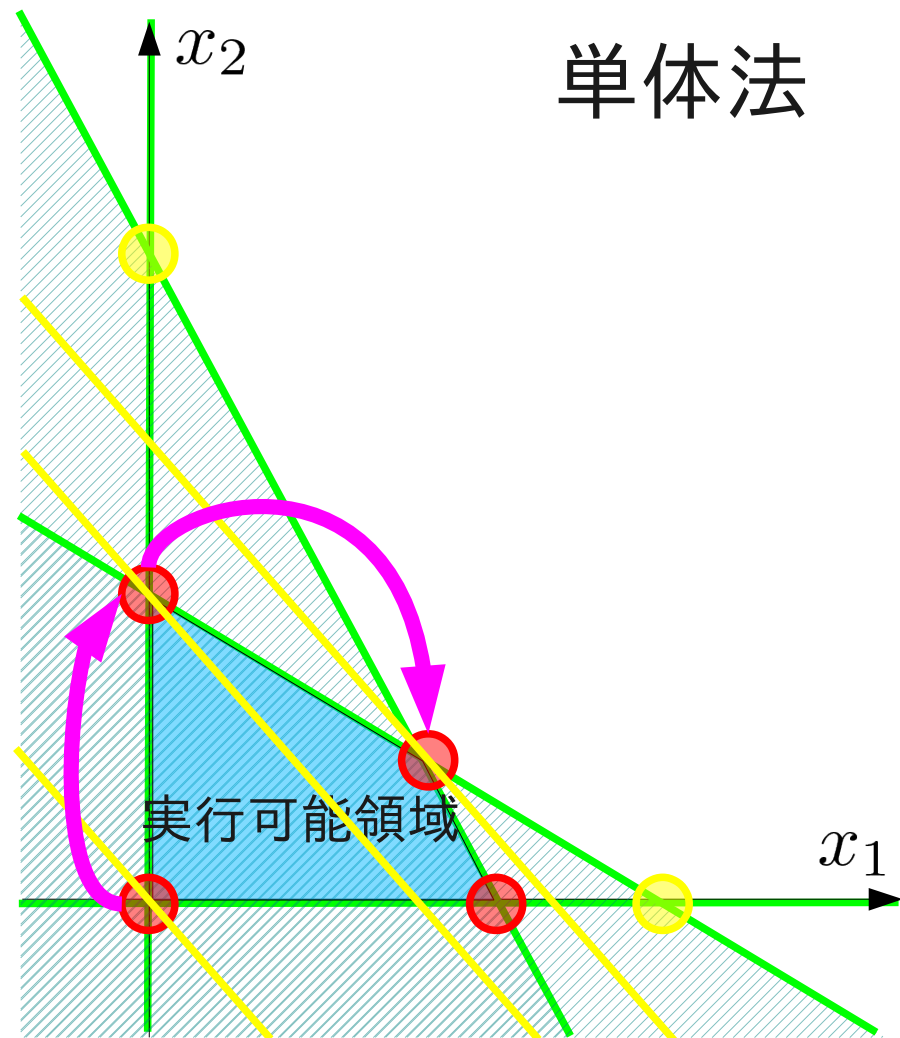
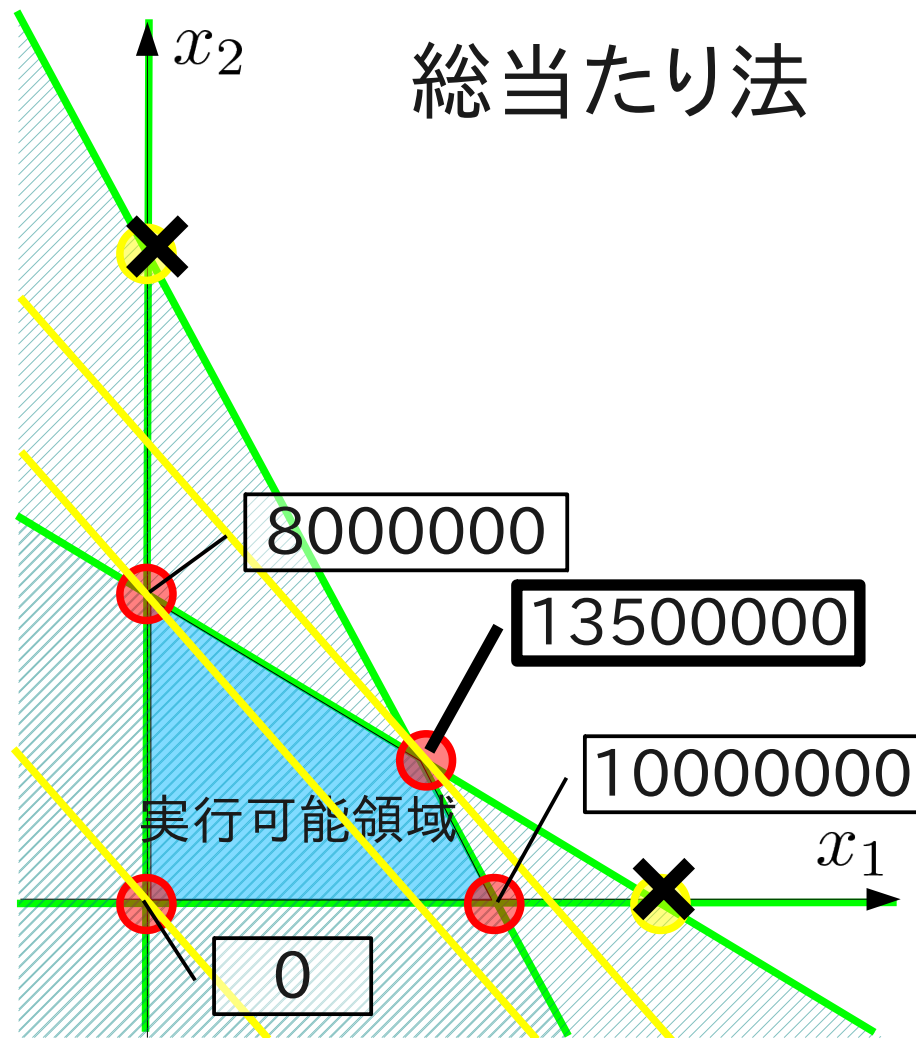


数理計画法

第4回: 単体法の実践

復習：単体法



復習：演習問題

コーヒードリンクの生産に必要な原料とその利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/ 日
ミルク	10g	14g	1400kg/ 日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/ 日
利益	5円	4円	

最大の利益を与えるコーヒードリンクの生産量は？

1. 課題1 (simplex表にもとづく)単体法を用いて最適解を求めなさい
2. グラフを描き、1で辿った端点の経路を示しなさい

コーヒードリンクの生産に必要な原料とその利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

変数の定義を決める

$x_1 \times 100[\text{g}]$ $x_2 \times 100[\text{g}]$ 珈琲飲料、珈琲牛乳の生産量

問題に対応する標準形を書き出す

線形計画問題

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subjecto to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650000$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400000$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800000$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

等式標準形

minimize

$$z = -5x_1 - 4x_2$$

subjecto to

$$15x_1 + 11x_2 + x_3 = 1650000$$

$$10x_1 + 14x_2 + x_4 = 1400000$$

$$9x_1 + 20x_2 + x_5 = 1800000$$

$$z + 5x_1 + 4x_2 = 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

等式標準形

minimize

$$z = -5x_1 - 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 + x_3 = 1650000$$

$$10x_1 + 14x_2 + x_4 = 1400000$$

$$9x_1 + 20x_2 + x_5 = 1800000$$

$$z + 5x_1 + 4x_2 = 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

等式標準形をもとにして、最初の simplex 表を作る

Z	X1	X2	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

simplex表の操作により単体法を実行する。

Z	X1	X2	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

係数が1になっている変数のうち、目的関数と合せて制約条件と同数の変数を基底変数とする。今回の例では、

後から追加した x_3, x_4, x_5

simplex表の操作により単体法を実行する。

Z	X1	X2	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

基底変数ではない変数が
非基底変数になる、
今回の例では、
元々の変数 x_1, x_2

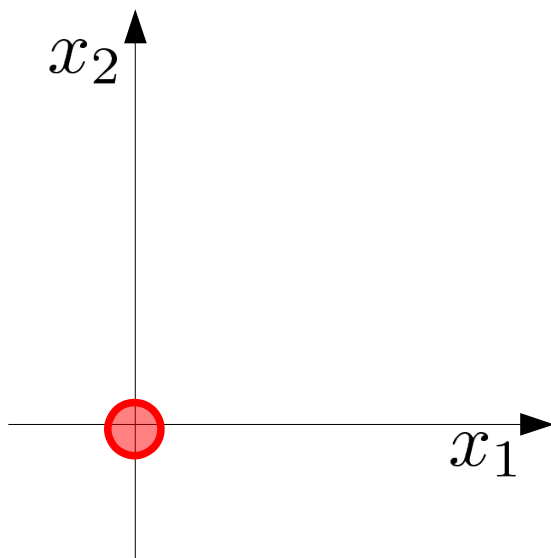
simplex表の操作により単体法を実行する。

Z	基	X1	非	X2	非	X3	基	X4	基	X5	基	定数	最大増加量
		15		11		1						1650000	
		10		14				1				1400000	
		9		20						1		1800000	
1		5		4								0	

基底変数・非基底変数の区別
を判り易く示す。
どちらか片方だけでも十分。

simplex表の操作により単体法を実行する。

Z	基	X1	非	X2	非	X3	基	X4	基	X5	基	定数	最大増加量
			15		11		1					1650000	
			10		14				1			1400000	
			9		20					1		1800000	
	1		5		4							0	



$$\begin{aligned}
 15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650000 \\
 10x_1 + 14x_2 + x_4 &= 1400000 \\
 9x_1 + 20x_2 + x_5 &= 1800000 \\
 z + 5x_1 + 4x_2 &= 0
 \end{aligned}$$

$(z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$
 $= (0, 0, 0, 1650000, 1400000, 1800000)$

非基底変数はゼロ、残りの変数は非負でなければならない。今回はOK

基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 非	X2 非	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

非基底変数にだけシルシを付ける。
 実際の作業では、これが最初の段階になる。
 以降、基底変数 \leftrightarrow 非基底変数の交換を進める。

基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 非	X2 非	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

1. 交換により目的関数が改善(減少)する。

$$z = 0 \rightarrow z + 5x_1 = 0 \text{ or } z + 4x_2 = 0$$

- 係数が正ならば目的関数は改善(減少)する。

まず、非基底変数の中から基底変数に換えるものを決める。
 入れ換えで目的関数が改善するものを選ばなくてはならない、
 例では x_1, x_2 を基底変数とした場合の目的関数値を考える。
 目的関数の定義式より係数が正の変数を選べば良い。

基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 非	X2 非	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

1. 交換により目的関数が改善(減少)する。

$$z = 0 \rightarrow z + 5x_1 = 0 \text{ or } z + 4x_2 = 0$$

- 係数が正ならば目的関数は改善(減少)する。

今回は x_1, x_2 のいずれとも係数が正なので、どちらでもOK。
 とりあえず、目的関数が速く減るように大きい方を選ぶこと
 にして、 x_1 の方を非基底変数→基底変数とする。

基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 非	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	$/15 = 110000$
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

次に、 x_1 との交換の相手を基底変数の x_3, x_4, x_5 から見つける。
 交換後に全ての変数が非負条件を満たすものを選ぶ。
 例えば、 x_3 が非基底変数になると現れる等式を考える。

2. 交換後も非負条件を満たす。

$$x_3 = 1650000 \rightarrow 15x_1 = 1650000$$

- 定数項を係数で割り最大増加量を求める。
- 最小の最大増加量を与える非基底変数を選ぶ。

基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 非	X2 非	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	$/15 = 110000$
	10	14		1		1400000	$/10 = 140000$
	9	20			1	1800000	$/9 = 200000$
1	5	4				0	

同様に x_3, x_4, x_5 非基底変数となった場合を考え、 x_1 の増加量を比較して、最小の増加量を与える交換を採用する。

2. 交換後も非負条件を満たす。

$$x_3 = 1650000 \rightarrow 15x_1 = 1650000$$

- 定数項を係数で割り最大増加量を求める。
- 最小の最大増加量を与える非基底変数を選ぶ。

基底変数と非基底変数の交換候補を決める

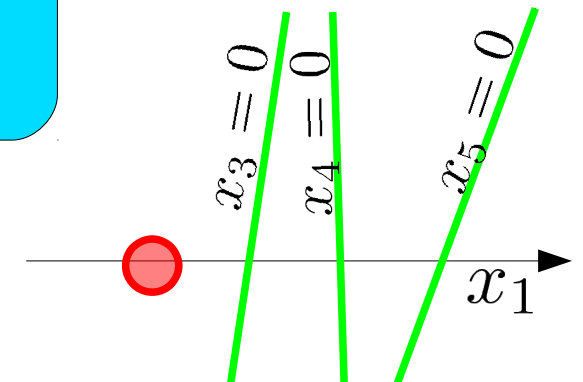
Z	X1 非	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	$/15 = 110000$
	10	14		1		1400000	$/10 = 140000$
	9	20			1	1800000	$/9 = 200000$
1	5	4				0	

最小の増加量を与える交換により、新しい交点の実行可能領域外に出ないようにする

2. 交換後も非負条件を満たす。

$$x_3 = 1650000 \rightarrow 15x_1 = 1650000$$

- 定数項を係数で割り最大増加量を求める。
- 最小の最大増加量を与える非基底変数を選ぶ。



基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 非	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	$/15 = 110000$
	10	14		1		1400000	$/10 = 140000$
	9	20			1	1800000	$/9 = 200000$
1	5	4				0	

ここまでの作業でsimplex表は上のようになる。
この状態に対応する連立方程式は

$$\begin{aligned}
 15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650000 \\
 10x_1 + 14x_2 + x_4 &= 1400000 \\
 9x_1 + 20x_2 + x_5 &= 1800000 \\
 z + 5x_1 + 4x_2 &= 0
 \end{aligned}$$

なので、これを解く必要がある。

交換後の連立方程式を解く

Z	X1 非	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
$\times \frac{1}{15}$	15	11	1			1650000	$/15 = 110000$
	1	$11/15$	$1/15$			110000	
		10	14		1	1400000	
		9	20		1	1800000	
	1	5	4			0	

基底変数に関する連立 $x_1 = 110000$

~~$15x_1 = 1650000$~~

$10x_1 + x_4 = 1400000$

$9x_1 + x_5 = 1800000$

$z + 5x_1 = 0$

新たに基底変数となり、ゼロから正に値の変わる
 x_1 の値を求めるために、 x_1 の係数で両辺を割る
 simplex表では、対応する段の係数を全て割る

交換後の連立方程式を解く

	Z	X1	X2	X3	X4	X5	定数	最大増加量
$\times \frac{1}{15}$		15	11	1			1650000	$/15 = 110000$
		1	$11/15$	$1/15$			110000	
$-\times 10$		10	14		1		1400000	$/10 = 140000$
		0	$20/3$	$-2/3$			300000	
$-\times 9$		9	20			1	1800000	$/9 = 200000$
		0	$67/5$	$-3/5$			810000	
$-\times 5$		5	4				0	
	1	0	$1/3$	$-1/3$			-550000	

基底変数に関する連立方程式を解き基本解を得る

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 110000 \\
 \cancel{10x_1 + x_4} &= \cancel{1400000} \\
 \cancel{9x_1 + x_5} &= \cancel{1800000} \\
 z + 5x_1 &= 0 \\
 z &= -550000
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_4 &= 300000 \\
 x_5 &= 810000
 \end{aligned}$$

前段で得た関係式

$$x_1 + (11/15)x_2 + (11/15)x_3 = 110000$$

を使って他の方程式から x_1 を消去する

交換後の連立方程式を解く

	Z	X1 非	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
$\times \frac{1}{15}$		15	14	1			1650000	$/15 = 110000$
		1	11/15	1/15			110000	
$-\times 10$		10	14		1		1400000	$/10 = 140000$
		0	20/3	-2/3			300000	
$-\times 9$		9	20			1	1800000	$/9 = 200000$
		0	67/5	-3/5			810000	
$-\times 5$	1	5	4				0	
		0	1/3	-1/3			-550000	

基底変数に関する連立方程式を解き基本解を得る

$$\begin{aligned}
 x_1 + 11x_2 + x_3 &= 110000 \\
 + 14x_2 \quad x_4 &= 300000 \\
 + 20x_2 \quad x_5 &= 810000 \\
 z + 4x_2 &= -550000
 \end{aligned}$$

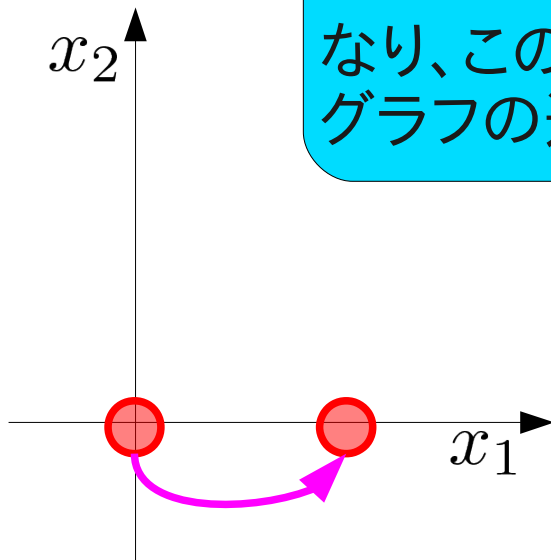
$$(z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-550000, 110000, 0, 0, 300000, 810000)$$

simplex表の定数欄に現われた基本解は非負条件を満たす

交換後の連立方程式を解く

	Z	X1 非	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
$\times \frac{1}{15}$		15	11	1			1650000	$/15 = 110000$
		1	11/15	1/15			110000	
$-\times 10$		10	11		1		1400000	$/10 = 140000$
		0	20/3	-2/3			300000	
$-\times 9$		9	20			1	1800000	$/9 = 200000$
		0	67/5	-3/5			810000	
$-\times 5$	1	5	4				0	
		0	1/3	-1/3			-550000	

ここまでの作業で、simplex表は上のようになり、このときまでの基本解の移動は左下のグラフの通り



$$(z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-550000, 110000, 0, 0, 300000, 810000)$$

表を更新する

Z	X1	X2	X3	X4	X5	定数	最大増加量
						1650000	/15 = 110000
	1		11/15	1/15		110000	
	0		20/3	-2/3	1	1400000	/10 = 140000
	0		67/5	-3/5		300000	
	0				1	1800000	/9 = 200000
	0		1/3	-1/3		810000	
1						0	
	0					-550000	

新しい表に書き写して作業を進める。そのまま上書きでも可。

Z	X1	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大增加量
	1	11/15	1/15			110000	
		20/3	-2/3	1		300000	
		67/5	-3/5		1	810000	
1		1/3	-1/3			-550000	

新しい表で基底変数・非基底変数の交換を続ける

Z	X1	X2 ※	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
	1	11/15	1/15			110000	$/(11/15) = 150000$
		20/3	-2/3	1		300000	$/(20/3) = 45000$
		67/5	-3/5		1	810000	$/(67/5) = 60447. \dots$
1		1/3	-1/3			-550000	

非基底変数のうち、目的関数の定義式で係数が正のものを選び、基底変数に換える

今回の例では、 x_2

目的関数の定義式以外の定数項をその式での x_2 の係数で割り、結果を最大増加量の欄に記す。

新しい表で基底変数・非基底変数の交換を続ける

Z	X1	X2 *	X3 非	X4 非	X5	定数	最大増加量
		11/15	1/15			110000	$/(11/15) = 150000$
		20/3	-2/3	1		300000	$/(20/3) = 45000$
		67/5	-3/5		1	810000	$/(67/5) = 60447. \dots$
1		1/3	-1/3			-550000	

最小の増加量 45000 を与える交換を選ぶと、
非基底変数になるのは x_4 となる

新しい表で基底変数・非基底変数の交換を続ける

$\times \frac{3}{20}$

Z	X1	X2 ※	X3 非	X4 非	X5	定数	最大増加量
	1	11/15	1/15			110000	
		20/3	-2/3	1		300000	
		1	-1/10	3/20		45000	
		67/5	-3/5		1	810000	
1		1/3	-1/3			-550000	

x_2 と x_4 の交換で現われた連立方程式を解く。
新しい基底変数の値を定めるために2段目の
式を x_2 の係数(20/3)で割る。

新しい表で基底変数・非基底変数の交換を続ける

	Z	X1	X2 *	X3 非	X4 非	X5	定数	最大増加量
$-\times \frac{11}{15}$			1	11/15	1/15	11	110000	
$\times \frac{3}{20}$			0	7/50	100		77000	
			20/3	2/3	X		300000	
			1	-1/10	3/20		45000	
$-\times \frac{67}{5}$			67/5	-3/5	201	1	810000	
			0	-37/50	100		207000	
$-\times \frac{1}{3}$	1		1/3	1/3	1		550000	
			0	-9/30	20		-565000	

x_2 について得た関係式を使って、他の段から x_2 を消去すると、連立方程式の解が定数欄に現われる。

新しい表で基底変数・非基底変数の交換を続ける

$-\times \frac{11}{15}$

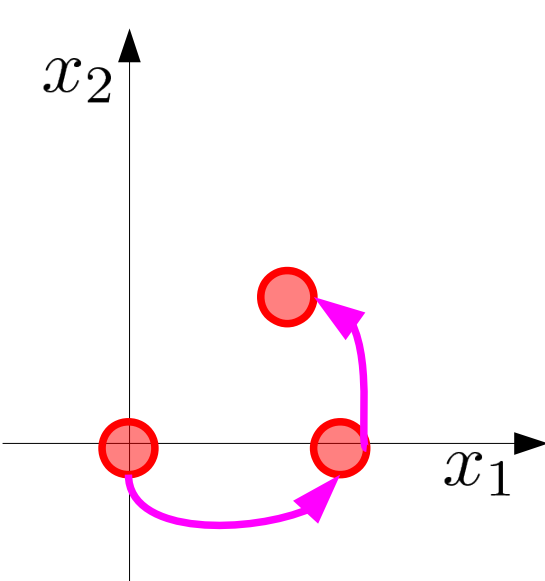
$\times \frac{3}{20}$

$-\times \frac{67}{5}$

$-\times \frac{1}{3}$

Z	X1	X2	X3	X4	X5	定数	最大増加量
		1	11/15	1/15	11	110000	/(11/15) = 150000
		0	7/50	100		77000	
		20/3	2/3	X		300000	/(20/3) = 45000
		1	-1/10	3/20		45000	
		67/5	-3/5	201	1	-810000	/(67/5) = 60447....
		0	-37/50	100		207000	
	1	1/3	1/3	1		-550000	
		0	-9/30	20		-565000	

ここまでの作業でsimplex表は上のようになり、目的関数の定義式に現われる非基底変数の係数は全て負になる。



$(z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$
 $= (-565000, 77000, 45000, 0, 0, 207000)$

これ以上改善できないので、この時の基本解が最適解になる。

単体法のまとめ

- 最も基本的な単体法による解法

- 1.等式標準形を作り、係数を用いて simplex表を作る。

- 2.slack変数surplus変数から基底変数を選ぶ

- 3.残りの変数を非基底変数とし、以下を繰り返す

- 1.次の条件を満たす基底変数・非基底変数の交換を行う
目的関数が改善(減少)する
交換後に基本解が非負条件を満たす

- 2.基底変数の連立方程式を解き基本解を求める

- 4.改善ができなくなったら終了し、その時点の基本解を最適解とする

- 問題点

- 最初の実行可能解を決める方法が欠けている

- 最適解ではないのに目的関数が改善されない場合がある

- 変数選択の候補を限定できない

演習問題4

解答用紙左上に名前・学年・学籍番号を記入

5Lのミックスジュース生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題:利益を最大化するミックスジュースの生産量は？

課題1：simplex 表による単体法を用いて最適解を求めなさい。

課題2：グラフを描き、課題1で辿った端点の経路を示しなさい。

課題3：授業の感想・意見があれば書いてください