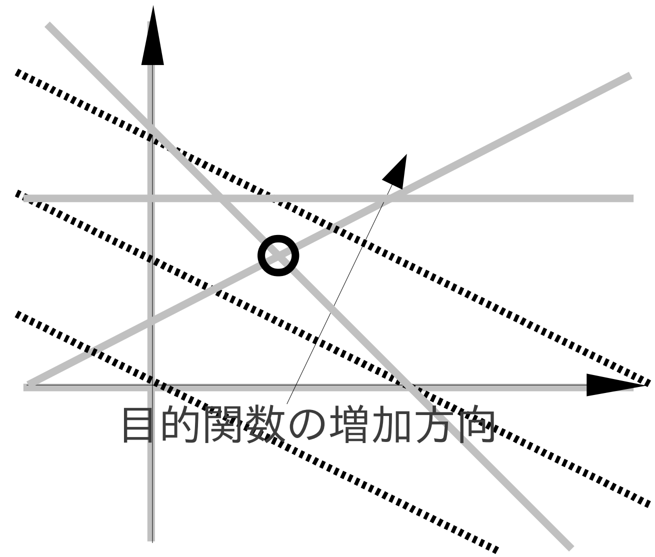
復習：演習問題7

課題：次の線形計画問題を罰則付単体法を用いて解く

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad z(= -x_1 - 2x_2) \\
\text{subject to} \\
\quad x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\
\quad -x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\
\quad x_2 + x_5 = 3 \\
\quad z + x_1 + 2x_2 = 0 \\
\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$



ヒント：

$$
\begin{array}{ll}
\text{min.} & z = -x_1 - 2x_2 \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 \geq 4 \\
 & -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\
 & x_2 \leq 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{min.} & z = -x_1 - 2x_2 \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\
 & -x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\
 & x_2 + x_5 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

復習:2段階単体法と罰則付単体法

- 2段階単体法

まず、z^* を最小化する

$z^*=0$ を得られたら

z を最小化して

元の問題の最適解を得る

$$\text{minimize} \quad z^* \to 0 \Rightarrow \text{minimize} \quad z$$

subject to

$$\begin{array}{llllllllll}
 & x_1 & +x_2 & -x_3 & & & +x_6 & & = 4 \\
 & -x_1 & +2x_2 & & -x_4 & & & +x_7 & = 2 \\
 & & x_2 & & & +x_5 & & & = 3 \\
z & +x_1 & +2x_2 & & & & & & = 0 \\
z^* & & +3x_2 & -x_3 & -x_4 & & & & = 6
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

z,z*	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	定数
	1	1	-1			1		4
	-1	2		-1			1	2
		1			1			3
1	1	2						0
1		3	-1	-1				6

復習:2段階単体法と罰則付単体法

	z,z*	x1 非	x2 ~~非~~	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数	
×-1		1/2 1	-1 1	-1	1/2		1	-1/2	-1 4	/1=4
×1/2		-1/2 ~~-1~~	1 ~~2~~		-1/2 ~~-1~~			1/2 ~~1~~	1 ~~2~~	/2=1
×-1		1/2	-1 1		1/2	1		-1/2	-1 3	/1=3
×-3	1	3/2	-3 3	-1	3/2 -1			-3/2	-3 6	
×-2	1	1 1	-2 2		1			-1	-2 0	

	z,z*	x1 ~~非~~	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数	
×2/3		1 ~~3/2~~	0	-2/3 ~~-1~~	1/3 ~~1/2~~		2/3 ~~1~~	-1/3 ~~-1/2~~	2 ~~3~~	/(3/2)=2
×1/2		1/2 -1/2	1	-1/3	1/6 -1/2		1/3	-1/6 1/2	1 1	/(-1/2)<0
×-1/2		-1/2 1/2	0	1/3	-1/6 1/2	1	-1/3	1/6 -1/2	-1 2	/(1/2)=4
×-3/2	1	-3/2 3/2	0	1 -1	-1/2 1/2		-1	1/2 -3/2	-3 3	
×-2	1	-2 2	0	4/3	-2/3 1		-4/3	2/3 -1	-4 -2	

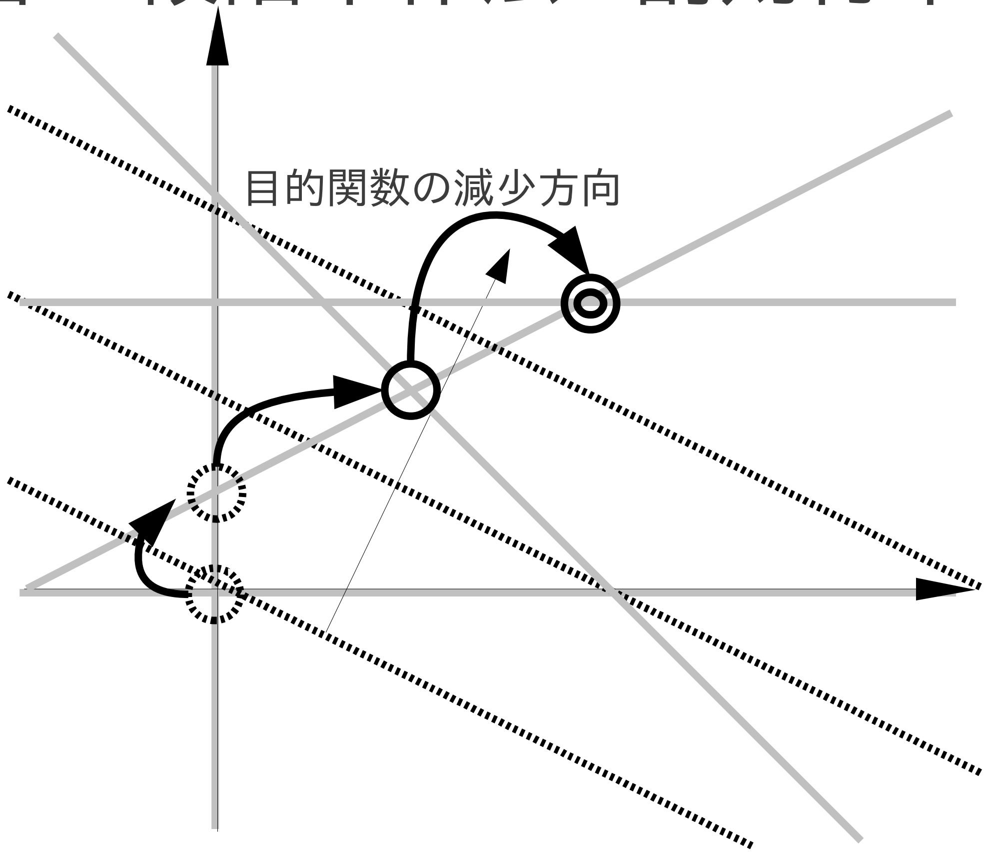
z,z*	x1	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数
	1		-2/3	1/3		2/3	-1/3	2
	0	1	-1/3	-1/3		1/3	1/3	2
	0		1/3	1/3	1	-1/3	-1/3	1
1	0		0	0		-1	-1	0
1	0		4/3	1/3		-4/3	-1/3	-6

x1=2

x2=2

実行可能領域

復習：2段階単体法と罰則付単体法



z,z*	x1	x2	x3	x4　非	x5　非			定数
	1		0	1				4
		1	0		1			3
			1	1	4			3
1			0	-1	-4			-10

x1=4

x2=3

最適解

復習:2段階単体法と罰則付単体法

- 罰則付単体法

十分大きな M により、

$z + Mz^*$ の最小化で、

z^*=0, z の最小化が

同時に実現する

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \;\; \tilde{z} = z + Mz^* \\
\text{subject to} \\
\qquad x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 4 \\
\qquad -x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 2 \\
\qquad x_2 + x_5 = 3 \\
\tilde{z} + x_1 + (3M+2)x_2 - Mx_3 - Mx_4 = 6M \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{array}
$$

z˜	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	定数
	1	1	-1			1		4
	-1	2		-1			1	2
		1			1			3
1	1	3M+2	-M	-M				6M

復習:2段階単体法と罰則付単体法

- 罰則付単体法

十分大きな M により、

$z+Mz^*$ の最小化で、

$z^*=0$, z の最小化が

同時に実現する

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad \tilde{z} = z + Mz^* \\
&\text{subject to} \\
&\quad x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 4 \\
&\quad -x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 2 \\
&\quad x_2 + x_5 = 3 \\
&\tilde{z} + x_1 + (3M+2)x_2 - Mx_3 - Mx_4 = 6M \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{aligned}
$$

z˜	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	定数
	1	1	-1			1		4
	-1	2		-1			1	2
		1			1			3
1	1	302	-100	-100				600

復習：2段階単体法と罰則付単体法

z,z*	x1 非	x2 ~~非~~	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数	
×-1	1/2 1	-1 1	-1	1/2		1	-1/2	-1 4	/1=4
×1/2	-1/2 ~~-1~~	1 ~~2~~		-1/2 ~~-1~~			1/2 ~~1~~	1 ~~2~~	/2=1
×-1	1/2	-1 1		1/2	1		-1/2	-1 3	/1=3
×-302 1	151 1	-302 302	-100	151 -100			-151	-302 600	

z,z*	x1 ~~非~~	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数	
×2/3	1 ~~3/2~~	0	-2/3 ~~-1~~	1/3 ~~1/2~~		2/3 ~~1~~	-1/3 ~~-1/2~~	2 ~~3~~	/(3/2)=2
×1/2	1/2 -1/2	1	-1/3	1/6 -1/2		1/3	-1/6 1/2	1 1	/(-1/2)<0
×-1/2	-1/2 1/2	0	1/3	-1/6 1/2	1	-1/3	1/6 -1/2	-1 2	/(1/2)=4
×-152 1	-152 152	0	-100 304/3	51 -152/3		-304/3	-151 152/3	298 -304	

z,z*	x1	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数	
×2/3	1		2/3 -2/3	2/3 1/3	2	-2/3 2/3	-2/3 -1/3	2 2	
×1/3	0	1	1/3 -1/3	1/3 -1/3	1	-1/3 1/3	-1/3 1/3	1 2	
×3	0		1 ~~1/3~~	1 ~~1/3~~	3 ~~1~~	-1 ~~-1/3~~	-1 ~~-1/3~~	3 ~~1~~	/(1/3)=3
×-4/3 1	0		-4/3 4/3	-4/3 1/3	-4	4/3 -304/3	4/3 -301/3	-4 -6	

z,z*	x1	x2	x3 非	x4	x5 非	x6 非	x7 非	定数
	1		0	1	2	0	-1	4
	0	1	0	0	1	0	0	3
	0		1	1	3	-1	-1	3
1	0		0	-1	-4	-100	-99	-10

x1=4

x2=3

最適解

復習:2段階単体法と罰則付単体法

	z,z*	x1 非	x2 ~~非~~	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数	
×-1		1/2 1	-1 1	-1	1/2		1	-1/2	-1 4	/1=4
×1/2		-1/2 ~~-1~~	1 ~~2~~		-1/2 ~~-1~~			1/2 ~~1~~	1 ~~2~~	/2=1
×-1		1/2	-1 1		1/2	1		-1/2	-1 3	/1=3
×-3M+2	1	3M/2 -1	-3M +2 3M -1	-M	3M/2 -1 -M			-3M/2 +1	-3M +2 6M	

- 非常に大きい数 M を記号で残した場合、
  - シンプレックス表には M の係数と定数の両方を記録しなければならない
  - 連立方程式の解法では M の係数と定数の両方を掃き出さなければならない
- 結局、2段階単体法で z* と同時に z の式を扱うのと同じことになる

線形計画問題の行列表現(等式標準形)

minimize

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$

subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \, a_{12} \ldots a_{1m} \\ a_{21} \, a_{22} \ldots a_{2m} \\ \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$$

minimize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{q} \Leftrightarrow p_j \leq q_j, \ j = 1, \ldots,$$

線形計画問題の行列表現(単体法)

$$\boxed{\begin{aligned} -\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= 0 \end{aligned}}$$

最初のsimplex表

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{A}$

基底変数の連立方程式とその解は

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = -\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = -\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b}$

非基底変数はゼロなので、
目的関数値もゼロ

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= 0 \end{aligned}}$$

単体法の操作により各行列要素が
更新されるが $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I}$ と $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{0}$
は保たれるので基底解は常に

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{0}$

終了時の $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{b}$ が最適解となる。

※更新される必要があるのは非基底変数の選択時に必要な $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}$
と基底変数の選択時に必要な $\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}$ と $\boldsymbol{b}$だけ。

※単体法の操作で繰り返される $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I}$ を維持するピボット変換により
誤差が蓄積する(誤差を含む係数行列を元に計算が繰り返される。)

線形計画問題の行列表現(改訂単体法)

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= 0 \end{aligned}$$

最初のsimplex表

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{A}$

基底変数の連立方程式とその解は

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = -\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = -\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b}$

非基底変数はゼロなので、
目的関数値もゼロ

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= 0 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}$が正則なら変数の交換に必要な情報は計算で求まる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ z &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}) + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{aligned}$$

(必要なのは $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$ の係数:
$-\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}$)

※基底･非基底変数の分類(と$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}$)だけを更新する改訂単体法が考えられる。

単体法

単体法は次の行列表現に対応するsimplex表の更新により最適解を得る。

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= 0 \end{aligned}}$$

simplex 表の更新は基底変数と非基底変数一つずつの交換対応し z が増加するように交換する変数が選ばれる。
また、その過程で必要となる $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}$ の値や $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$ の係数 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}$ を求めるために $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I}$ を保つピボット変換が実施される。

改訂単体法

改訂単体法では次の行列表現ベクトルや行列の値は更新せず、代りに基

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= 0 \end{aligned}}$$

底・非基底変数の分類を記憶し $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}$ や $\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}$ は変数の情報を元に制約式全体の係数行列から求めるものとする。
その過程で $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}$ が正則であるなら変数の交換に必要な情報は次の計算で

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ z &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}})\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{aligned}$$

求まる。

双対問題

$$\begin{array}{c} \text{minimize} \\ z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

主問題

$$\begin{array}{c} \text{maximize} \\ w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} \\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

双対問題

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

双対問題

minimize

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$

subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \geq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \geq b_n$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

maximize

$$w = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_ny_n$$

subject to

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{n1}y_n \leq c_1$$
$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{n2}y_n \leq c_2$$
$$\vdots$$
$$a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + \cdots + a_{nm}y_n \leq c_m$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0$$

主問題

minimize

$$z = 4x_1 + 4x_2 + x_3$$

subject to

$$\begin{array}{rrrcc} 2x_1 & +2x_2 & -4x_3 & \geq & 2 \\ 2x_1 & & +2x_3 & \geq & 1 \\ -x_1 & +4x_2 & -x_3 & \geq & 1 \end{array}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

双対問題

maximize

$$w = 2y_1 + y_2 + y_3$$

subject to

$$\begin{array}{rrrcc} 2y_1 & +2y_2 & -y_3 & \leq & 4 \\ 2y_1 & & +4y_3 & \leq & 4 \\ -4y_1 & +2y_2 & -y_3 & \leq & 1 \end{array}$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

双対定理

線形計画問題とその双対問題が右のように与えられ、$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$, $\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$ 実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、最適解である。

$$\exists \tilde{\boldsymbol{x}}, \exists \tilde{\boldsymbol{y}} \geq \mathbf{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$
$$\Longrightarrow \forall \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

主問題	双対問題
minimize $z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$	maximize $w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ subject to $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$

また、一方に最適解が存在すれば、もう一方にも最適解が存在し、最適解が与える双方の目的関数値は等しい。

演習問題

解答用紙に名前･学年･学籍番号を記入し、提出

次の線形計画問題の双対問題を求め、単体法を用いてこれを解き、最適解の与える両者の目的関数値が等しいことを確認してください。

maximize

$$z = x_1 + x_2$$

subject to

$$\begin{array}{rrcl} x_1 & +2x_2 & \leq & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 2 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

minimize

$$w = 2y_1 + 2y_2$$

subject to

$$\begin{array}{rrcl} y_1 & +2y_2 & \geq & 1 \\ 2y_1 & +y_2 & \geq & 1 \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$