数理計画法

第7回：線形計画問題の行列表現と改訂単体法

復習

演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

課題1：次の線形計画問題を単体法を用いて解き、最適解を求める

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

※注意：最小化問題です。原点は実行可能領域ではありません。

最大化問題の不等式標準形に書き直し、
スラック変数を導入して等式標準形に書き直す。

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & -z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & -z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

※係数が正でないスラック変数を基底変数として
単体法を開始することはできない。

人工変数を導入し2段階単体法のための補助問題を作る

元の問題

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\quad & -z = -x_1 - 2x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\
& -x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\
& x_2 + x_5 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

補助問題

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\quad & \tilde{z} = -x_6 - x_7 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 4 \\
& -x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 2 \\
& x_2 + x_5 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{aligned}
$$

補助問題のsimplex表

基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	
$\tilde{z}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	右辺
0	1	1	-1	0	0	1	0	4
0	-1	2	0	-1	0	0	1	2
0	0	1	0	0	1	0	0	3
1	0	-3	1	1	0	0	0	-6

補助問題を解いて初期基底解を求める

補助問題のsimplex表

基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	基底変数	
$\tilde{z}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	右辺
0	1	1	-1	0	0	1	0	4
0	-1	2	0	-1	0	0	1	2
0	0	1	0	0	1	0	0	3
1	0	-3	1	1	0	0	0	-6

基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	
$\tilde{z}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	右辺
0	3/2	0	-1	+1/2	0	1	-1/2	3
0	-1/2	1	0	-1/2	0	0	+1/2	1
0	0	0	0	+1/2	1	0	-1/2	2
1	-3/2	0	1	-1/2	0	0	3/2	-3

基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	
$\tilde{z}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	右辺
0	1	0	-2/3	+1/3	0	+2/3	-1/2	2
0	0	1	-1/3	-1/3	0	+1/3	+1/3	2
0	0	0	0	+1/2	1	0	-1/2	2
1	0	0	0	0	0	1	1	0

補助問題の最適解を人工目的関数値＝0 人工変数値＝0 で得た→元の問題の実行可能領域

補助問題を解いて初期基底解を求める

補助問題のsimplex表

基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	
$\tilde{z}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	右辺
0	1	0	-2/3	+1/3	0	+2/3	-1/2	2
0	0	1	-1/3	-1/3	0	+1/3	+1/3	2
0	0	0	0	+1/2	1	0	-1/2	2
1	0	0	0	0	0	1	1	0

補助問題の最適解を人工目的関数値＝0 人工変数値＝0 で得た→元の問題の実行可能領域

$$-z = -x_1 - 2x_2 = -\left(\frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + 2\right) - 2\left(\frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + 2\right) = -\frac{4}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 - 6$$

元の問題のsimplex表

基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	
$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺
0	1	0	-2/3	+1/3	0	2
0	0	1	-1/3	-1/3	0	2
0	0	0	0	+1/2	1	2
1	0	0	+4/3	+1/3	0	-6

この時点で最適解となっている

復習

演習問題

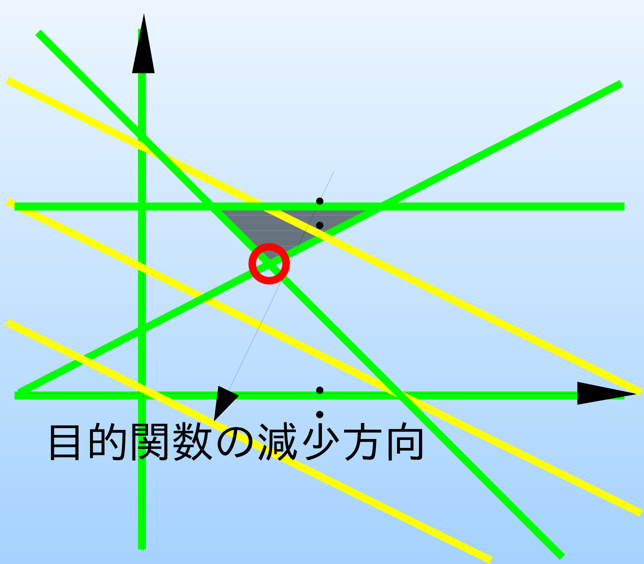
A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

課題1：次の線形計画問題を単体法を用いて解き、最適解を求める

minimize $z = x_1 + 2x_2$

subject to
$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

課題2：グラフを描き、どのような経過を辿り最適解を得たのか示す



線形計画問題の行列表現(等式標準形)

maximize

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$

subject to

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

maximize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$$

$$\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} = (0, 0, \ldots, 0) \qquad \boldsymbol{1}^{\mathrm{T}} = (1, 1, \ldots, 1)$$

$$\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{q} \Leftrightarrow p_j \leq q_j,\ j = 1, \ldots,$$

線形計画問題の行列表現(不等式標準形)

maximize

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$

subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \le b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \le b_n$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_m \ge 0$$

maximize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$$

$$\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} = (0, 0, \ldots, 0) \qquad \boldsymbol{1}^{\mathrm{T}} = (1, 1, \ldots, 1)$$

$$\boldsymbol{p} \le \boldsymbol{q} \Leftrightarrow p_j \le q_j,\ j = 1, \ldots,$$

線形計画問題の行列表現(単体法)

maximize

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$

subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

maximize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

基底変数：$\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}\} \subset \{x_1, \ldots, x_m\} \qquad (n \leq m)$

非基底変数：$\{x_{j_{n+1}}, \ldots, x_{j_m}\} = \{x_1, \ldots, x_m\} \setminus \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}\}$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}) \qquad \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} = (x_{j_{n+1}}, \ldots, x_{j_m})$$

$$\{c_{j_1}, \ldots, c_{j_m}\} = \{c_1, \ldots, c_m\} \quad \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} = (c_{j_1}, \ldots, c_{j_n}) \quad \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} = (c_{j_{n+1}}, \ldots, c_{j_m})$$

$$\{a_{kj_1}, \ldots, a_{kj_m}\} = \{a_{k1}, \ldots, a_{km}\} \qquad k = 1, \ldots, n$$

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} a_{1j_1} & \ldots & a_{1j_n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & \ldots & a_{nj_n} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} a_{1j_{n+1}} & \ldots & a_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nj_{n+1}} & \ldots & a_{nj_m} \end{pmatrix}$$

線形計画問題の行列表現

maximize

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$

subject to

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

maximize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

maximize

$$z = c_{j_1}x_{j_1} + \cdots + c_{j_n}x_{j_n} + c_{j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m}x_{j_m}$$

subject to

$$\begin{aligned} a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n}x_{j_n} + a_{1j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m}x_{j_m} &= b_1 \\ a_{2j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n}x_{j_n} + a_{2j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m}x_{j_m} &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{nj_1}x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n}x_{j_n} + a_{nj_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m}x_{j_m} &= b_n \end{aligned}$$

$$x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}, x_{j_{n+1}} \ldots, x_{j_m} \geq 0$$

線形計画問題の行列表現

maximize

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$

subject to

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

maximize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

maximize

$$z = \underbrace{c_{j_1}x_{j_1} + \cdots + c_{j_n}x_{j_n}}_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}} + \underbrace{c_{j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m}x_{j_m}}_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}}$$

subject to

$$\begin{aligned}
\underbrace{\begin{matrix} a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n}x_{j_n} \\ a_{2j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n}x_{j_n} \\ \vdots \\ a_{nj_1}x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n}x_{j_n} \end{matrix}}_{\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}}
\begin{matrix} + \\ + \\ \\ + \end{matrix}
\underbrace{\begin{matrix} a_{1j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m}x_{j_m} \\ a_{2j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m}x_{j_m} \\ \vdots \\ a_{nj_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m}x_{j_m} \end{matrix}}_{\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}}
\begin{matrix} = b_1 \\ = b_2 \\ \\ = b_n \end{matrix}
\end{aligned}$$

$$\underbrace{x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}}, \underbrace{x_{j_{n+1}}, \ldots, x_{j_m}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}} \geq 0$$

線形計画問題の行列表現

maximize

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_m x_m$$

subject to

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

maximize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

maximize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \geq \boldsymbol{0}$$

単体法の各段階での操作は z が増加するように $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}, \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}},$ を更新するものになっている。

線形計画問題の行列表現(単体法)

maximize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$$

原点を実行可能領域に持つ線形計画問題の不等式標準形を考える。

maximize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \ge \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

スラック変数 $\boldsymbol{x}'^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_n)$ を導入して等式標準形とsimplex表を得る。

$$\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$z - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0$$

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{b}$$
$$z - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = 0$$

最初のsimplex表
$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{A}$
このときの基底解は
$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

単体法の操作により各行列・ベクトルが更新されるが $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I}$ と $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{0}$ は保たれるので基底解は常に $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{0}$ であり終了時の $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{b}$ が最適解となる。

※更新される必要があるのは非基底変数の選択時に必要な $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}$ と基底変数の選択時に必要な $\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}$ と $\boldsymbol{b}$ だけ。

※単体法の操作で繰り返される $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I}$ を維持するピボット変換により誤差が蓄積する(誤差を含む係数行列を元に計算が繰り返される。)

線形計画問題の行列表現(改訂単体法)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
z - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= 0
\end{aligned}
$$

最初のsimplex表

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{A}$

このときの基底解は

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

単体法の操作では基底部分と非基底部分の分類が変更されるだけと考えて行列のデータはそのままで、変数の基底・非基底の区別だけを更新する。

maximize

$$z = \underbrace{c_{j_1}x_{j_1} + \cdots + c_{j_n}x_{j_n}}_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}} + \underbrace{c_{j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m}x_{j_m}}_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}}$$

subject to

$$
\underbrace{\begin{matrix}
a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n}x_{j_n} \\
a_{2j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n}x_{j_n} \\
\\
a_{nj_1}x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n}x_{j_n}
\end{matrix}}_{\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}}
\begin{matrix} + \\ + \\ \vdots \\ + \end{matrix}
\underbrace{\begin{matrix}
a_{1j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m}x_{j_m} \\
a_{2j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m}x_{j_m} \\
\\
a_{nj_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m}x_{j_m}
\end{matrix}}_{\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}}
\begin{matrix} = b_1 \\ = b_2 \\ \\ = b_n \end{matrix}
$$

$$\underbrace{x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}}, \underbrace{x_{j_{n+1}}, \ldots, x_{j_m}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}} \geq 0$$

線形計画問題の行列表現(改訂単体法)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
z - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= 0
\end{aligned}
$$

最初のsimplex表

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{A}$

このときの基底解は

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

単体法の操作では基底部分と非基底部分の分類が変更されるだけと考えて行列のデータはそのままで、変数の基底・非基底の区別だけを更新する。

maximize

$$z = c_{j_1}x_{j_1} + \cdots + c_{j_n}x_{j_n} + c_{j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m}x_{j_m}$$

subject to

$$
\begin{aligned}
a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n}x_{j_n} + a_{1j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m}x_{j_m} &= b_1 \\
a_{2j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n}x_{j_n} + a_{2j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m}x_{j_m} &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{nj_1}x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n}x_{j_n} + a_{nj_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m}x_{j_m} &= b_n
\end{aligned}
$$

$$x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}, x_{j_{n+1}}, \ldots, x_{j_m} \geq 0$$

線形計画問題の行列表現(改訂単体法)

$$\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$z - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0$$

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{b}$$
$$z - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = 0$$

最初のsimplex表

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{A}$$

このときの基底解は

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}$ が正則であるなら変数の交換に必要な情報は計算で求まる。

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$$
$$z = \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}) + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$$

（必要なのは$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$の係数 $-\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}$ ）

maximize

$$z = c_{j_1}x_{j_1} + \cdots + c_{j_n}x_{j_n} + c_{j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m}x_{j_m}$$

subject to

$$\begin{aligned}
a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n}x_{j_n} + a_{1j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m}x_{j_m} &= b_1 \\
a_{2j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n}x_{j_n} + a_{2j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m}x_{j_m} &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{nj_1}x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n}x_{j_n} + a_{nj_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m}x_{j_m} &= b_n
\end{aligned}$$

$$x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}, x_{j_{n+1}}, \ldots, x_{j_m} \geq 0$$

※基底・非基底変数の分類(と $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}$)だけを更新する改訂単体法が考えられる。

単体法

単体法は次の行列表現に対応するsimplex表の更新により最適解を得る。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= 0 \end{aligned}$$

simplex 表の更新は基底変数と非基底変数一つずつの交換対応し z が増加するように交換する変数が選ばれる。
また、その過程で必要となる $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}$ の値や $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$ の係数 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}$ を求めるために $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I}$ を保つピボット変換が実施される。

改訂単体法

改訂単体法では次の行列表現ベクトルや行列の値は更新せず、代りに基

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= 0 \end{aligned}$$

底・非基底変数の分類を記憶し $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}$ や $\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}$ は変数の情報を元に制約式全体の係数行列から求めるものとする。
その過程で $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}$ が正則であるなら変数の交換に必要な情報は次の計算で

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ z &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}})\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{aligned}$$

求まる。

演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

課題1：次の線形計画問題を単体法を用いて解き、最適解を求める

minimize $\quad z = x_1 + 2x_2$

subject to
$$
\begin{aligned}
& x_1 + x_2 \geq 4 \\
& x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

※注意：最小化問題です。原点は実行可能領域ではありません。

2段階単体法の代わりに右の問題を通常の単体法で解き
その最適解を元の問題の最適解と比較する

元の問題

max. $\quad -z = -x_1 - 2x_2$

s.t.
$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\
-x_1 + 2x_2 - x_4 &= 2 \\
x_2 + x_5 &= 3 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

罰則付問題

max. $\quad \tilde{z} = -x_1 - 2x_2 - P(x_6 + x_7)$

s.t.
$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 + x_6 &= 4 \\
-x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 &= 2 \\
x_2 + x_5 &= 3 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 &\geq 0
\end{aligned}
$$

P にはとても大きい数、例えば24000等を用いる

演習問題

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

課題1：次の線形計画問題を単体法を用いて解き、最適解を求める

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & z = x_1 - x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_1 + x_2 \ge 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

※注意：原点は実行可能領域ではありません。

2段階単体法の代わりに右の問題を通常の単体法で解き
その最適解を元の問題の最適解と比較する

元の問題

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & z = x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

罰則付問題

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \tilde{z} = x_1 - x_2 - Px_5 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

P にはとても大きい数を用いる