数理計画法

第12回：内点法の原理

今日の授業について

- 復習＋内点法の原理
- 「演習」問題1

※問題1の回答は収集しません。（成績評価対象外）

次回の授業について

- 問題1の解説から始めます。その他の問題についても、できるだけ解いておいてください。
- 「演習」の資料はウェブサイト http://comp.cs.ehime-u.ac.jp/~okano/mathpro/ で配布しています。
- ダウンロード時のユーザ名とパスワードはどちらも

8931

授業の欠席について

- 成績評価に出席点はありません。
- 毎回の提出課題は評価対象です。
- 正当な理由で欠席した場合には提出課題の再提出を認めます。欠席した回の演習課題を完成して提出してください。

※課題は正しい解答とともに完成した形で提出された場合にのみ評価します。確認のために口頭での説明を求める場合があります。

- 2回以上の欠席があり、課題提出が無い場合は評価しません。

復習:演習問題

解答用紙に名前･学年･学籍番号を記入し、提出

次の線形計画問題の双対問題を求め、主問題･双対問題の実行可能領域に対応する多面体をグラフに描け

また、制約式･目的関数に関わる平面の法線ベクトルを描き、双対変数どうしの関係を説明せよ

maximize

$$z = x_1 + x_2$$

subject to

$$\begin{array}{rrcl} x_1 & +2x_2 & \leq & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 2 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

minimize

$$w = 2y_1 + 2y_2$$

subject to

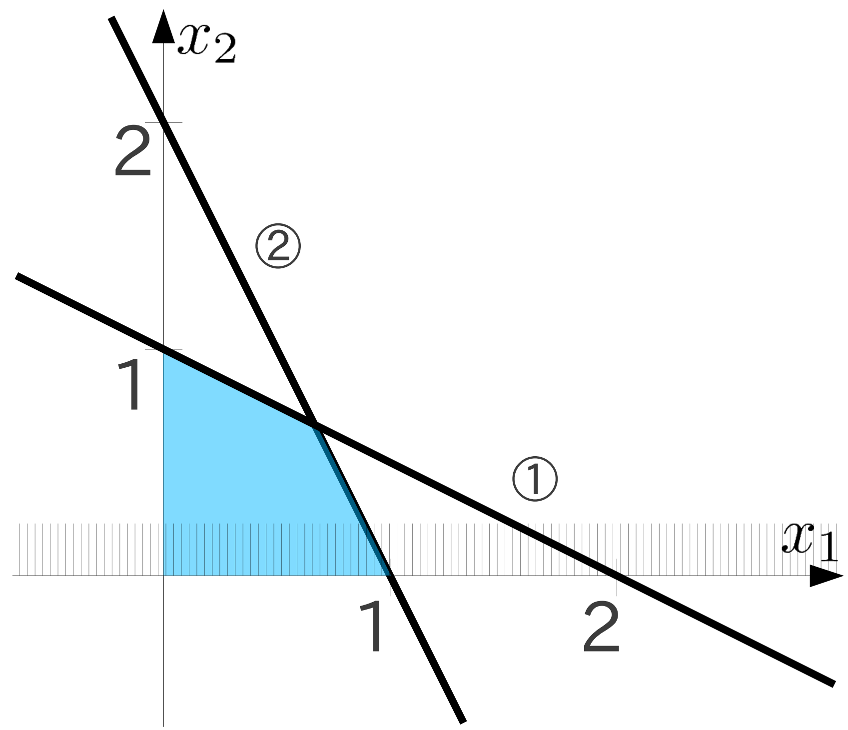
$$\begin{array}{rrcl} y_1 & +2y_2 & \geq & 1 \\ 2y_1 & +y_2 & \geq & 1 \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

復習：演習問題

実行可能領域に対応する多面体をグラフに描け

主問題

maximize
$$z = x_1 + x_2$$
subject to
$$\begin{array}{rrcll} x_1 & +2x_2 & \leq & 2 & ① \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 2 & ② \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$



復習:演習問題

実行可能領域に対応する多面体をグラフに描け

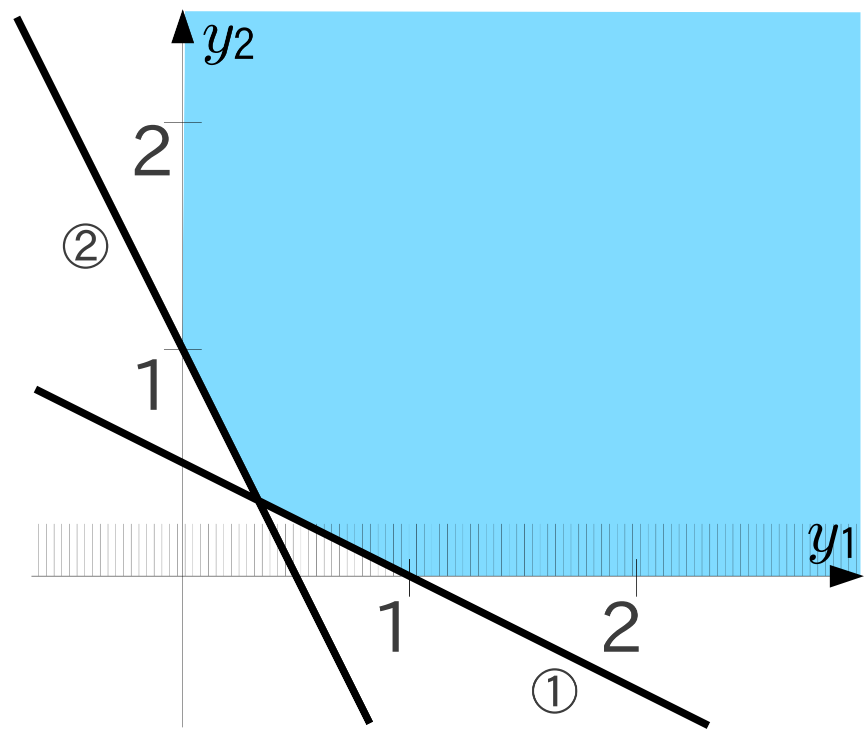
双対問題

minimize

$$w = 2y_1 + 2y_2$$

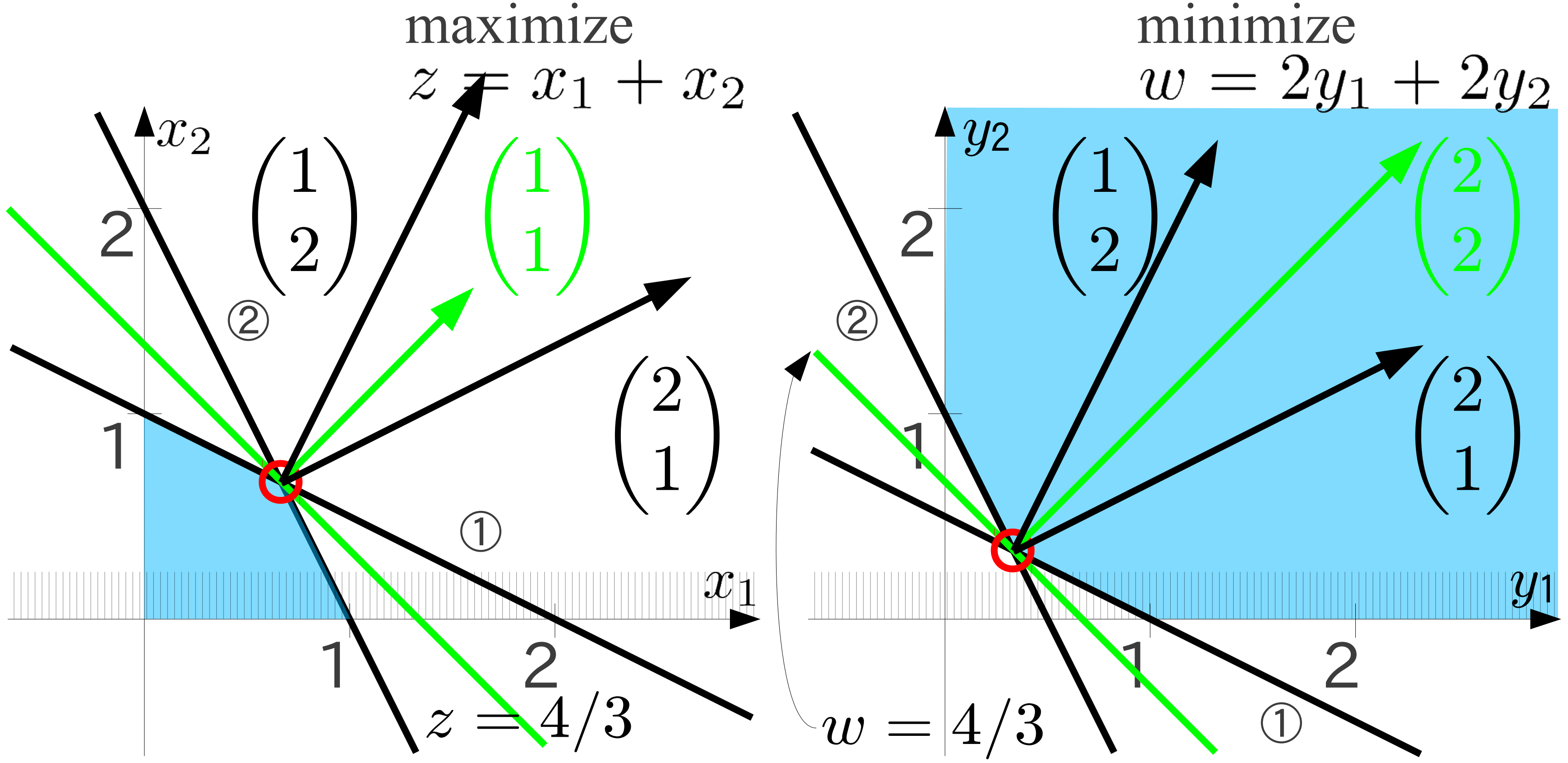
subject to

$$\begin{array}{rrcll} y_1 & +2y_2 & \geq & 1 & ① \\ 2y_1 & +y_2 & \geq & 1 & ② \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 & \end{array}$$



復習：演習問題

最適解を与える制約式・目的関数に関わる平面の法線ベクトルを描き、



復習：演習問題

双対変数同士の関係を説明せよ

目的関数の法線ベクトル
＝ $y_1$①の法線ベクトル
＋ $y_2$②の法線ベクトル

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

目的関数
＝y_1制約式①＋y_2制約式②

$$z=x_1+x_2\le\frac{1}{3}2+\frac{1}{3}2=\frac{4}{3}$$

主問題

maximize
$z=x_1+x_2$
subject to

$$\begin{array}{rrcll} x_1 & +2x_2 & \le & 2 & ① \\ 2x_1 & +x_2 & \le & 2 & ② \\ & x_1, x_2 & \ge & 0 & \end{array}$$

最適解：

$$(z, x_1, x_2, s_1, s_2) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0\right)$$

復習:演習問題

双対変数同士の関係を説明せよ

双対問題

minimize

$w = 2y_1 + 2y_2$

subject to

$$\begin{array}{rrcrl} y_1 & +2y_2 & \geq & 1 & ① \\ 2y_1 & +y_2 & \geq & 1 & ② \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

目的関数の法線ベクトル

＝ x_1 ①の法線ベクトル

＋ x_2 ②の法線ベクトル

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

目的関数

＝x_1制約式①＋x_2制約式②

$$w = 2y_1 + 2y_2 \geq \frac{2}{3}1 + \frac{2}{3}1 = \frac{4}{3}$$

最適解

$$(w, y_1, y_2, t_1, t_2) = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0)$$

氏名:　　　　　　　　　　学籍番号:

練習問題11
次の線形計画問題の双対問題を求め、主問題・双対問題の実行可能領域に対応する多面体をグラフに描け

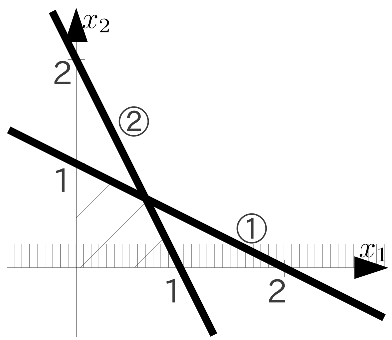
maximize
$z = x_1 + x_2$
subject to
$$\begin{array}{rrcl} x_1 & +2x_2 & \leq & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 2 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

minimize
$w = 2y_1 + 2y_2$
subject to
$$\begin{array}{rrcl} y_1 & +2y_2 & \geq & 1 \\ 2y_1 & +y_2 & \geq & 1 \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

また、制約式・目的関数に関わる平面の法線ベクトルを描き、双対変数どうしの関係を説明せよ

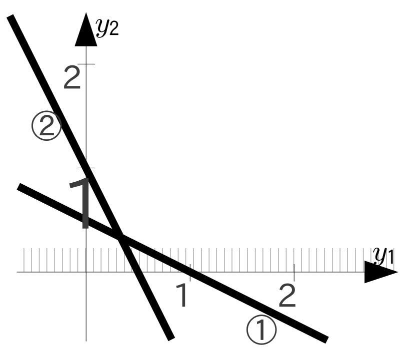
主問題

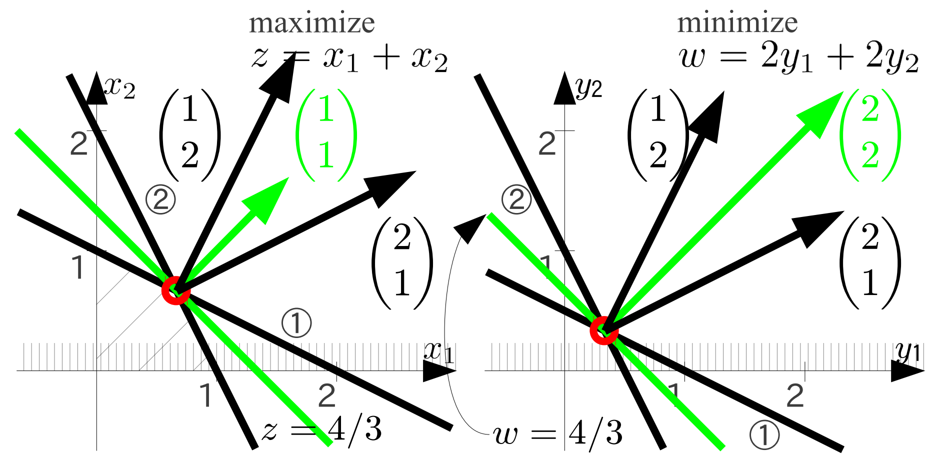
maximize
$z = x_1 + x_2$
subject to
$$\begin{array}{rrcll} x_1 & +2x_2 & \leq & 2 & ① \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 2 & ② \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$



双対問題

minimize
$w = 2y_1 + 2y_2$
subject to
$$\begin{array}{rrcll} y_1 & +2y_2 & \geq & 1 & ① \\ 2y_1 & +y_2 & \geq & 1 & ② \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 & \end{array}$$





双対変数同士の関係
主問題:
目的関数の法線ベクトル＝$y_1$①の法線ベクトル＋$y_2$②の法線ベクトル
$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

目的関数＝y_1制約式①＋y_2制約式②
$$z = x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3}2 + \frac{1}{3}2 = \frac{4}{3}$$

双対問題:
目的関数の法線ベクトル＝$x_1$①の法線ベクトル＋$x_2$②の法線ベクトル
$$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

目的関数＝x_1制約式①＋x_2制約式②
$$w = 2y_1 + 2y_2 \geq \frac{2}{3}1 + \frac{2}{3}1 = \frac{4}{3}$$

復習:主問題と双対問題の関係

maximize
$z = x_1 + x_2$
subject to

$$\begin{array}{lllll} x_1 & +2x_2 & \leq & 2 & ① \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 2 & ② \\ & & x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

主問題:最大化問題

minimize
$w = 2y_1 + 2y_2$
subject to

$$\begin{array}{lllll} y_1 & +2y_2 & \geq & 1 & ③ \\ 2y_1 & +y_2 & \geq & 1 & ④ \\ & & y_1, y_2 \geq 0 & & \end{array}$$

双対問題:最小化問題

最大化問題は、制約式の定める
上界に一番近い実行可能解を探す問題
2つの制約式から分かる上界の例:

$z \leq$ (①+②)/2= $\frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 \leq 2$

① ② の組み合わせで得られる関係式

$y_1 \times$ ① + $y_2 \times$ ②

$y_1, y_2 \geq 0$ であれば、制約式通りなので

$y_1 \times (x_1 + 2x_2) + y_2 \times (2x_1 + x_2)$

$= (y_1 + 2y_2) \times x_1 + (2y_1 + x_2) \times x_2 \leq 2y_1 + 2y_2$

関係式の係数が目的関数の係数より大きければ、

$z \leq 2y_1 + 2y_2$ により

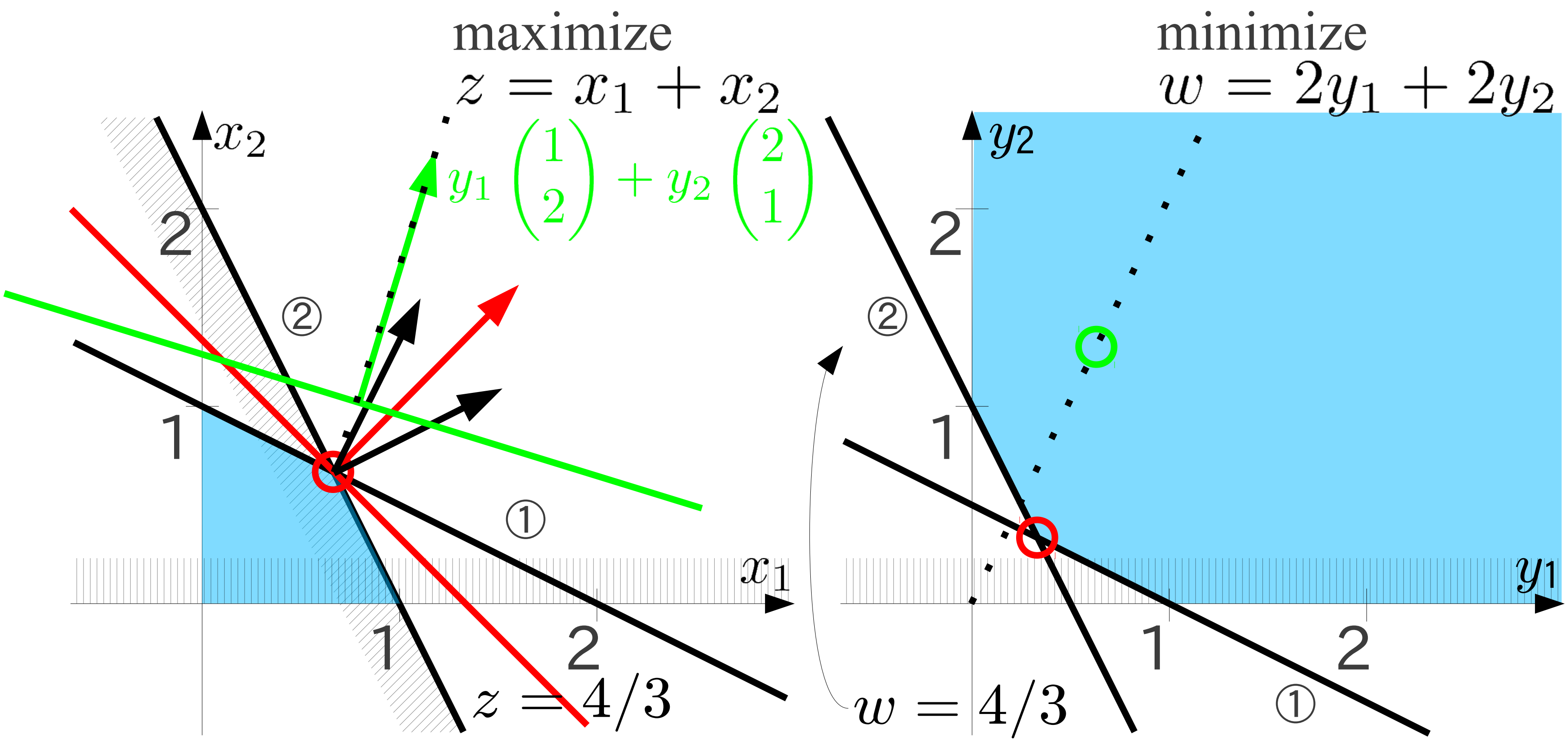
目的関数の上界を得ることができる。

このとき、最も厳しい上界を求める問題、
すなわち $2y_1 + 2y_2$ の最小化問題が
zの上限を求める問題に対応する。

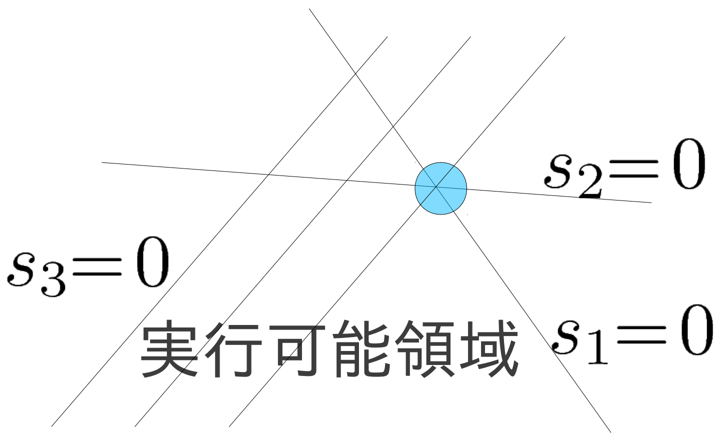
双対変数値と支持(超)平面

法線ベクトルの組合せで目的関数値に対する制限が決まる

⇒一番厳しい制限＝目的関数と同一法線



相補性定理と多面体



minimize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$x_1 + x_2 - s_1 = 4 \quad ①$$
$$-x_1 + 2x_2 - s_2 = 2 \quad ②$$
$$-x_2 - s_3 = -3 \quad ③$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

主変数が2つの平面の交点に対応する値をとる

→対応するスラック変数値はゼロ、他のスラック変数値は正

→目的関数を制限する不等式の係数＝双対変数は正、他の制約式の係数はゼロ

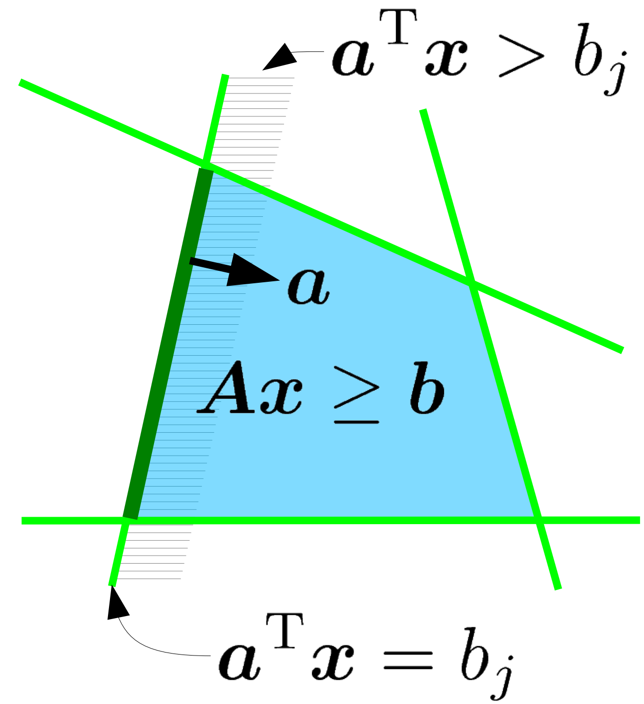
復習+α:線形計画問題と多面体

多面体:
　線形計画問題を考えるベクトル空間において、制約等式、不等式の定める領域、全ての制約を満たす多面体＝実行可能領域

(超)平面:
　(線形)制約等式を満たす点の集合

支持超平面:
　多面体を構成する不等式の一つが単独で構成する多面体の境界

面:
　多面体とその支持超平面の交わり



$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \vdots \\ b_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

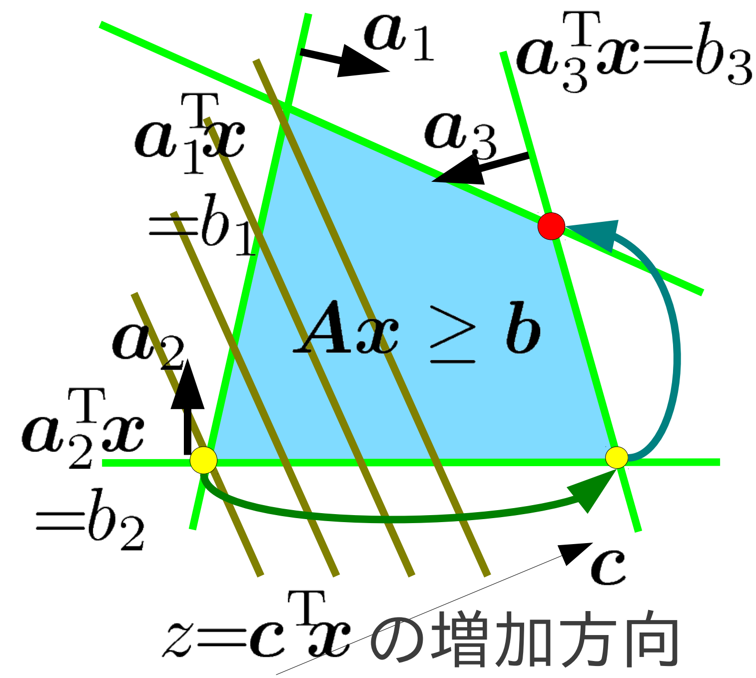
復習+α:線形計画問題と多面体

交点:
　複数の(超)平面の交わりのうち、点を成すもの

多面体の頂点:
　支持(超)平面の成す交点

単体法の原理:
　目的関数が増加するように多面体の頂点を移動し、最適解を求める方法
　出発点となる頂点から頂点を構成する支持超平面を順番に入れ換えて目的関数を増加させる
　総当たり法よりも効率が良い?

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}\\ \vdots\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ \vdots\end{pmatrix}$$

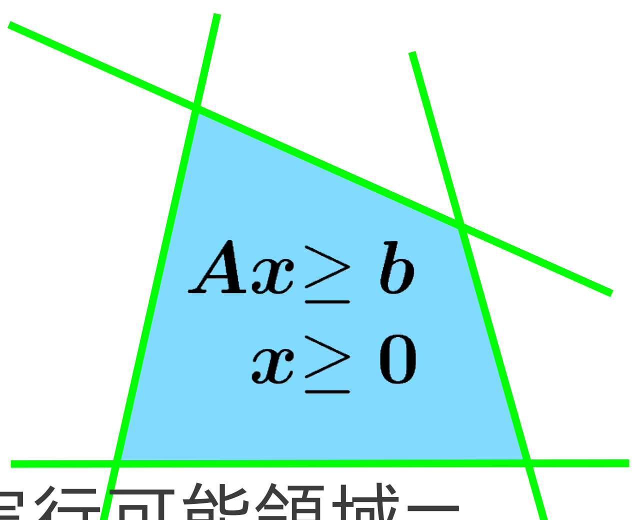


内点法の原理

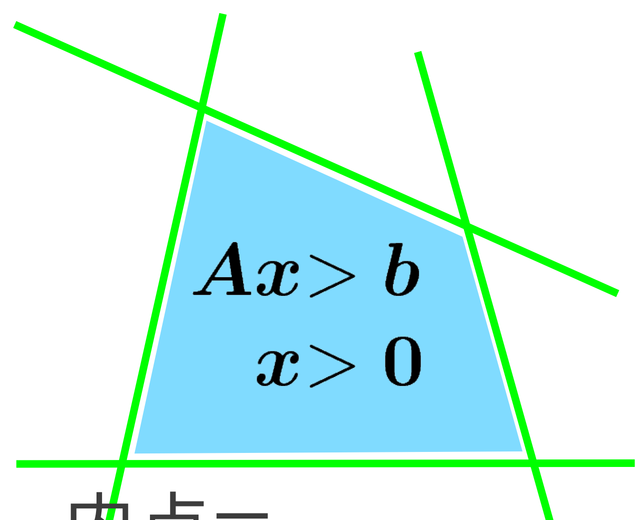
内点：
　不等式標準形の制約式から等号を除いた条件を満たす点を内点と呼ぶ

不等式標準形

minimize
$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
subject to
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$



実行可能領域＝
$$\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$



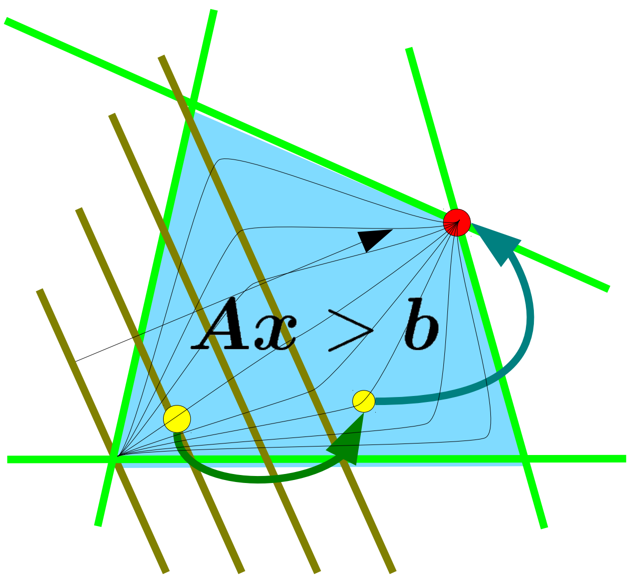
内点＝
$$\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}\}$$

内点法の原理

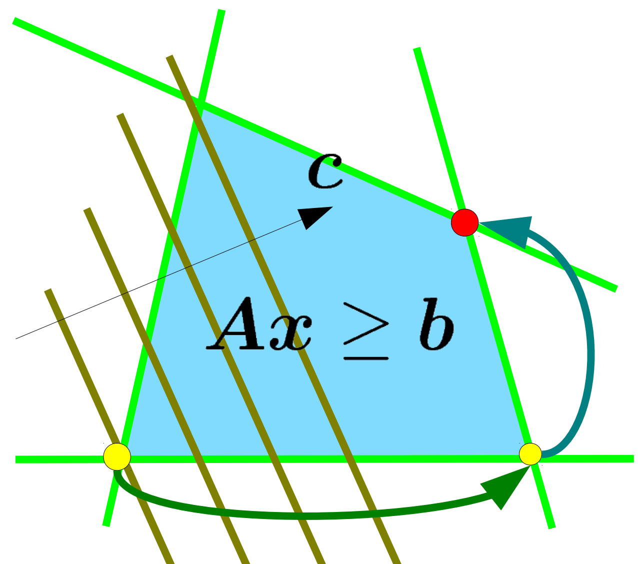
内点法の原理：
内点領域中に最適解へ向かうベクトル場からなるう軌跡を作り、軌跡に沿って内点領域を通る経路を近似的に求める方法。

不等式標準形

minimize
$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
subject to
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$



内点法



単体法

内点法の原理

双対定理：
　主問題・双対問題の実行可能解 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m, \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$において
　$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$が最適解 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$

そこで、与えられた線形計画問題を$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ を実現する
　点$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^{m+n}$を求める問題に置換えて考える

　$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が主・双対問題の最適解でないとき、両者の目的
　関数には差がある、これを双対ギャップと呼ぶベクトル
　で評価する

$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ より、

$$0\leq\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$
$$=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$
$$=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}$$
$$=(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}$$

但し $\boldsymbol{s}$ はスラック変数で $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{s}$

主問題	双対問題
minimize $z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}$	maximize $w=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ subject to $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}$

自己双対型内点法の原理

前頁より目的関数値の差:$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}$

そこで、
$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{s}\end{pmatrix}$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^{m+n}$ を考える

さらに、
$$\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})\equiv\begin{pmatrix}x_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & x_m & & & \\ & & & s_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & s_n\end{pmatrix}$$

とおけば、$\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}$ の非負性より
$$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{s}\end{pmatrix}=0\Longleftrightarrow \boldsymbol{X}\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}$$

したがって、最適解を求めることは $\boldsymbol{X}\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{t}$ を求めることと等しい

内点法の原理

内点法の原理、
　元の線形計画問題を解き、最適解を求めることは次の
　方程式を解くことと等しい

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{t} \equiv \mathrm{diag}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{s} \geq 0,$$

そこで、$\boldsymbol{X}\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}$ を解く代りに次の方程式を解く

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{t} = \lambda\boldsymbol{1},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{s} \geq 0,$$

$$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = ((\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}), \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}, \lambda \geq 0$$

λ を縮小するとともに反復的に改良を繰返し、十分小さい λ に対する近似解を元の問題の近似解とする

内点法の原理

双対ギャップ $\boldsymbol{t}$ を縮小する反復解法

反復の k 段目の変数 $(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{s}_k, \boldsymbol{t}_k)$をX, t とおく、k+1 段目への改善量を△で表せば改善量の満たすべき方程式は次の通り

$$(\boldsymbol{X}+\Delta \boldsymbol{X})(\boldsymbol{t}+\Delta \boldsymbol{t})=\lambda \mathbf{1},$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s}+\Delta \boldsymbol{x}-\Delta \boldsymbol{s})=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}+\Delta \boldsymbol{x}\geq 0, \boldsymbol{s}+\Delta \boldsymbol{s}\geq 0,$$
$$\boldsymbol{t}+\Delta \boldsymbol{t}=\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{y}+\Delta \boldsymbol{y})-\boldsymbol{c}, \boldsymbol{t}+\Delta \boldsymbol{t}\geq 0, \lambda>0.$$

X と t に関する非線形部分で2次以上の項を無視すれば

$$\boldsymbol{T}\Delta \boldsymbol{x}+\boldsymbol{X}\Delta \boldsymbol{t}=\lambda \mathbf{1}$$

ただし、 $\boldsymbol{T}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})$

内点法の原理

式を整理して、線形方程式を得る

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{A} \mathit{\Delta} \boldsymbol{x} = 0 \\
\mathit{\Delta} \boldsymbol{t} = \boldsymbol{A}^T \mathit{\Delta} \boldsymbol{y} \\
\boldsymbol{T} \mathit{\Delta} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{X} \mathit{\Delta} \boldsymbol{t} = -[\boldsymbol{X} \boldsymbol{t} - \lambda \mathbf{1}]
\end{gathered}
$$

実際の内点法においては初期の実行可能解、

$$(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{s}^k)$$

更新のためのλの決定は簡単ではない。
そこで、具体的な初期解の決定方法や反復の手順について、様々な工夫がされている。

自己双対型線形計画問題

次の不等式標準形で表わされる線形計画問題を
自己双対型線形計画問題と言う。
ここで、係数行列$\boldsymbol{A}$は歪対称行列。

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

自己双対型線形計画問題の双対問題を考える。

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & w = -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array} = \begin{array}{ll} \text{minimize} & w = -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & -\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

自己双対型線形計画問題の双対問題は主問題に一致する。

自己双対型線形計画問題

任意の線形計画問題を自己双対型線形計画問題に書き換ることができる。
与えられた不等式標準形をもとに、具体的に書き換えの方法を示す。

与えられた線形計画問題に対応して双対問題を考える。

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

次の自己双対型線形計画問題は元の問題の最適解を実行可能領域に持つ。

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + 0\tau \\ \text{subject to} & \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{c} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{b}^{T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \tau \end{pmatrix} \leq \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \tau \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{c} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{b}^{T} & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & (\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \\ (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & (-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \\ (-\boldsymbol{c})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{b}^{T} & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{c} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{b}^{T} & 0 \end{pmatrix}$$

自己双対型線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + 0\tau \\ \text{subject to} & \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & A^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{c} \\ -A & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{b}^{T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \tau \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \tau \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

元の問題の最適解を$\tilde{\boldsymbol{x}}$、その双対問題の最適解を$\tilde{\boldsymbol{y}}$としたとき、
$\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y} = \tilde{\boldsymbol{y}}, \tau = 1$ が自己双対型問題の実行可能領域にあることは明らか。

逆に自己双対型問題の実行可能解を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \tau$ としたとき、
制約式より $\tau\boldsymbol{c} \leq A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$、$-\tau\boldsymbol{b} \leq -A\boldsymbol{x}$ したがって、

$$\tau(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}) = (\tau\boldsymbol{c})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - (\tau\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq (A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - (A\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 0$$

$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ なら弱双対定理より元の問題の最適解となる。
$\tau = 0$ ならば相補性定理より $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} > 0$ なので、$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0$
または $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} < 0$となる。前者なら元の主問題が実行不能で後者なら双対問題が実行不能になる。

演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

課題1：次の線形計画問題を書換えて自己双対型線形計画問題を導きなさい。

minimize $z = x_1 + 2x_2$

subject to

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 \geq 4 \\
&x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0 \\
&x_2 \leq 3 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

課題2：元の問題の最適解が求めた自己双対型線形計画問題の実行可能解になっていることを確認してください。

演習問題

次の線形計画問題の双対問題を求め実行可能領域に対応する多面体をグラフに描け

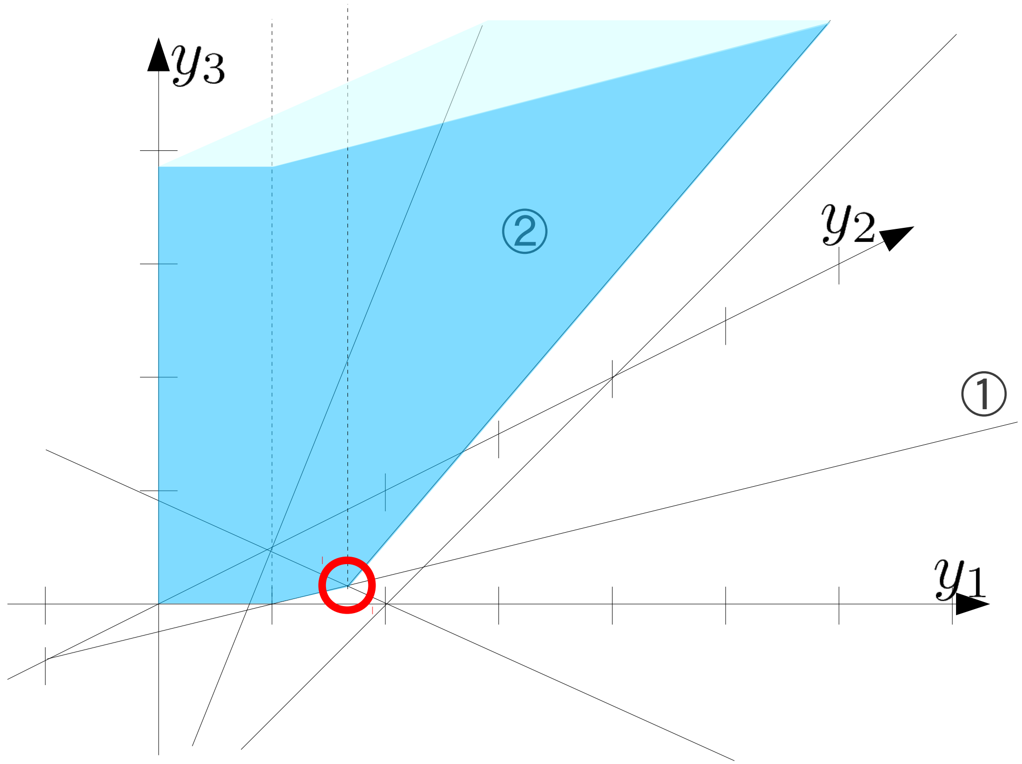
また、最適解を与える制約式・目的関数に関わる平面の法線ベクトルを描き、双対定理・相補性定理で述べられる双対変数同士の関係を示せ

$$\text{maximize}$$
$$w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3$$
$$\text{subject to}$$

① $y_1 - y_2 \le 1$

② $y_1 + 2y_2 - y_3 \le 2$

$y_1, y_2, y_3 \ge 0$



演習問題

双対問題は2変数

minimize

$z = x_1 + 2x_2$

subject to

① $x_1 + x_2 \geq 4$

② $x_2 - 2x_2 + 2 \leq 0$

③ $x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$