

# 復習：相補性定理と双対変数

主問題と双対問題の変数の対応と、正・零の対応

minimize

$$z = c^T x$$

subject to

$$Ax - Is = b$$

$$x \geq 0, s \geq 0$$

主問題の等式標準形

maximize

$$w = b^T y$$

subject to

$$A^T y + It = c$$

$$y \geq 0, t \geq 0$$

双対問題の等式標準形

主変数:

$$x^T = (x_1, \dots, x_m)$$

$$y^T = (y_1, \dots, y_n)$$

双対変数

スラック変数:  $s^T = (s_1, \dots, s_n)$

$$t^T = (t_1, \dots, t_m)$$

$$\text{相補性定理: } \tilde{x}_j > 0 \implies \tilde{t}_j = 0$$

$$\tilde{t}_j > 0 \implies \tilde{x}_j = 0$$

$$\tilde{y}_k > 0 \implies \tilde{s}_k = 0$$

$$\tilde{s}_k > 0 \implies \tilde{y}_k = 0$$

# 復習：相補性定理を用いた解法

## 主問題の等式標準形

maximize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$2x_1 - x_2 + s_1 = 7$$

$$3x_1 + x_2 + s_2 = 10$$

$$-x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

## 双対問題の等式標準形

minimize

$$w = 7y_1 + 10y_2 + 18y_3$$

subject to

$$2y_1 + 3y_2 - y_3 - t_1 = 1$$

$$-y_1 + y_2 + 2y_3 - t_2 = 2$$

$$y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0$$

## 相補性定理

$$\tilde{x}_j > 0 \implies \tilde{t}_j = 0 \quad \tilde{t}_j > 0 \implies \tilde{x}_j = 0$$

$$\tilde{y}_k > 0 \implies \tilde{s}_k = 0 \quad \tilde{s}_k > 0 \implies \tilde{y}_k = 0$$

$$\tilde{x}_1 = \frac{2}{7} \quad \tilde{t}_1 = 0$$

$$\tilde{x}_2 = \frac{64}{7} \quad \tilde{t}_2 = 0 \quad \begin{cases} 3y_2 - y_3 = 1, \\ y_2 + 2y_3 = 2 \end{cases}$$

$$\tilde{s}_1 = \frac{109}{7} \quad \tilde{y}_1 = 0$$

$$\tilde{s}_2 = 0 \quad \tilde{y}_2 = ? \quad \tilde{y}_2 = \frac{4}{7}$$

$$\tilde{s}_3 = 0 \quad \tilde{y}_3 = ? \quad \tilde{y}_3 = \frac{5}{7}$$

$$\tilde{z} = \frac{130}{7} \quad \tilde{w} = \frac{130}{7}$$

主問題の最適解から、双対問題の最適解が定まる。(逆も同様)

# 復習：演習問題

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求めよ。

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && z = x_1 + 2x_2 \\ &\text{subject to} && x_1 + x_2 \geq 4, \quad x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0, \quad x_2 \leq 3, \\ &&& x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

課題2：双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求めよ。

課題3：課題2の解答が正しいことを何らかの方法で確認する。

# 復習：演習問題9

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

minimize

$$z = (1, 2)\mathbf{x}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \geq \mathbf{0}$$

maximize

$$w = (4, 2, -3)\mathbf{y}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$4 \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T \geq \mathbf{0}$$

minimize

$$z = (1, 2)\mathbf{x}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}, \mathbf{s} = (x_1, x_2)^T, (s_1, s_2, s_3)^T \geq \mathbf{0}$$

maximize

$$w = (4, 2, -3)\mathbf{y}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}, \mathbf{t} = (y_1, y_2, y_3)^T, (t_1, t_2)^T \geq \mathbf{0}$$

# 復習：演習問題

課題2：双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

maximize

$$w = (4, 2, -3)y$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0$$

minimize  $-w$

subject to

$$y_1 - y_2 + t_1 = 1$$

$$y_1 + 2y_2 - y_3 + t_1 = 2$$

$$-w + 4y_1 + 2y_2 - 3y_3 = 0$$

$$y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0.$$

定数項とスラック変数の係数が正 → 原点が実行可能領域

$-w$	$y_1$ 非	$y_2$ 非	$y_3$ 非	$t_1$	$t_2$	定数
0	1	-1	0	<b>1</b>	0	1
0	1	2	-1	0	<b>1</b>	2
<b>1</b>	4	2	-3	0	0	0

# 復習：演習問題

課題2：双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

$-w$	$y_1$ <del>非</del>	$y_2$ 非	$y_3$ 非	$t_1$ 非	$t_2$	右辺
0	<b>1</b>	-1	0	<b>1</b>	0	1 / 1 = 1
0	1	2	-1	0	<b>1</b>	2 / 1 = 2
<b>1</b>	<b>4</b>	2	-3	0	0	0

$-w$	$y_1$	$y_2$ <del>非</del>	$y_3$ 非	$t_1$ 非	$t_2$ 非	右辺
0	<b>1</b>	-1	0	1	0	1
0	0	<b>3</b>	-1	-1	<b>1</b>	1
<b>1</b>	0	<b>6</b>	-3	-4	0	-4

$-w$	$y_1$	$y_2$	$y_3$ 非	$t_1$ 非	$t_2$ 非	右辺
0	<b>1</b>	0	-1/3	2/3	1/3	4/3
0	0	<b>3/3</b>	-1/3	-1/3	1/3	1/3
<b>1</b>	0	0	-1	-2	-2	-6

最適解：  $w = 6, y_1 = 4/3, y_2 = 1/3, y_3 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0$

# 復習：演習問題

課題2：双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

相補性定理：主・双対問題の最適解に次の関係が成立

$$\tilde{x}_j > 0 \implies \tilde{t}_j = 0 \quad \tilde{t}_j > 0 \implies \tilde{x}_j = 0$$

$$\tilde{y}_k > 0 \implies \tilde{s}_k = 0 \quad \tilde{s}_k > 0 \implies \tilde{y}_k = 0$$

(主問題の主変数： $\tilde{x}_j$ 、スラック変数： $\tilde{s}_k$

双対問題の主変数： $\tilde{y}_k$ 、スラック変数： $\tilde{t}_j$  )

双対問題の最適解：

$$w = 6, y_1 = 4/3, y_2 = 1/3, y_3 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0$$

↓ 相補性定理

主問題の最適解： $z = 6, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 > 0, x_1 > 0, x_2 > 0$

制約式より： $x_1 + x_2 = 4, -x_1 + 2x_2 = 2, x_2 + s_3 = 3$

連立方程式を解いて未知の変数を定める

$$x_1 = 2, x_2 = 2, s_3 = 1$$

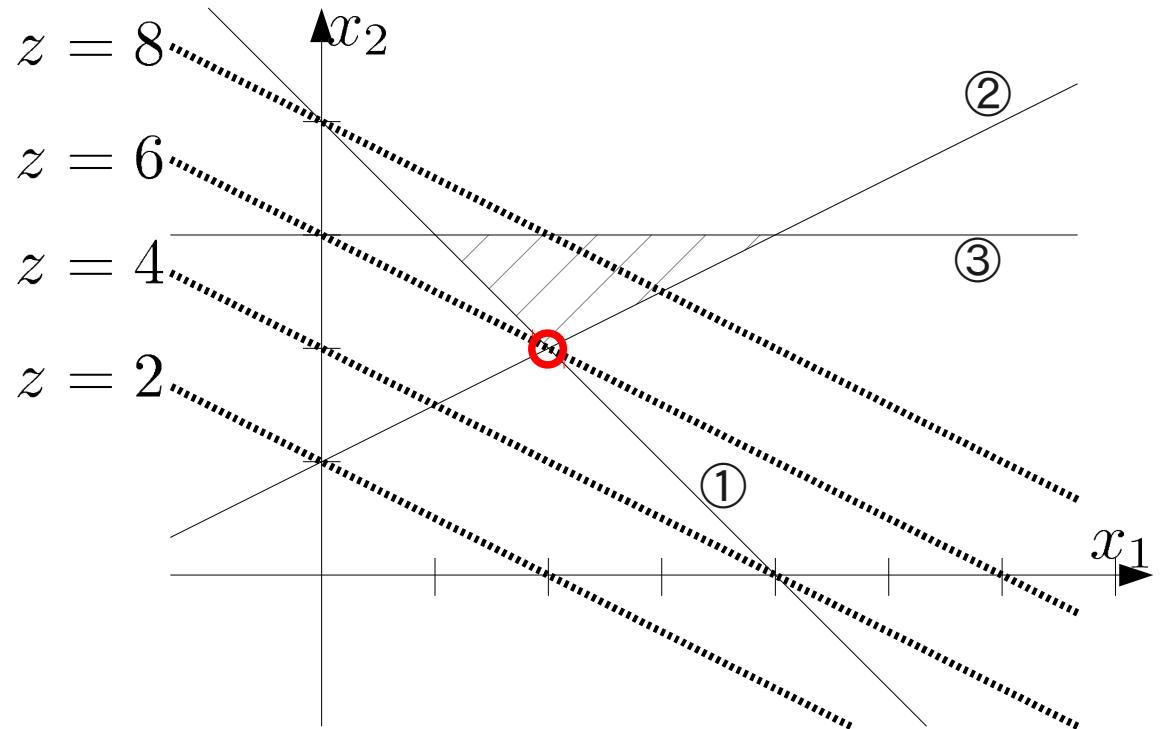
7 主問題の最適解： $z = 6, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 1, x_1 = 2, x_2 = 2$

# 復習：演習問題

課題3：課題2の解答が正しいことを何らかの方法で確認する

課題2の解答： $z$  は  $x_1 = x_2 = 2$  において最大値6を得る

- minimize  
 $z = x_1 + 2x_2$   
subject to
- ①  $x_1 + x_2 \geq 4$
  - ②  $x_2 - 2x_1 + 2 \leq 0$
  - ③  $x_2 \leq 3$
- $x_1, x_2 \geq 0$





# 線形計画問題と多面体

定義:  $n$ 次元実ベクトル空間  $\mathbb{R}^n$  の多面体

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = b_1, A_2 x \leq b_2\}$$

のとき、 $\mathcal{P}$  を  $\mathbb{R}^n$  の多面体と呼ぶ。

この定義では、面や直線、点、半平面等も多面体となる。

定義: 有界多面体

$$\forall x \in \mathcal{P}, \|x\| \leq \exists M$$

となる、 $M$  が存在するとき  $\mathcal{P}$  を有界多面体と呼ぶ。

# 線形計画問題と多面体

定義:  $n$ 次元実ベクトル空間  $\mathbb{R}^n$  の多面体  $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = b_1, A_2 x \leq b_2\}$$

このように行列  $A_1, A_2$ 、ベクトル  $b_1, b_2$  で表わされる部分集合  $\mathcal{P}$  を  $\mathbb{R}^n$  の多面体と呼ぶ。

※この定義では面や直線、点、半平面も多面体となる

$$\begin{array}{ll} \text{面:} & A_1 = (a_1, a_2, a_3) & \text{点:} & A_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{pmatrix} \\ \text{直線:} & A_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \end{pmatrix} & & \end{array}$$

※上は全て 3次元の場合

定義: 有界多面体

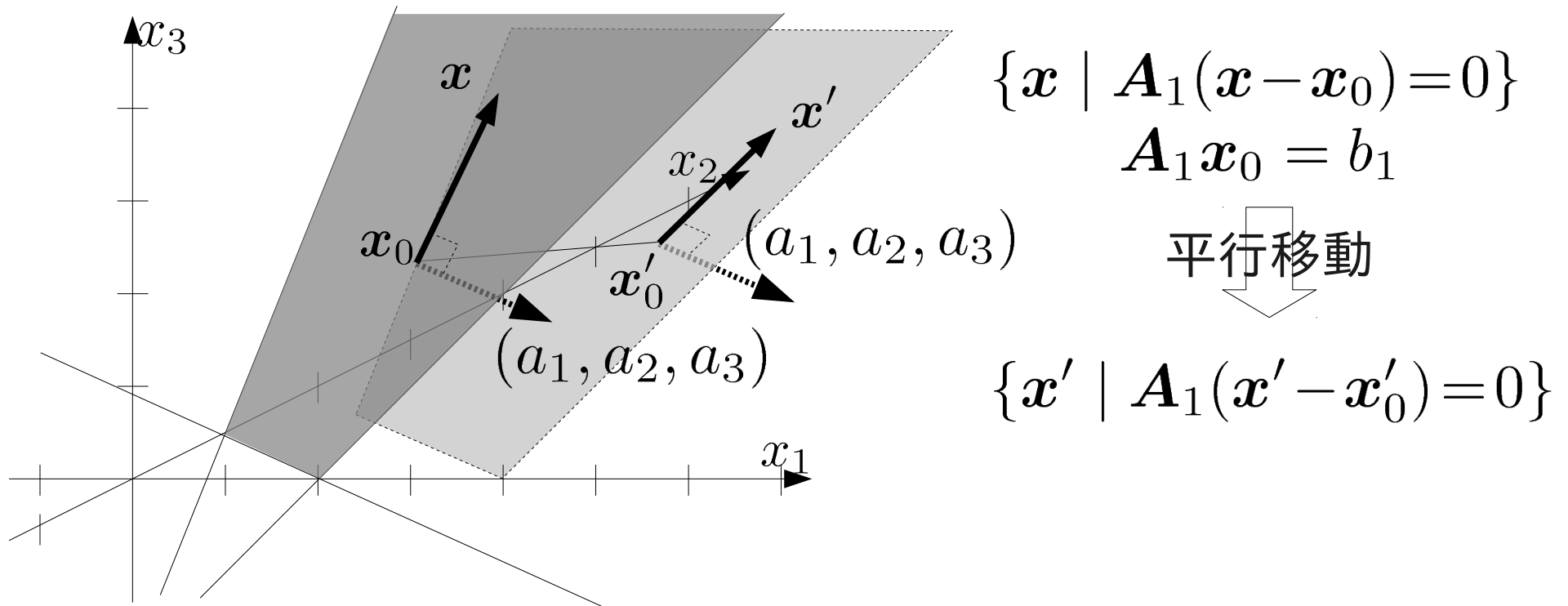
$\forall x \in \mathcal{P}, \|x\| \leq \exists M$  を満たす定数  $M$  が存在するとき、 $\mathcal{P}$  を有界多面体と呼ぶ。

# 線形計画問題と多面体

定義:  $n$ 次元実ベクトル空間  $\mathbb{R}^n$  の多面体  $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = b_1, A_2 x \leq b_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体:  $A_1 = (a_1, a_2, a_3), b_1 = b_1$



$$A_1(x' - x'_0 + x_0 - x_0) = 0 \Rightarrow A_1 x' = A_1(x_0 + (x'_0 - x_0))$$

$= b_1 + A_1(x'_0 - x_0) > b_1$  元の平面に対して  $A_1$  と同じ側

$< b_1$  元の平面に対して  $A_1$  と反対側

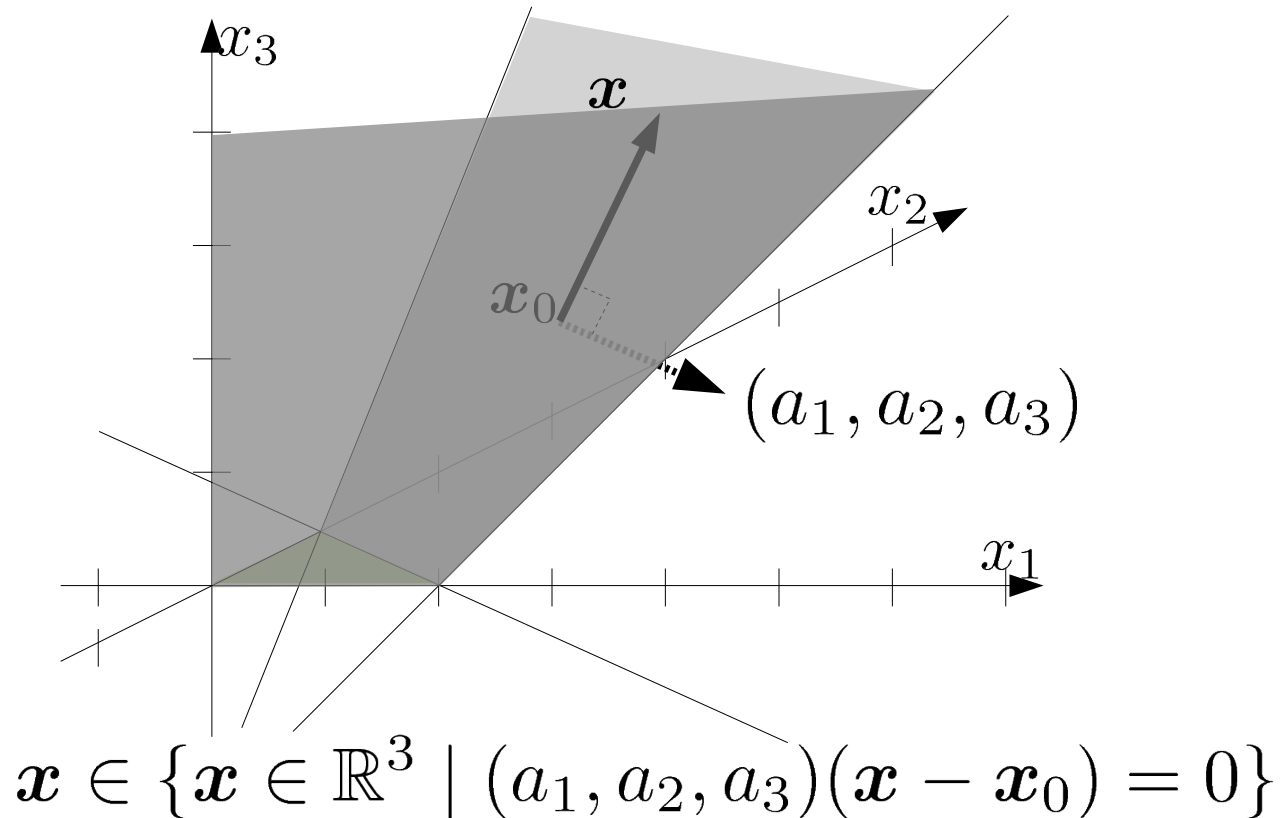
# 線形計画問題と多面体

定義:  $n$ 次元実ベクトル空間  $\mathbb{R}^n$  の多面体  $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = b_1, A_2 x \leq b_2\}$$

3次元領域を2分する多面体:

$$A_2 = (a_1, a_2, a_3), b_2 = b \quad A_2 x_0 = b$$



# 線形計画問題と多面体

定義:  $n$ 次元実ベクトル空間  $\mathbb{R}^n$  の多面体  $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = b_1, A_2 x \leq b_2\}$$

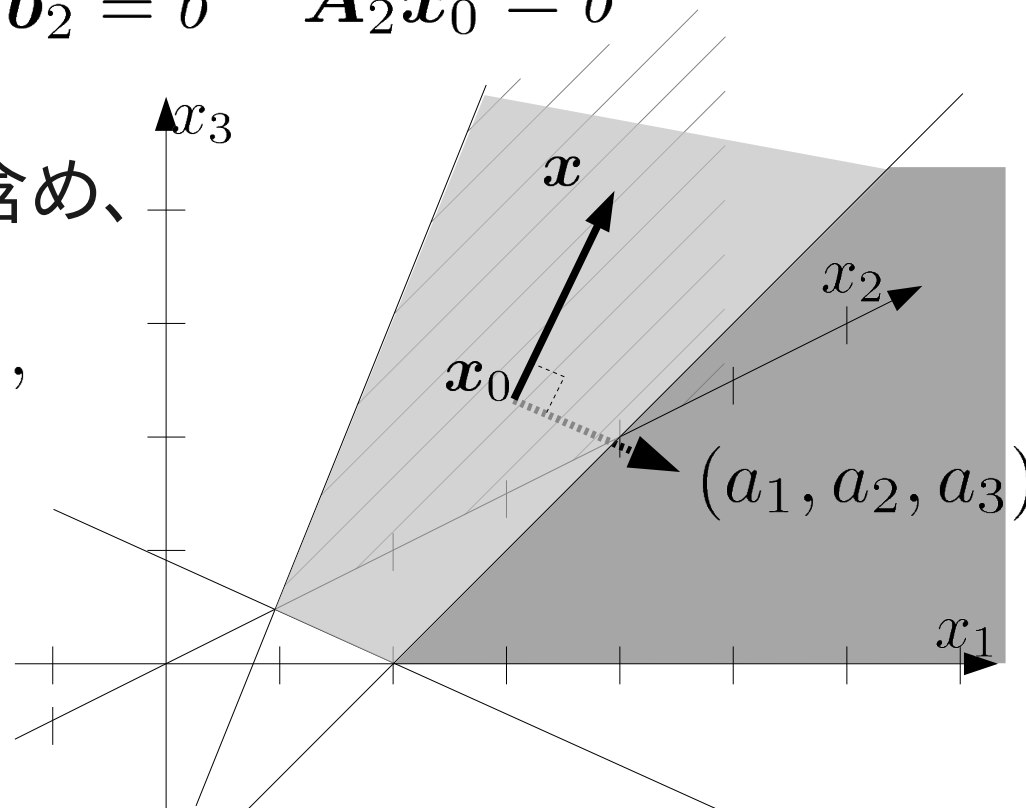
3次元領域を2分する多面体:

$$A_2 = -(a_1, a_2, a_3), b_2 = b \quad A_2 x_0 = b$$

正確には非負条件も含め、

$$A_2 = \begin{pmatrix} -(a_1, a_2, a_3) \\ -I \end{pmatrix},$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} b \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$



$$x \in \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(x - x_0) = 0\}$$

# 線形計画問題と多面体

定義:  $n$ 次元実ベクトル空間  $\mathbb{R}^n$  の多面体  $\mathcal{P}$

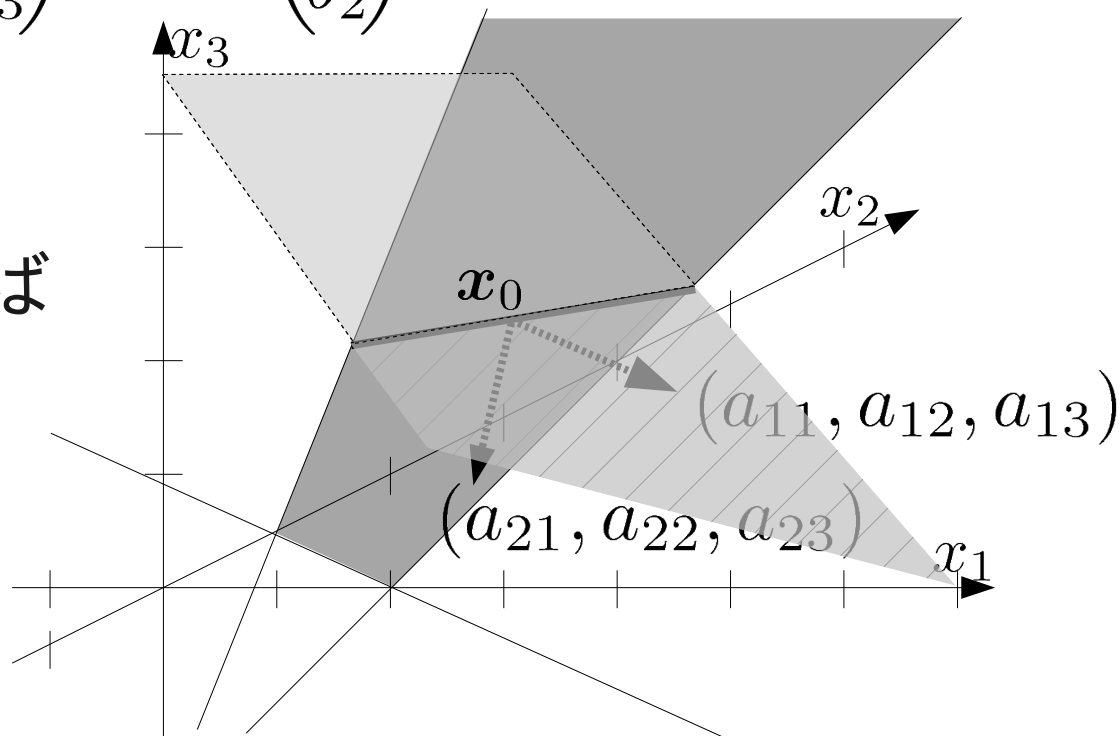
$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = b_1, A_2 x \leq b_2\}$$

3次元の直線を構成する多面体:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$A_1 x_0 = b_1$$

非負条件を入れれば  
線分になる



$$x \in \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(x - x_0) = 0\}$$

# 線形計画問題と多面体

定義:  $n$ 次元実ベクトル空間  $\mathbb{R}^n$  の多面体  $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = b_1, A_2 x \leq b_2\}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{N_1} \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{N_1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_{N_2} \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_{N_2} \end{pmatrix}$$

多面体を構成する平面の法線ベクトル:

$$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N_1}, \mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_{N_2}$$

不等式標準形の不等式制約の係数に対応する  
「minimize  $z$ , subject to  $Ax \geq b$ 」のとき、 $A$  の行ベクトル毎に平面が考えられる。

$$A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)^T, b = (b_1, \dots, b_n)$$

$$\text{平面 } \ell : \mathbf{a}_\ell^T x \geq b_\ell \quad \ell = 1, \dots, n$$

# 演習問題10

課題1: 次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求めよ。

$$z = x_1 + 2x_2$$

minimize  $x_1 + x_2 \geq 4, x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0, x_2 \leq 3,$   
subject to  $x_1, x_2 \geq 0.$

課題2: 主問題と双対問題の実行可能領域を、目的関数を表す平面とともに図示し、図を用いてそれぞれの最適解を示せ。