

数理計画法

第7回：罰則付単体法と単体法の行列表現

復習：演習（単体法の2段解法）

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

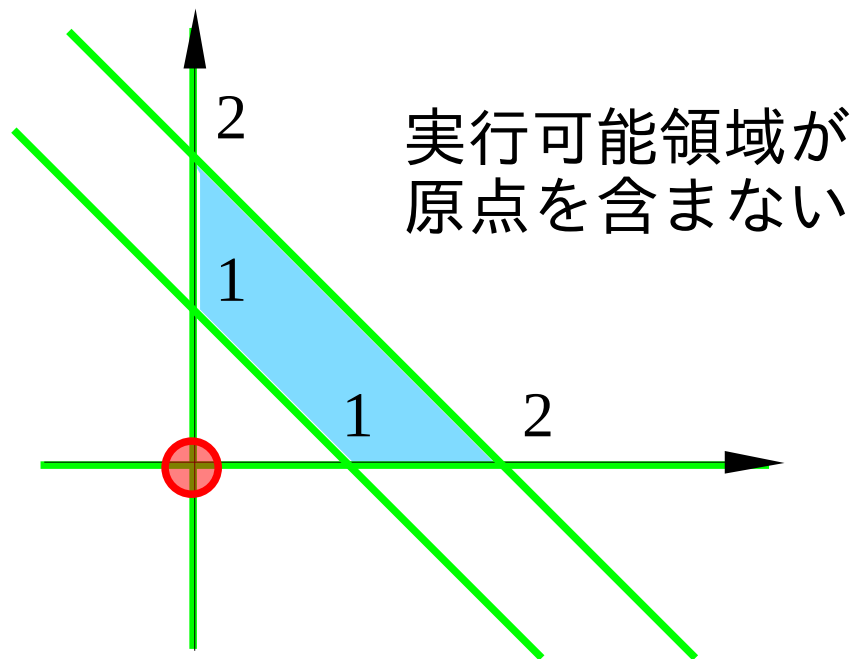
$$\text{maximize } z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



復習: 演習 (単体法の2段解法)

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

等式標準形

$$\begin{aligned} & \text{minimize } z \\ & \text{subject to} \\ & \quad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & \quad x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ & \quad z + x_1 + 2x_2 = 0 \\ & \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

人工問題の等式標準形

$$\begin{aligned} & \text{minimize } z^* \\ & \text{subject to} \\ & \quad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & \quad x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\ & \quad z^* + x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ & \quad (z + x_1 + 2x_2 = 0) \\ & \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

復習: 演習 (単体法の2段解法)

- 人工問題(or補助問題)の等式標準形に対応して simplex 表を作る
- 単体法を用いて第1段、第2段の線形計画問題を解く

人工問題の等式標準形

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize } z^* \\
 & \text{subject to} \\
 & \quad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
 & \quad x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\
 & \quad z^* + x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
 & \quad (z + x_1 + 2x_2 = 0) \\
 & \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

z, z^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	
0	1	1	0	-1	1	1	
z^*	1	1	0	-1	0	1	
z	1	1	2	0	0	0	

復習: 演習 (単体法の2段解法)

- 人工問題(=z* 最小化問題)を解く
6変数3制約なので、基底/非基底変数は 3/3

z, z^*	x_1	非 x_2	非 x_3	x_4	非 x_5	非 定数	最大増加量
0	1	1	1	1	0	0	2 /1=2
0	1	1	1	0	-1	1	1 /1=1
z^*	1	1	1	0	-1	0	1
z	1	1	2	0	0	0	0

z, z^*	x_1	x_2	非 x_3	x_4	非 x_5	非 定数	最大増加量
0	0	0	1	1	-1	1	2 $\rightarrow -\times 1$
0	0	1	1	0	-1	1	1
z^*	0	0	0	0	0	-1	0
z	0	1	1	0	1	-1	-1

復習：演習（単体法の2段解法）

- 非基底変数の係数が非正なので終了
 $z^*=0$ となる最適解が求まった→成功

z, z^*	x_1	x_2	非	x_3	x_4	非	x_5	非	定数	最大増加量
0	0	0	0	1	1	-1	1			
0	1	1	1	0	-1	1	1			
z^*	1	0	0	0	0	-1	0			
z	1	0	1	0	1	-1	-1			

- 元の線形計画問題 = z の最小化問題を解く

z, z^*	x_1	x_2	非	x_3	x_4	非	x_5	非	定数	最大増加量
0	0	0	0	1	1	-1	1			
0	1	1	1	0	-1	1	1			
z^*	1	0	0	0	0	-1	0			
z	1	0	1	0	1	-1	-1			

罰則付単体法

- 2段階法における人工(補助)問題と元の問題の関係
 - まず z^* を最小化して、次に z を最小化する
- 人工問題を同時に解く方法=罰則付単体法
 - z の最小化と人工変数=0 が成立すれば良い
 - z, z^* を同時($z^*=0$ 優先)に最適化=罰則付単体法
 - $z + M \times z^*$ (M は大きな数) を最小化する
 M の影響が大きいため z^* の最小化 $\rightarrow z^*=0$ が優先的に実現される

罰則付単体法

- 2段解法の人工(補助)問題と元の問題を併せた罰則付の線形計画問題を作る

等式標準形

$$\begin{aligned} & \text{minimize } z \\ & \text{subject to} \\ & \quad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & \quad x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ & \quad z + x_1 + 2x_2 = 0 \\ & \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

罰則付問題の等式標準形

$$\begin{aligned} & \text{minimize } z + Mz^* \\ & \text{subject to} \\ & \quad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & \quad x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\ & \quad z^* + x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ & \quad (z + x_1 + 2x_2 = 0) \\ & \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

罰則付単体法

- 罰則付問題の等式標準形に対応して simplex 表を作る

$z+M$	z^*	x_1	非	x_2	非	x_3		x_4	非	x_4		定数	最大増加量
	0		1		1		1		0		0	2	
	0		1		1		0		-1		1	1	
	1		$1+M$		$2+M$		0		$-M$		0	M	

- $M=100$ とした場合

$z+M$	z^*	x_1	非	x_2	非	x_3		x_4	非	x_4	非	定数	最大増加量
	0		1		1		1		0		0	2	$/1=2$
	0		1		1		0		-1		1	1	$/1=1$
	1		101		102		0		-100		0	100	

$z+M$	z^*	x_1	0 非	x_2	0	x_3		x_4	1 非	x_4	-1 非	定数	1	最大増加量
	0		<u>1</u>		<u>1</u>		1		<u>0</u>		<u>0</u>	<u>2</u>		$\times 1$
	0		1		<u>1</u>		0		-1		1	1		$\times 102$
	1		<u>101</u>		<u>102</u>		0		<u>-100</u>		<u>0</u>	<u>100</u>		
			-1		0				2		-102		-2	

罰則付単体法

- 2段階法における人工(補助)問題と元の問題の関係
 - まず z^* を最小化して、次に z を最小化する
- 人工問題を同時に解く方法=罰則付単体法
 - z の最小化と人工変数=0 が成立すれば良い
 - z, z^* を同時($z^*=0$ 優先)に最適化=罰則付単体法
 - $z + M \times z^*$ (M は大きな数) を最小化する
 M の影響が大きいため z^* の最小化 $\rightarrow z^*=0$ が優先的に実現される
- 安全な罰則(M)を決める方法が無い
 - M を任意の数よりも大きい数として扱う
 - 2段階法と同じ手間になる

線形計画問題の行列表現(等式標準形)

minimize

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$

subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n$$

$$x_1, x_2, \dots, x_m \geq 0$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

minimize

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

subject to

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{c}^T = (c_1, c_2, \dots, c_m)$$

$$\mathbf{p} \leq \mathbf{q} \Leftrightarrow p_j \leq q_j, \quad j = 1, \dots,$$

線形計画問題の行列表現(不等式標準形)

minimize

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$

subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \geq b_2$$

\vdots

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \geq b_n$$

$$x_1, x_2, \dots, x_m \geq 0$$

minimize

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

subject to

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

線形計画問題の行列表現(単体法)

maximize

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$

subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2$$

⋮

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n$$

$$x_1, x_2, \dots, x_m \geq 0$$

minimize

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

subject to

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

基底変数 : $\{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}\} \subset \{x_1, \dots, x_m\} \quad (n \leq m)$

非基底変数 : $\{x_{j_{n+1}}, \dots, x_{j_m}\} = \{x_1, \dots, x_m\} \setminus \{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}\}$

$$\mathbf{x}_B^T = (x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) \quad \mathbf{x}_N^T = (x_{j_{n+1}}, \dots, x_{j_m})$$

$$\{c_{j_1}, \dots, c_{j_m}\} = \{c_1, \dots, c_m\} \quad \mathbf{c}_B^T = (c_{j_1}, \dots, c_{j_n}) \quad \mathbf{c}_N^T = (c_{j_{n+1}}, \dots, c_{j_m})$$

$$\{a_{kj_1}, \dots, a_{kj_m}\} = \{a_{k1}, \dots, a_{km}\} \quad k = 1, \dots, n$$

$$\mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & \cdots & a_{nj_n} \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} a_{1j_{n+1}} & \cdots & a_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nj_{n+1}} & \cdots & a_{nj_m} \end{pmatrix}$$

線形計画問題の行列表現

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \\ & z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ &\text{subject to} \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

minimize

$$z = c_{j_1} x_{j_1} + \cdots + c_{j_n} x_{j_n} + c_{j_{n+1}} x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m} x_{j_m}$$

subject to

$$a_{1j_1} x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n} x_{j_n} + a_{1j_{n+1}} x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m} x_{j_m} = b_1$$

$$a_{2j_1} x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n} x_{j_n} + a_{2j_{n+1}} x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m} x_{j_m} = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{nj_1} x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n} x_{j_n} + a_{nj_{n+1}} x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m} x_{j_m} = b_n$$

$$x_{j_1}, \dots, x_{j_n}, x_{j_{n+1}}, \dots, x_{j_m} \geq 0$$

基底変数

非基底変数

線形計画問題の行列表現

minimize

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N$$

subject to

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$$

単体法の各段階での操作は
 z が減少するように
 $\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N, \mathbf{A}_B, \mathbf{A}_N$, を更新
 するものになる。

minimize

$$z = \underbrace{c_{j_1} x_{j_1} + \cdots + c_{j_n} x_{j_n}}_{\mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B} + \underbrace{c_{j_{n+1}} x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m} x_{j_m}}_{\mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N}$$

subject to

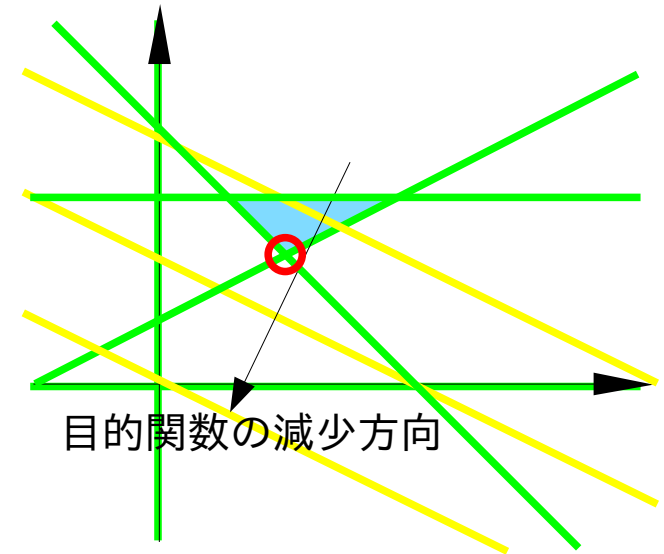
$$\begin{array}{l} a_{1j_1} x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n} x_{j_n} + a_{1j_{n+1}} x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m} x_{j_m} = b_1 \\ a_{2j_1} x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n} x_{j_n} + a_{2j_{n+1}} x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m} x_{j_m} = b_2 \\ \vdots \\ a_{nj_1} x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n} x_{j_n} + a_{nj_{n+1}} x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m} x_{j_m} = b_n \end{array}$$

$$\underbrace{x_{j_1}, \mathbf{x}_B, x_{j_n}}_{\mathbf{x}_B}, \underbrace{x_{j_{n+1}}, \mathbf{x}_N, x_{j_m}}_{\mathbf{x}_N} \geq \mathbf{0}$$

演習

課題: 次の線形計画問題を単体法を用いて解く

$$\begin{aligned} & \text{minimize } z = x_1 + 2x_2 \\ & \text{subject to} \\ & x_1 + x_2 \geq 4, \quad x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0 \\ & x_2 \leq 3, \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



注意: 原点は実行可能領域ではありません
ヒント:

$$\begin{aligned} \text{min. } & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t. } & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{min. } & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t. } & x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$