数理計画法

第11回: 自己双対型内点法の原理

授業の内容：

第1回(11/01)：数理計画問題・線形計画問題とは何か

第2回(11/08)：線形計画問題の標準形

第3回(11/15)：単体法

第4回(11/22)：巡回と最小添字規則

第5回(11/29)：巡回と最小添字規則，2段解法

第6回(12/06)：単体法の2段階法

第7回(12/13)：線形計画問題の行列表現と改訂単体法

第8回(12/20)：双対問題と双対定理

第9回(01/10)：相補性定理と双対変数

第10回(01/17)：線形計画問題と多面体

☆ここまで終了

第11回(01/24)：自己双対型内点法の原理

第12・13回(01/27)：演習　土曜日1・2時限開講、※**開始時刻は 9時です。**

第14回(01/31)：自己双対型内点法の実践

第15回(02/07)：期末試験

授業資料のダウンロードについて

- http://comp.cs.ehime-u.ac.jp/mathpro/

※テストをした範囲では問題無く印刷できましたが、数名の方から、学科計算機室で授業資料を印刷できないとのご報告がありました。

授業の欠席について

- 成績評価に出席点はありません。
- 毎回の提出課題は評価対象です。
- 正当な理由で欠席した場合には提出課題の再提出を認めます。欠席した回の演習課題を完成して提出してください。

※課題は正しい解答とともに完成した形で提出された場合にのみ評価します。確認のために口頭での説明を求める場合があります。

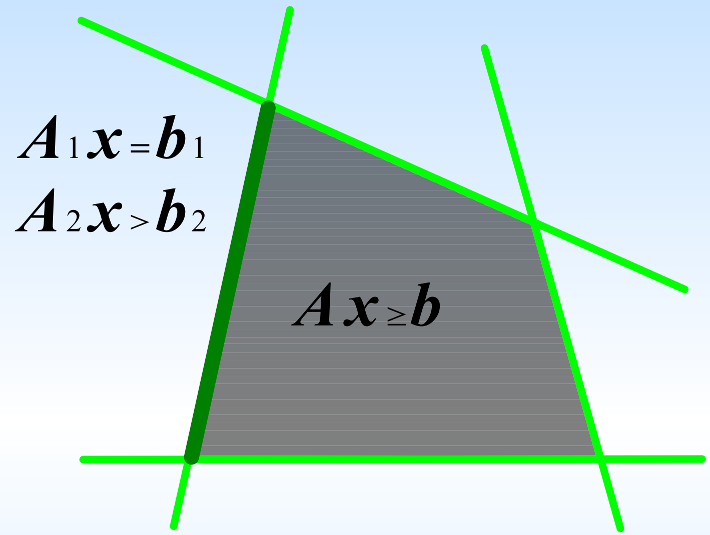
- ２回以上の欠席があり、課題提出が無い場合は評価しません。
- １月２７日の欠席分も同じ扱いとします。

復習

まとめ「線形計画問題と多面体」

多面体：
線形計画問題を考えるベクトル空間において、
制約条件に対応する等式、不等式の定める領域

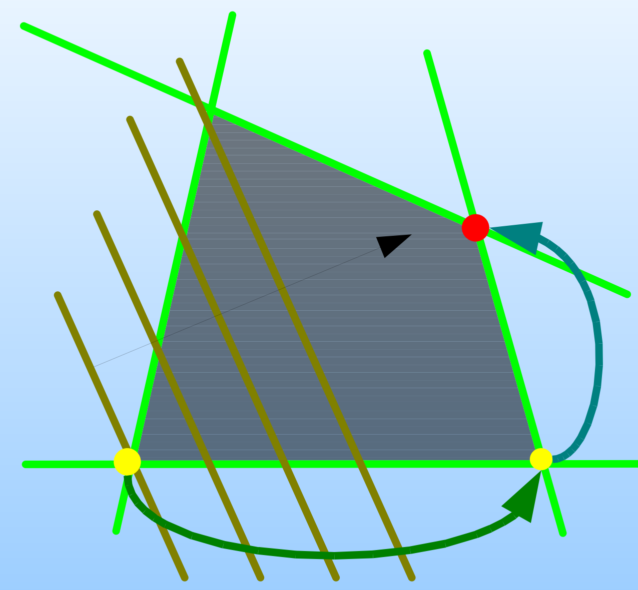
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{b}_2\end{pmatrix},$$



支持超平面：
ある多面体を構成する不等式の一つが単独で構成する多面体の境界

面：
ある多面体とその支持超平面の交わり

単体法の原理：
制約式の作る多面体の境界にある最適解を多面体の頂点を移動することで探索する方法
出発点となる端点から順番に頂点を含む面を入れ換えながら目的関数を増加させていく



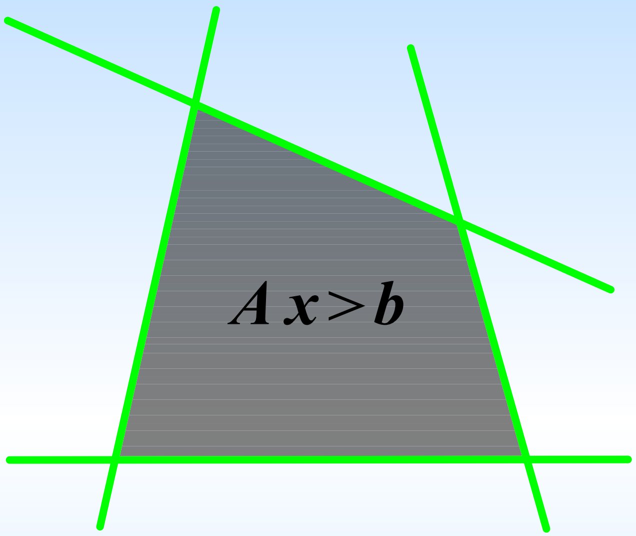
内点法の原理

次の不等式標準形で表わされる線形計画問題の制約式から等号を除いた条件を満たす点を内点と呼ぶ。

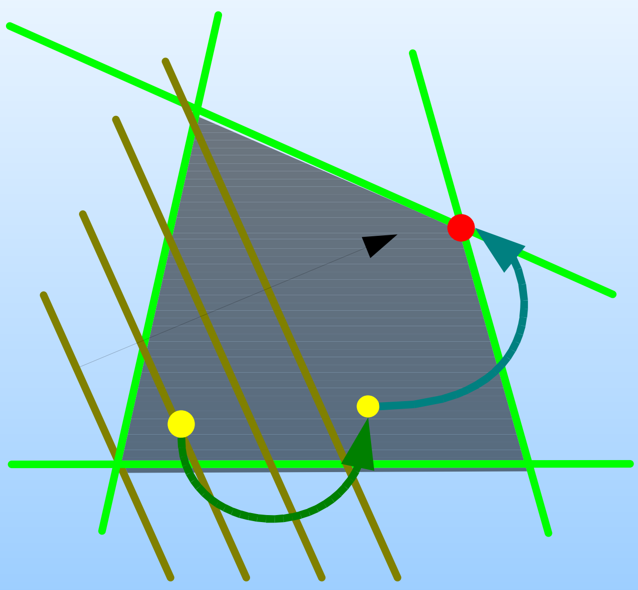
不等式標準形

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ &\text{subject to} && \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ & && \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

内点: $\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$



内点法の原理:
内点領域中に最適解へ向かうベクトル場からなる軌跡を作り、軌跡に沿って内点領域を通る経路を近似的に求める方法。



内点法の原理

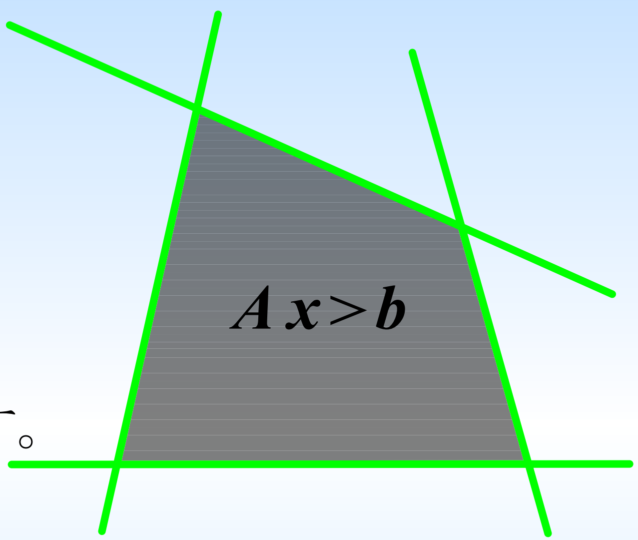
主問題と双対問題の最適解ではない、実行可能解において、両者の目的関数には差がある。
双対問題の目的関数値と主問題の目的関数値との差を双対ギャップと呼び、以下のように表される。

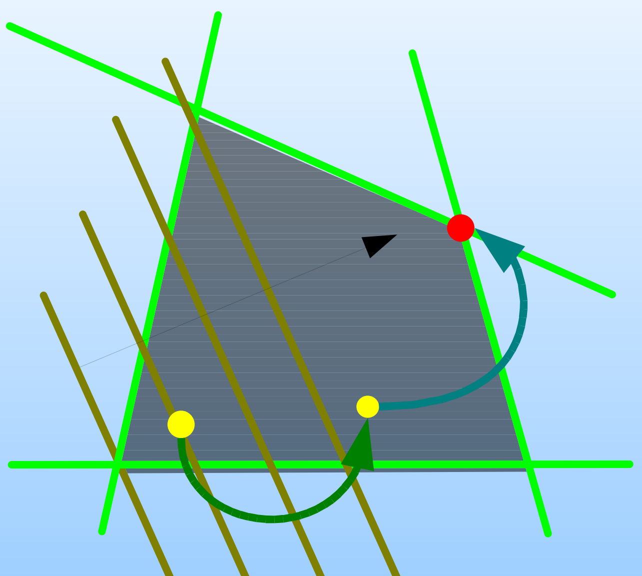
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}-\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} &< (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{y}-\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\\
&=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}-\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}-\boldsymbol{c})^T\boldsymbol{x}\geq 0
\end{aligned}
$$

この双対ギャップを $\boldsymbol{x}$ の関数として次のように表す。

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}:=\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}-\boldsymbol{c})$$

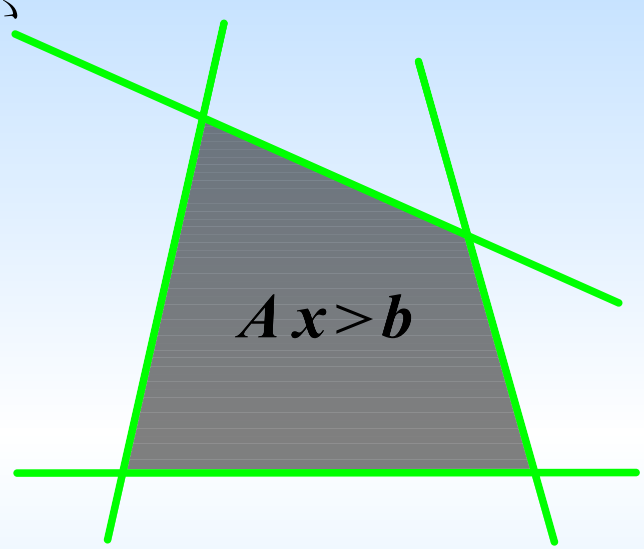
maximize $z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}$	minimize $w=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ subject to $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{c}$ $\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}$
主問題	双対問題





内点法の原理

双対定理：
主問題に最適解が存在すれば、双対問題にも最適解が存在し、両者に対応する目的関数値は等しい

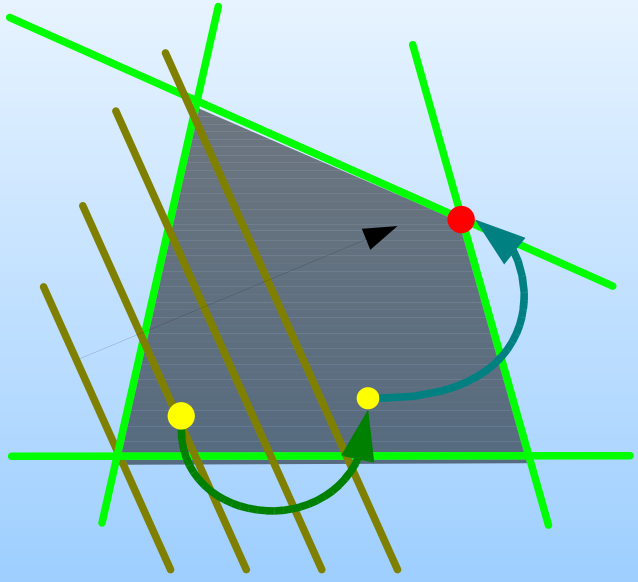


$$\boldsymbol{b}^T\tilde{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{c}^T\tilde{\boldsymbol{x}}$$

非不条件より

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}=0\longleftrightarrow \mathrm{diag}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{s}=0$$

ただし、diag はベクトルの要素を対角成分にもつ行列。
したがって、元の線形計画問題を解くことは、次の方程式を解くことに等しい。

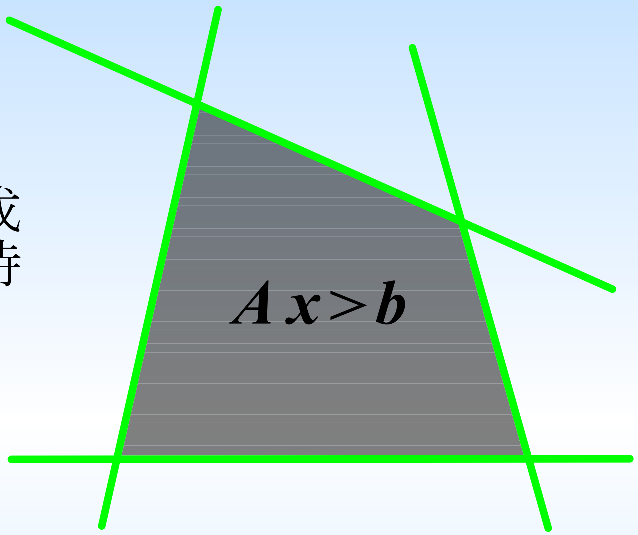


$$\mathrm{diag}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{s}=0,$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geq 0,$$
$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}-\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{s}\geq 0.$$

内点法の原理

主問題、双対問題の実行可能解において、双対ギャップは非負条件を満たす。

$$\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \geq 0$$

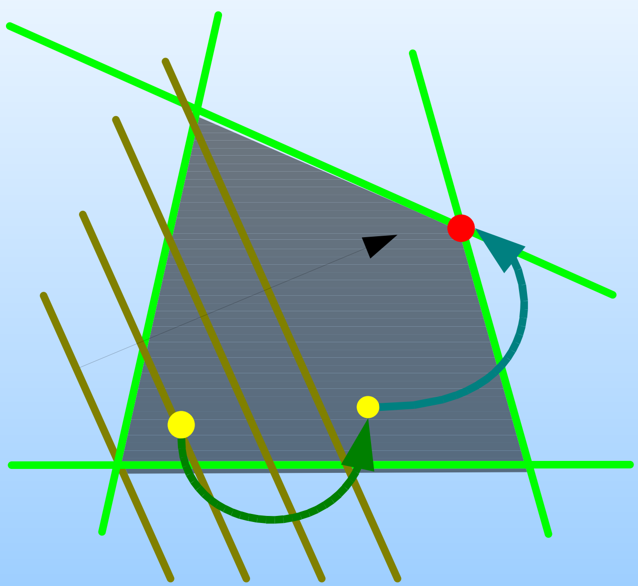


双対ギャップを順次縮小する実行可能解の点列を生成することができれば、最適解の近似を得ることが期待できる。

相補性定理より双対ギャップの縮小はベクトルの縮小と一致する。
そこで、次の連立方程式から成る問題を考える。

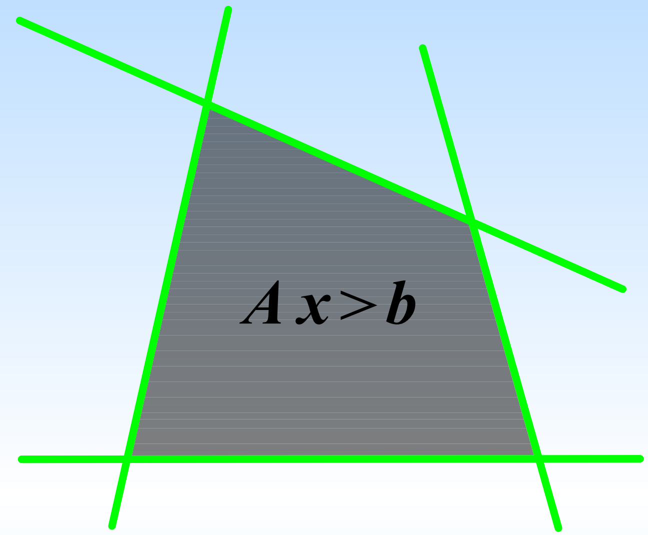
$$\begin{gathered}
\mathrm{diag}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{s} = \lambda \mathbf{1}, \\
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq 0, \\
\boldsymbol{s} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y} - \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{s} \geq 0, \lambda > 0.
\end{gathered}$$

ただし、 $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^T$ で、 $\lambda \to 0$ として反復することで、元の問題の最適値を求める。



内点法の原理

双対ギャップを縮小する反復法のアルゴリズム：
Newton法、
反復のある段階で双対ギャップを与える実行可能解を $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{s}^k)$ とする。



k 段目から k+1 段目の改善量をΔの記号を用いて表せば、解くべき連立方程式は、

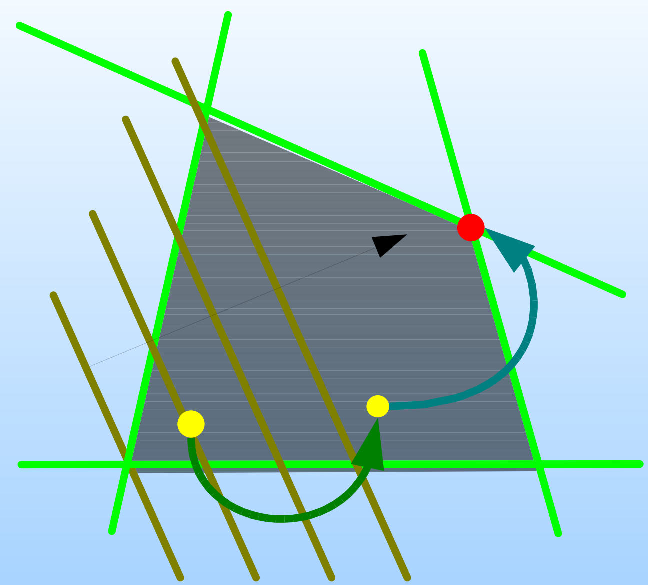
$$(\boldsymbol{X}+\Delta\boldsymbol{X})(\boldsymbol{s}+\Delta\boldsymbol{s})=\lambda\boldsymbol{1},$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}\geq 0,$$
$$\boldsymbol{s}+\Delta\boldsymbol{s}=\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{y}+\Delta\boldsymbol{y})-\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{s}+\Delta\boldsymbol{s}\geq 0, \lambda>0.$$

2次の項を無視して、最初の式を簡単にする。

$$\boldsymbol{S}\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{X}\Delta\boldsymbol{s}=\lambda\boldsymbol{1}$$

改善量は以下の連立方定期の解として定まる

$$\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}=0$$
$$\Delta\boldsymbol{s}=\boldsymbol{A}^T\Delta\boldsymbol{y}$$
$$\boldsymbol{S}\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{X}\Delta\boldsymbol{s}=-[\boldsymbol{X}\boldsymbol{s}-\lambda\boldsymbol{1}]$$



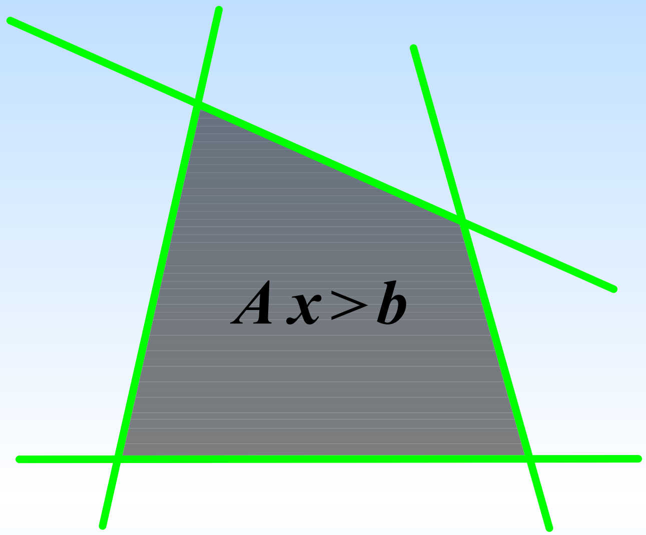
ただし、 $\boldsymbol{S}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{s}), \boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{x})$

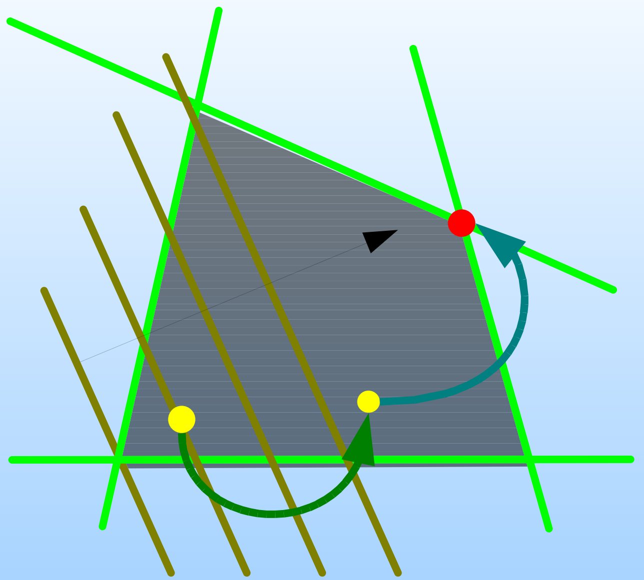
内点法の原理

実際の内点法においては初期の実行可能解、

$$(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{s}^k)$$

また、更新のためのλの決定は簡単ではない。
そこで、具体的な初期解の決定方法や反復の手順について、様々な工夫がされている。





内点法の原理

自己双対型の問題を利用した工夫、主問題と双対問題の実行可能解の与える目的関数値は常に以下の関係式を満たす。

$$\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$

最適解の探索は上式の等号を成立させる、実行可能解の探索に相当する。

主問題	双対問題
maximize $z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}$ subject to $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	minimize $w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}$ subject to $A^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$ の替りに $\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$ という条件式を考える。

主問題、双対問題の制約式と併せて、以下の条件式を得る。

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} &\leq 0 \\ -A^T \boldsymbol{y} + \boldsymbol{c} &\leq 0 \\ \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} &\leq 0 \end{aligned}$$

これをまとめて、

$$\begin{pmatrix} 0 & A & -\boldsymbol{b} \\ -A^T & 0 & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}^T & -\boldsymbol{c}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ 0 \end{pmatrix}$$

として、自己双対型の問題が得られる。

さらに、変数を追加して τ とすれば、最適解の存在判定に利用できることは先週のうつに説明済み。

$$\begin{pmatrix} 0 & A & -\boldsymbol{b} \\ -A^T & 0 & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}^T & -\boldsymbol{c}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x} \\ \tau \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ 0 \end{pmatrix}$$

内点法の原理

主問題と双対問題の双対ギャップをゼロにするという目標のもと、自己双対型の線形計画問題を得た。

$$\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{A}^T & 0 & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}^T & -\boldsymbol{c}^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x} \\ \tau \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ 0 \end{pmatrix}$$

さらに問題を変形して、適当な初期値を与えることを考える。

適当な正の初期値 $\boldsymbol{x}_0 > \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y}_0 > \boldsymbol{0}$ を決める。

$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \tau$ を拡張して、$\tilde{\boldsymbol{b}}, \tilde{\boldsymbol{c}}, \tilde{\boldsymbol{\tau}}$ を用いた問題を考える。

$$\tilde{\boldsymbol{b}} = 1/\boldsymbol{x}_0, \tilde{\boldsymbol{c}} = 1/\boldsymbol{y}_0, \tilde{\boldsymbol{\tau}} = \begin{pmatrix} 0 & 1-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}_0+\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_0 \\ -(1-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}_0+\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_0) & 0 \end{pmatrix}$$

ただし、$1/\boldsymbol{x} = (1/x_1, \ldots, 1/x_N)^T$

$$\text{maxmize } \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{\xi}, \text{subject to } \boldsymbol{M}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{q} \leq 0, \xi \geq 0$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{b} & \tilde{\boldsymbol{b}} \\ -\boldsymbol{A}^T & 0 & \boldsymbol{c} & \tilde{c} \\ \boldsymbol{b}^T & -\boldsymbol{c}^T & \boldsymbol{0} & \tilde{\tau} \\ -\tilde{\boldsymbol{b}} & -\tilde{\boldsymbol{c}}^T & -\tilde{\tau} & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ n+m+2 \end{pmatrix}, \text{初期値 } \boldsymbol{\xi}_0 = (\boldsymbol{y}_0^T, \boldsymbol{x}_0^T, 1, 1)^T$$

演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

課題1：次の線形計画問題を書換えた自己双対型線形計画問題を拡張し、適切な初期解を導きなさい。

minimize $z = x_1 + 2x_2$

subject to

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 \geq 4 \\
&x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0 \\
&x_2 \leq 3 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

課題2：主問題として、実行可能領域が無い場合、目的関数が発散する場合の線形計画問題を具体的に考え、その場合の双対問題、自己双対問題がどのようになるかを確認しなさい。