2 \qquad \boxed{+x_5} &= 15 \\ -6x_1 \ +3x_2-x_4\boxed{+x_6} &= 3 \\ z-11x_1+12x_2-x_4 \qquad &= 18 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

① 係数が1の変数がなく定数項がゼロでない

② x4の係数と定数項で符号が異なる

→「x4を基底変数、それ以外を非基底変数」とすると、非負条件を満たせない。→2段解法を利用する

単体法の2段解法、2段目

- 初期のsimplex表

z	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	x_6	定数	最大増加量
0	2	3	1	0	0	0	6	
0	-5	9	0	0	1	0	15	
0	-6	3	0	-1	0	1	3	
1	-11	12	0	-1	0	0	18	

- 1段目終了時のsimplex表

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4	x_5 非	x_6 非	定数	最大増加量
0	1	0	3/11	0	-1/11	0	3/11	
0	0	0	-13/11	1	8/11	-1	9/11	
0	0	1	5/33	0	0	0	20/11	
1	0	0	0	0	-1	-1	0	

- 人工問題の最適解

$$(z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 3/11, 20/11, 0, 9/11, 0, 0)$$

- 1段目終了後の解法はどう進めるのか？

単体法の2段解法、2段目

- 人工問題の最適解から人工変数を除けば、
  $$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3/11, 20/11, 0, 9/11)$$
  基底変数：x_1, x_2, x_4　　非基底変数：x_3

等式標準形

minimize

$$z = -6x_1 + 6x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 \phantom{{}+x_3} &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

基底変数の連立方程式

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 \phantom{{}-x_4} &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 \phantom{{}-x_4} &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 &= 3 \end{aligned}$$

の解は、人工問題の最適解

$$x_1 = 3/11$$
$$x_2 = 20/11$$
$$x_4 = 9/11$$

- 基底変数をx_1, x_2, x_4 非基底変数を x_3 として、単体法の手順を開始すれば良い

単体法の2段解法、2段目

- 基底変数：x_1, x_2, x_4　　非基底変数：x_3
  元の等式標準形からsimplex表を作る

z	x_1	x_2	x_3　非	x_4	定数	最大増加量
0	2	3	1	0	6	
0	-5	9	0	0	15	
0	-6	3	0	-1	3	
1	6	-6	0	0	0	

- 一度連立方程式を解いて、基本解を得る

z	x_1	x_2	x_3　非	x_4	定数
0	1	0	3/11	0	3/11
0	0	1	5/33	0	20/11
0	0	0	-13/11	1	9/11
1	0	0	-8/11	0	102/11

- (この例では)非基底変数の係数が全て負なので最適解

単体法の2段解法、2段目

- 元の標準形まで戻らなくても、
  人工問題の最終段階の simplex 表を削って

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4	x_5	x_6	定数	最大増加量
0	1	0	3/11	0	-1/11	0	3/11	
0	0	0	-13/11	1	8/11	-1	9/11	
0	0	1	5/33	0	0	0	20/11	
1	0	0	0	0	-1	-1	0	

- 基本解を得ることができる

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4	定数
0	1	0	3/11	0	3/11
0	0	0	-13/11	1	9/11
0	0	1	5/33	0	20/11

- z の行は？

単体法の2段解法、2段目

- 元の標準形まで戻らなくても、
  人工問題の最終段階の simplex 表を削って
  基本解を得ることができる

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4	定数
0	1	0	3/11	0	3/11
0	0	0	-13/11	1	9/11
0	0	1	5/33	0	20/11

- 目的関数値の段は、定義より計算

$$z = -6x_1 + 6x_2 = -6(-\frac{3}{11}x_3 + \frac{3}{11}) + 6(-\frac{5}{33}x_3 + \frac{20}{11})$$
$$= \frac{8}{11}x_3 + \frac{102}{11}$$

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4	定数
1	0	0	-8/11	0	102/11

- 非基底変数の係数が全て負なので最適解

2段階単体法(2stage simplex method)

第1段階:初期基底解を求めるための線形計画問題を解く

・元の問題の等式標準形に以下の操作を施し人工問題を作る。
(1)基底変数候補の係数が正でない制約式に人工変数を加える
(2)人工変数の総和から成る人工目的関数を定める

・人工問題の最適解を単体法を用いて求める

※初期基底変数はsimplex表の目的関数から消去しておく
※最適値が 0 ならば元の問題の初期基本解として利用できる

第2段階:元の問題と同等の線形計画問題を解く

・最終段階のsimplex表から人工変数を取り除き、元の目的関数の定義と併せて元の問題のsimplex表を作り単体法を適用する

※初期基底変数はsimplex表の目的関数から消去しておく
※補助問題のsimplex表に目的関数の行を加えて利用する

演習

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

$$\text{maximize} \quad z = x_1 + 2x_2$$
$$\text{subject to}$$
$$x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$