

# 数理計画法

第4回:巡回と最小添字規則  
(単体法がうまくいかない場合)

教科書:

田村明久・村松正和「最適化法」

(共立出版, 2002年, 定価2900円+税)の1章, 2章を教科書に用いる.

次回の講義までには入荷するそうです。

参考書

金谷健一「これなら分かる最適化数学」

共立出版, 2005年、

伊理正夫「線形計画法」

共立出版, 1986年、

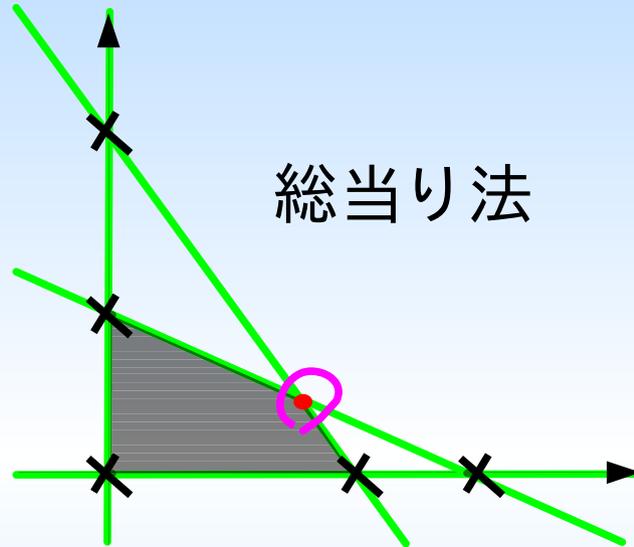
今野浩「カーマーカー特許とソフトウェア: 数学は特許になるか」

中央公論社, 1995年、

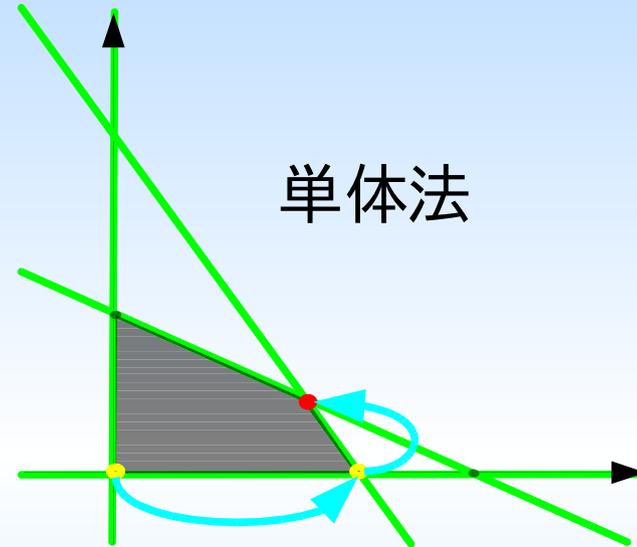
# 復習

線形計画問題の基本解法である「単体法(simplex method)」

- 原理



総当り法



単体法

単体法：目的関数を最適値に近づける隣接端点を選び  
実行可能領域の端点から最適解を探る方法

- 表を使った機械的(でプログラムにし易そう)な実行方法

等式標準形から simplex 表を作成し、単体法の操作を  
simplex 表の上で実行する。

## 演習問題

A4用紙を横にを使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

### コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の  
1日当り生産量は？

課題1：▶ 単体法を用いて最適解を求めなさい。

課題2： グラフを描き、課題1で辿った端点の経路を示しなさい。

simplex表にもとづく

# 演習問題

## コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の1日当り生産量は？

問題に対応する標準形を書き出す

不等式標準形

maximize

$$z = 5x_1 + 4x_2$$

subjecto to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650000$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400000$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800000$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

等式標準形

maximize

$z$

subjecto to

$$15x_1 + 11x_2 + x_3 = 1650000$$

$$10x_1 + 14x_2 + x_4 = 1400000$$

$$9x_1 + 20x_2 + x_5 = 1800000$$

$$z - 5x_1 + 4x_2 = 0$$

$$z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

## 等式標準形

maximize

$z$

subjecto to

$$15x_1 + 11x_2 + x_3 = 1650000$$

$$10x_1 + 14x_2 + x_4 = 1400000$$

$$9x_1 + 20x_2 + x_5 = 1800000$$

$$z - 5x_1 + 4x_2 = 0$$

$$z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

等式標準形に対応する simplex 表を準備する

simplex 表

$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	右辺	
0	15	11	1	0	0	1650000	
0	10	14	0	1	0	1400000	
0	9	20	0	0	1	1800000	
1	-5	-4	0	0	0	0	

基本解として

$$(z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 1650000, 1400000, 1800000)$$

を考える

→  $z, x_3, x_4, x_5$  を基底変数、 $x_1, x_2$  を非基底変数とする

※  $z$  はいつでも基底変数

※ 基本解が実行可能(=全ての変数が非負)であることを確認する

基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数		
$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	右辺	
0	15	11	1	0	0	1650000	
0	10	14	0	1	0	1400000	
0	9	20	0	0	1	1800000	
1	-5	-4	0	0	0	0	

- ・ 実行可能領域の境界を辿り、目的関数を増加させる隣の基本解を探す
- ※ 隣の基本解→基底変数、非基底変数を1つずつ交換した基本解
- ・ 非基底変数→基底変数とした場合に目的関数を増加させる変数を選ぶ
- 目的関数の制約式において負の係数を持つ変数を選ぶ

基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数		
$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	右辺	
0	15	11	1	0	0	1650000	
0	10	14	0	1	0	1400000	
0	9	20	0	0	1	1800000	
1	-5	-4	0	0	0	0	

- ・非基底変数→基底変数とした場合に目的関数を増加させる変数を選ぶ
- 目的関数の制約式において負の係数を持つ変数を選ぶ
- ※ 複数の候補がある場合は？→一概には言えない

基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数		
Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	右辺	
	0	15	11	1	0	0	1650000
	0	10	14	0	1	0	1400000
	0	9	20	0	0	1	1800000
	1	-5	-4	0	0	0	0

- ・基底変数→非基底変数とする変数を選ぶ
- ※ 非基底変数となることで、基本解における変数の値は 0 となる
- その分だけ基底変数となる変数(今回は  $x_1$ )が変化する
- ※ 基底変数となる変数の変化量を求める
- 例えば  $x_3=1650000$  が非基底変数となった場合、 $15x_1$  がその分増加し、 $x_1$  の増加量は  $1650000/15=110000$  となる

基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	基本解		
Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	<del>右辺</del>	$x_1$ の増加量	
	0	15	11	1	0	0	1650000	110000
	0	10	14	0	1	0	1400000	140000
	0	9	20	0	0	1	1800000	200000
	1	-5	-4	0	0	0	0	

・ 基底変数→非基底変数とする変数を選ぶ

※ 非基底変数となることで、基本解における変数の値は 0 となる

→その分だけ基底変数となる変数(今回は  $x_1$ )が変化する

※ 基底変数となる変数の変化量を求める

→例えば  $x_3=1650000$  が非基底変数となった場合、 $15x_1$  がその分増加し、 $x_1$  の増加量は  $1650000/15=110000$  となる

基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	基本解	
Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	<del>右辺</del>	$x_1$ の増加量
0	15	11	1	0	0	1650000	110000
0	10	14	0	1	0	1400000	140000
0	9	20	0	0	1	1800000	200000
1	-5	-4	0	0	0	0	

※ 基底変数→非基底変数の変更が無い制約式では、 $x_1$  の変化量に見合うだけの基底変数の変化が必要になる

→ $x_3$  を非基底変数とした場合の  $x_1$  の 110000 増に対応して残りの制約式ではそれぞれ唯一の基底変数の増減により制約を満たさなければならない

※ 表中の「 $x_1$  の増加量」は非負条件のもとでの最大の変化量であるから、これを超えて基底変数の値を増やすことはできない

→「 $x_1$  の増加量」が一番小さい基底変数→非基底変数の候補を選ぶ( $x_3$ )

・新しい基底変数からなる連立方程式を解き基本解を求める  
 →基底変数の係数が 1 となるように掃き出し操作をする

	基底変数		非基底変数		基底変数			
基底変数	<del>非基底変数</del>	非基底変数	<del>基底変数</del>	基底変数	基底変数			
Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$		基本解	
	0	$15/15=1$	$11/15$	$1/15$	0	0	110000	
$\leftarrow -\times 10$	0	10	14	0	1	0	1400000	
	0	9	20	0	0	1	1800000	
	1	-5	-4	0	0	0	0	

	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数		
基底変数	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$		基本解	
Z	0	1	$11/15$	$1/15$	0	0	110000	
$\leftarrow -\times 9$	0	$10-10=0$	$14-110/15$	$0-10/15$	1	0	$1400000-110000\times 10$	
	0	9	$=20/3$	$=-2/3$	0	1	$=300000$	
$\leftarrow +\times 5$	1	-5	-4	0	0	0	0	

	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数		
基底変数	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$		基本解	
Z	0	1	$11/15$	$1/15$	0	0	110000	
	0	0	$20/3$	$-2/3$	1	0	300000	
	0	0	$67/5$	$-3/5$	0	1	810000	
	1	0	$-1/3$	$1/3$	0	0	550000	

基本解  $(z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (55 \times 10^4, 11 \times 10^4, 0, 0, 3 \times 10^5, 81 \times 10^4)$

・基底変数と非基底変数との交換を続ける

$\div 20/3$

基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数		
Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	基本解	$x_2$ の増加量
0	1	11/15	1/15	0	0	110000	150000
0	0	20/3	-2/3	1	0	300000	45000
0	0	67/5	-3/5	0	1	810000	60447.76
1	0	-1/3	1/3	0	0	550000	

基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数		
Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	基本解	$x_2$ の増加量
$\leftarrow \times 11/15$ 0	1	11/15	1/15	0	0	110000	
0	0	1	-1/10	3/20	0	45000	
$\leftarrow \times 67/5$ 0	0	67/5	-3/5	0	1	810000	
$\leftarrow \times 1/3$ 1	0	-1/3	1/3	0	0	550000	

基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数		
Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	基本解	
0	1	0	-7/50	-11/100	0	77000	
0	0	1	-1/10	3/20	0	45000	
0	0	0	37/50	-201/100	1	207000	
1	0	0	3/10	1/20	0	565000	

最適解： $x_1=77000$ 、 $x_2=45000$ 、のとき  $z=565000$

## 演習問題

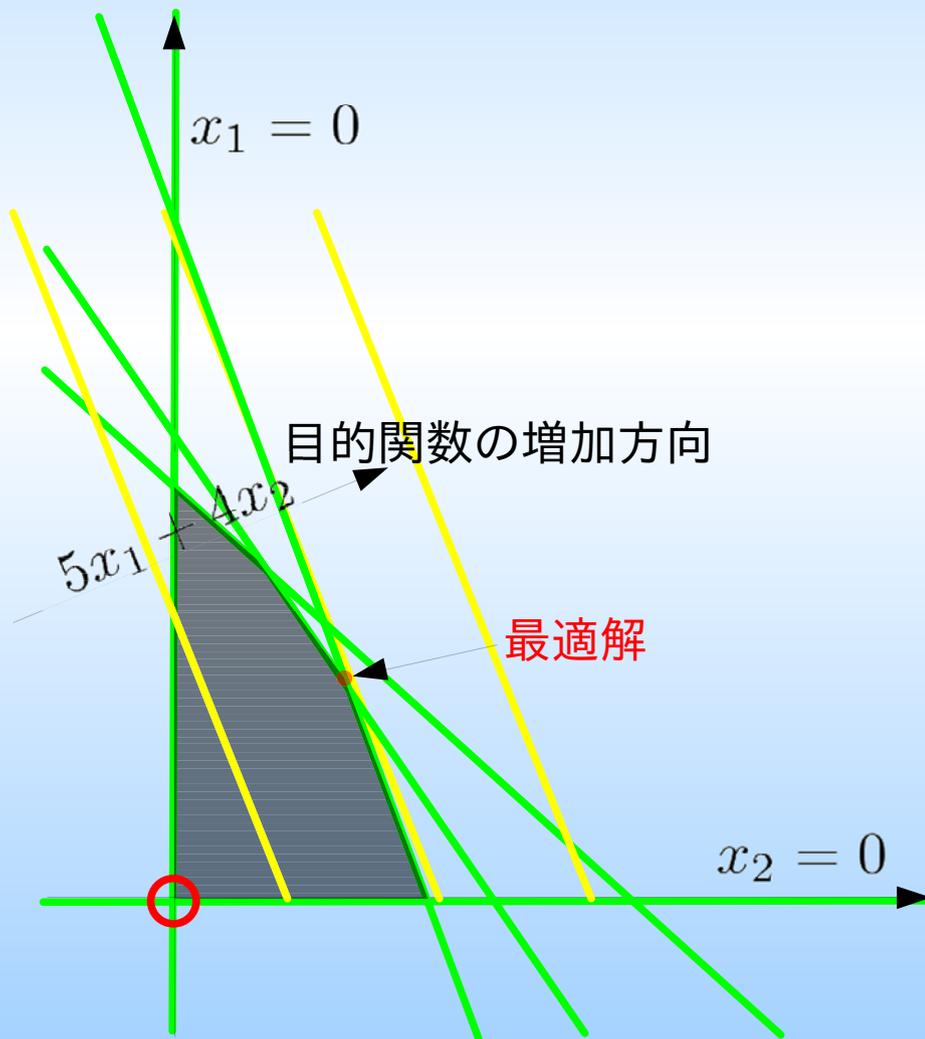
### コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の  
1日当り生産量は？

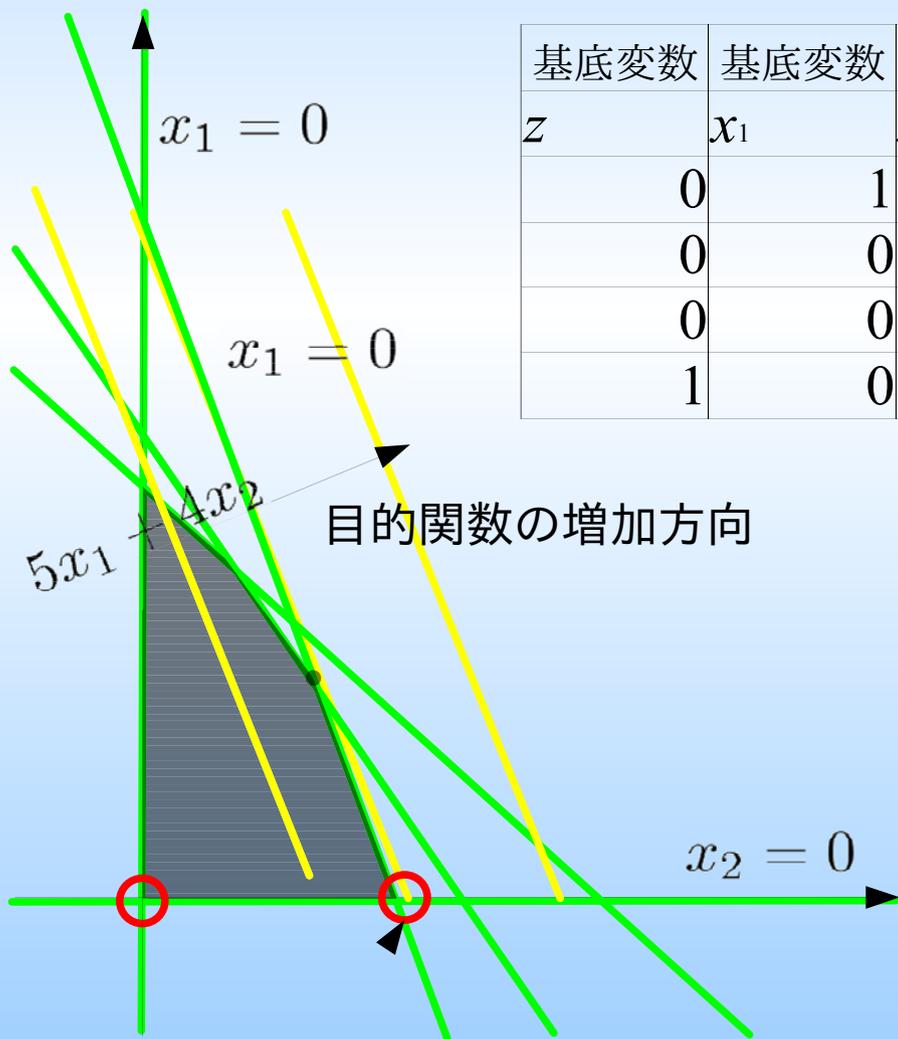
解答：1日当り珈琲飲料を7700kg、珈琲牛乳を4500kg 生産  
したときに1日当りの最大利益 565,000円を得る。

基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数		
$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	基本解	
0	15	11	1	0	0	1650000	$x_3$
0	10	14	0	1	0	1400000	$x_4$
0	9	20	0	0	1	1800000	$x_5$
1	-5	-4	0	0	0	0	$z$



基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数		
$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	基本解	
	0	15	11	1	0	0	1650000 $x_3$
	0	10	14	0	1	0	1400000 $x_4$
	0	9	20	0	0	1	1800000 $x_5$
	1	-5	-4	0	0	0	0 $z$

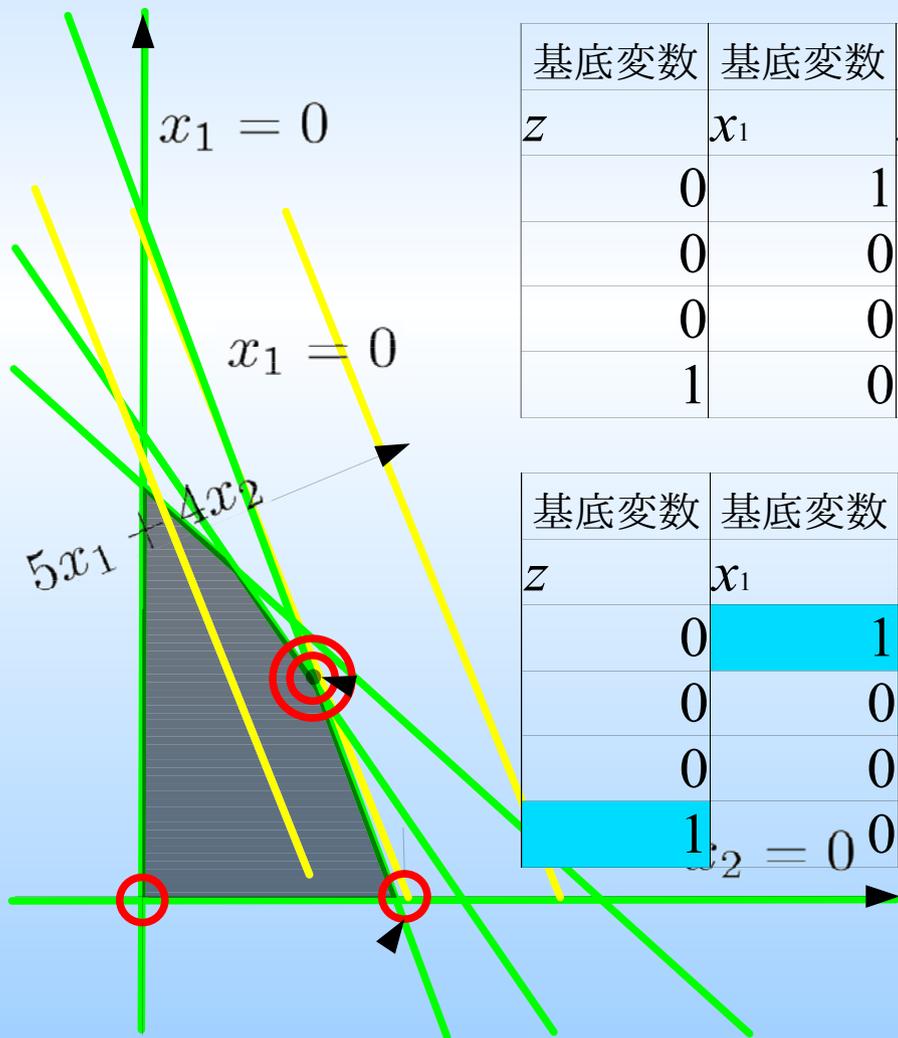
基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数		
$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	基本解	
	0	1	11/15	1/15	0	0	110000 $x_1$
	0	0	20/3	-2/3	1	0	300000 $x_4$
	0	0	67/5	-3/5	0	1	810000 $x_5$
	1	0	-1/3	1/3	0	0	550000 $z$



基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数		
$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	基本解	
0	15	11	1	0	0	1650000	$x_3$
0	10	14	0	1	0	1400000	$x_4$
0	9	20	0	0	1	1800000	$x_5$
1	-5	-4	0	0	0	0	$z$

基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数		
$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	基本解	
0	1	11/15	1/15	0	0	110000	$x_1$
0	0	20/3	-2/3	1	0	300000	$x_4$
0	0	67/5	-3/5	0	1	810000	$x_5$
1	0	-1/3	1/3	0	0	550000	$z$

基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数		
$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	基本解	
0	1	0	-7/50	-11/100	0	77000	$x_1$
0	0	1	-1/10	3/20	0	45000	$x_2$
0	0	0	37/50	-201/100	1	207000	$x_5$
1	0	0	3/10	1/20	0	565000	$z$



## 単体法(simplex method)

### 最も基本的な単体法による解法

- 目的関数を変数として含む制約式を構成する、
- 実行可能解を基本解とする連立方程式を与えるような  
基底変数と非基底変数を選ぶ、
- 目的関数を増加する新しい基底変数の候補を選ぶ、
- 新しい基底変数の最大増加量を小さくするような  
新しい非基底変数の候補を選ぶ、
- 基底変数・非基底変数の交換で得た連立方程式を解く
- 目的関数を増加できる限り変数の交換を繰り返す、
- 目的関数を改善できなくなったら最適解が求まっている。

### 問題点、

- 最初の実行可能解を決める方法が欠けている
- 最適解ではないのに目的関数が改善されない場合がある
- 変数選択の候補を限定できない

## 演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

### ミックスジュース生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題：利益を最大化する2種類のミックスジュースの生産量は？

課題1： simplex 表による単体法を用いて最適解を求めなさい。

課題2： グラフを描き、課題1で辿った端点の経路を示しなさい。

# 巡回

基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	
Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	右辺
0	2	-1	1	1	0	0	0
0	3	1	1	0	1	0	0
0	-5	3	-2	0	0	1	0
1	-1	2	-1	0	0	0	0

基底変数	非基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	
Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	右辺
0	2	-1	1	1	0	0	0
0	3	1	1	0	1	0	0
0	-5	3	-2	0	0	1	0
1	-1	2	-1	0	0	0	0

基底変数	非基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	
Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	右辺
0	2	-1	1	1	0	0	0
0	1	1/3	1/3	0	1/3	0	0
0	-5	3	-2	0	0	1	0
1	-1	2	-1	0	0	0	0

# 巡回

基底変数	非基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	
Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	右辺
0	2	-1	1	1	0	0	0
0	1	1/3	1/3	0	1/3	0	0
0	-5	3	-2	0	0	1	0
1	-1	2	-1	0	0	0	0

基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	
Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	右辺
0	0	-5/3	1/3	1	-2/3	0	0
0	1	1/3	1/3	0	1/3	0	0
0	0	14/3	-1/3	0	5/3	1	0
1	0	7/3	-2/3	0	1/3	0	0

基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	
Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	右辺
0	0	-5/3	1/3	1	-2/3	0	0
0	1	1/3	1/3	0	1/3	0	0
0	0	14/3	-1/3	0	5/3	1	0
1	0	7/3	-2/3	0	1/3	0	0

# 巡回

基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	
Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	右辺
0	0	-5	1	3	-2	0	0
0	1	1/3	1/3	0	1/3	0	0
0	0	14/3	-1/3	0	5/3	1	0
1	0	7/3	-2/3	0	1/3	0	0

基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	
Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	右辺
0	0	-5	1	3	-2	0	0
0	1	2	0	-1	7/3	0	0
0	0	3	0	1	1	1	0
1	0	-1	0	2	-1	0	0

基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	
Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	右辺
0	0	-5	1	3	-2	0	0
0	1	2	0	-1	7/3	0	0
0	0	3	0	1	1	1	0
1	0	-1	0	2	-1	0	0

# 巡回

基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	非基底変数	
Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	右辺
0	0	-5	1	3	-2	0	0
0	1	2	0	-1	7/3	0	0
0	0	1	0	1/3	1/3	1/3	0
1	0	-1	0	2	-1	0	0

基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	非基底変数	
Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	右辺
0	0	0	1	14/3	-1/3	5/3	0
0	1	0	0	-5/3	5/3	-2/3	0
0	0	1	0	1/3	1/3	1/3	0
1	0	0	0	7/3	-2/3	1/3	0

基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	非基底変数	
Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	右辺
0	0	0	1	14/3	-1/3	5/3	0
0	1	0	0	-5/3	5/3	-2/3	0
0	0	1	0	1/3	1/3	1/3	0
1	0	0	0	7/3	-2/3	1/3	0

# 巡回

基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	非基底変数	
Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	右辺
0	0	0	1	14/3	-1/3	5/3	0
0	3/5	0	0	-1	1	-2/5	0
0	0	1	0	1/3	1/3	1/3	0
1	0	0	0	7/3	-2/3	1/3	0

基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	非基底変数	
Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	右辺
0	1/5	0	1	13/3	0	5/3	0
0	3/5	0	0	-1	1	-2/5	0
0	0	1	0	1/3	1/3	1/3	0
1	0	0	0	7/3	-2/3	1/3	0

基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	非基底変数	
Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	右辺
0	0	0	1	14/3	-1/3	5/3	0
0	1	0	0	-5/3	5/3	-2/3	0
0	0	1	0	1/3	1/3	1/3	0
1	0	0	0	7/3	-2/3	1/3	0

