数理計画法

第10回：線形計画問題と多面体

復習：双対問題と双対定理

minimize	maximize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$	$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to	subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$
主問題	双対問題

双対問題は、
最大化問題の最小上界、
最小化問題の最大下界
を求める数理計画問題である。
行列表現を用いた一般的な表現は
左記の通り

双対定理

上式のような線形計画問題とその双対問題が与えられているとき、$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$と $\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$ がそれぞれ主問題、双対問題の実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、これは、それぞれの問題の最適解である。

$$\exists \tilde{\boldsymbol{x}}, \exists \tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$
$$\Longrightarrow \forall \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

また、どちらか一方に最適解 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ が存在すれば、もう一方にも最適解 $\tilde{\boldsymbol{y}}$ が存在し、双方の最適解が与える目的関数値は等しい。

復習:双対問題と相補性定理

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

主問題

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題

相補性定理

左式のような線形計画問題とその双対問題が与えられているとき、

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m) \quad \tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$$

がそれぞれ、主問題、双対問題の最適解であるならば、次の関係式が成立する。

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow a_{1j}\tilde{y}_1 + \cdots + a_{nj}\tilde{y}_n = c_j$$

$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow a_{k1}\tilde{x}_1 + \cdots + a_{km}\tilde{x}_m = b_k$$

$$a_{1j}\tilde{y}_1 + \cdots + a_{nj}\tilde{y}_n < c_j \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$

$$a_{k1}\tilde{x}_1 + \cdots + a_{km}\tilde{x}_m > b_k \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

主問題	双対問題
minimize $z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	maximize $w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ subject to $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$ $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

双対定理：

$\tilde{\boldsymbol{x}}$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}$ が実行可能解かつ $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$

$\iff$ $\tilde{\boldsymbol{x}}$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}$ は最適解

弱双対定理：

$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が実行可能解 $\Longrightarrow \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$

$$\because \ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

相補性定理：

$\tilde{\boldsymbol{x}}$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}$ は最適解なので $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$ この不等式の等号が成立する。

$$(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0 \qquad (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 0$$

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow a_{1j}\tilde{y}_1 + \cdots + a_{nj}\tilde{y}_n = c_j$$

$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow a_{k1}\tilde{x}_1 + \cdots + a_{km}\tilde{x}_m = b_k$$

$$a_{1j}\tilde{y}_1 + \cdots + a_{nj}\tilde{y}_n < c_j \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$

$$a_{k1}\tilde{x}_1 + \cdots + a_{km}\tilde{x}_m > b_k \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

復習：主問題と双対問題の等式標準形

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

主問題

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$

主問題の等式標準形

主問題の主変数：$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m)$

$\boldsymbol{x}$ の双対変数：$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = (t_1, \ldots, t_m)$

主問題のスラック変数：$\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = (s_1, \ldots, s_n)$

$\boldsymbol{s}$ の双対変数：$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題の等式標準形

双対問題の主変数：$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$

$\boldsymbol{y}$ の双対変数：$\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = (s_1, \ldots, s_n)$

双対問題のスラック変数：$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = (t_1, \ldots, t_m)$

$\boldsymbol{t}$ の双対変数：$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m)$

復習:等式標準形と相補性定理

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$

主問題の等式標準形

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題の等式標準形

相補性定理

左式のような線形計画問題とその双対問題の等式標準形が与えられているとき、

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m) \qquad \tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n)$$
$$\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n) \qquad \tilde{\boldsymbol{t}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{s}_m)$$

がそれぞれ、主問題、双対問題の最適解であるとする。

このとき、次の関係式が成立する。

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0 \qquad \tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$
$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0 \qquad \tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

復習:相補性定理と双対変数

主問題と双対問題の変数の対応と、正・零の対応

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$

主問題の等式標準形

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題の等式標準形

主変数: $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m)$ $\quad$ $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$

双対変数

スラック変数: $\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = (s_1, \ldots, s_m)$ $\quad$ $\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = (t_1, \ldots, t_n)$

相補性定理: $\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0$ $\quad$ $\tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$

$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0$ $\quad$ $\tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$

復習:相補性定理を用いた解法

主問題の等式標準形

maximize

$z = x_1 + 2x_2$

subject to

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & -x_2 & +s_1 & = & 7 \\ 3x_1 & +x_2 & +s_2 & = & 10 \\ -x_1 & +2x_2 & +s_3 & = & 18 \end{array}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_4 \geq 0$$

双対問題の等式標準形

minimize

$w = 7y_1 + 10y_2 + 18y_3$

subject to

$$\begin{array}{rrrrcr} 2y_1 & +3y_2 & -y_3 & -t_1 & = & 1 \\ -y_1 & +y_2 & +2y_3 & -t_2 & = & 2 \end{array}$$

$$y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0$$

相補性定理

$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0 \quad \tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$

$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0 \quad \tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$

$\tilde{x}_1 = \frac{2}{7}$, $\tilde{x}_2 = \frac{64}{7}$, $\tilde{s}_1 = \frac{109}{7}$, $\tilde{s}_2 = 0$, $\tilde{s}_3 = 0$

$\tilde{t}_1 = 0$, $\tilde{t}_2 = 0$, $\tilde{y}_1 = 0$, $\tilde{y}_2 = ?$, $\tilde{y}_3 = ?$

$3y_2 - y_3 = 1,$

$y_2 + 2y_3 = 2$

$\tilde{y}_2 = \frac{4}{7}$, $\tilde{y}_3 = \frac{5}{7}$

$\tilde{z} = \frac{130}{7}$ $\quad \tilde{w} = \frac{130}{7}$

主問題の最適解から、双対問題の最適解が定まる。(逆も同様)

復習：相補性定理と双対変数

主問題と双対問題の変数の対応と、正・零の対応

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$

主問題の等式標準形

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題の等式標準形

主変数： $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m)$ $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$

双対変数

スラック変数：$\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = (s_1, \ldots, s_m)$ $\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = (t_1, \ldots, t_n)$

相補性定理： $\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0$ $\tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$

$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0$ $\tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$

復習：演習問題

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

minimize $\quad z = x_1 + 2x_2$
subject to $\quad x_1 + x_2 \geq 4,\ x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0,\ \ x_2 \leq 3,$
$\qquad x_1, x_2 \geq 0.$

課題2：双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

課題3：課題2の解答が正しいことを何らかの方法で確認する。

復習：演習問題

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \\
&z = x_1 + 2x_2 \\
&\text{subject to} \\
&x_1 + x_2 \geq 4 \\
&x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0 \\
&x_2 \leq 3 \\
&x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

復習:演習問題

課題1:次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

minimize

$z = x_1 + 2x_2$

subject to

$x_1 + x_2 \geq 4$

$x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0$

$x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0.$

minimize

$z = x_1 + 2x_2$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_2 &\geq 4 \\ -x_1 + 2x_2 &\geq 2 \\ -x_2 &\geq -3 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \geq 0.$

復習：演習問題

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

$$\begin{aligned}&\text{minimize}\\ &z = x_1 + 2x_2\\ &\text{subject to}\\ &x_1 + x_2 \geq 4\\ &x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0\\ &x_2 \leq 3\\ &x_1, x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{minimize}\\ &z = x_1 + 2x_2\\ &\text{subject to}\\ &x_1 + x_2 \geq 4\\ &-x_1 + 2x_2 \geq 2\\ &-x_2 \geq -3\\ &x_1, x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{minimize}\\ &z = (1, 2)\boldsymbol{x}\\ &\text{subject to}\\ &\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\\ &\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

復習:演習問題

課題1:次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

minimize

$z = x_1 + 2x_2$

subject to

$x_1 + x_2 \geq 4$

$x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0$

$x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0.$

minimize

$z = x_1 + 2x_2$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 \ +x_2 &\geq 4 \\ -x_1+2x_2 &\geq 2 \\ -x_2 &\geq -3 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \geq 0.$

minimize

$z = (1, 2)\boldsymbol{x}$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$

maximize

$w = (4, 2, -3)\boldsymbol{y}$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$

復習：演習問題

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

minimize

$z = x_1 + 2x_2$

subject to

$x_1 + x_2 \geq 4$

$x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0$

$x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0.$

minimize

$z = x_1 + 2x_2$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4 \\ -x_1 + 2x_2 &\geq 2 \\ -x_2 &\geq -3 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \geq 0.$

minimize

$z = (1, 2)\boldsymbol{x}$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$

maximize

$w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3$

subject to

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 \qquad &\leq 1 \\ y_1 + 2y_2 - y_3 &\leq 2 \end{aligned}$$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0.$

maximize

$w = (4, 2, -3)\boldsymbol{y}$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$

復習：演習問題

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

minimize

$$z = (1, 2)\boldsymbol{x}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$

minimize

$$z = (1, 2)\boldsymbol{x}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}, (s_1, s_2, s_3)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$

maximize

$$w = (4, 2, -3)\boldsymbol{y}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$

maximize

$$w = (4, 2, -3)\boldsymbol{y}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{t} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}, (t_1, t_2)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$

復習：演習問題

課題2：双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

maximize

$w = (4, 2, -3)\boldsymbol{y}$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0$

minimize $-w$

subject to

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 \quad + t_1 \quad &= 1 \\ y_1 + 2y_2 - y_3 \quad + t_1 &= 2 \\ -w + 4y_1 + 2y_2 - 3y_3 \quad &= 0 \end{aligned}$$

$y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0.$

定数項とスラック変数の係数が正→原点が実行可能領域

$-w$	y_1 非	y_2 非	y_3 非	t_1	t_2	定数
0	1	-1	0	1	0	1
0	1	2	-1	0	1	2
1	4	2	-3	0	0	0

復習:演習問題

課題2:双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して
元の問題の最適解を求める。

$-w$	y_1 ~~非~~	y_2 非	y_3 非	t_1 非	t_2	右辺	
0	1	-1	0	1	0	1	/1=1
0	1	2	-1	0	1	2	/1=2
1	4	2	-3	0	0	0	

$-w$	y_1	y_2 ~~非~~	y_3 非	t_1 非	t_2 非	右辺
0	1	-1	0	1	0	1
0	0	3	-1	-1	1	1
1	0	6	-3	-4	0	-4

$-w$	y_1	y_2	y_3 非	t_1 非	t_2 非	右辺
0	1	0	-1/3	2/3	1/3	4/3
0	0	3/3	-1/3	-1/3	1/3	1/3
1	0	0	-1	-2	-2	-6

最適解: $w = 6, y_1 = 4/3, y_2 = 1/3, y_3 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0$

復習:演習問題

課題2:双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

相補性定理:主・双対問題の最適解に次の関係が成立

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0 \quad \tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$
$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0 \quad \tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

(主問題の主変数: $\tilde{x}_j$、スラック変数: $\tilde{s}_k$
双対問題の主変数: $\tilde{y}_k$、スラック変数: $\tilde{t}_j$)

双対問題の最適解:

$$w = 6, y_1 = 4/3, y_2 = 1/3, y_3 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0$$

↓相補性定理

主問題の最適解: $z = 6, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 > 0, x_1 > 0, x_2 > 0$

制約式より: $x_1 + x_2 = 4, -x_1 + 2x_2 = 2, x_2 + s_3 = 3$

連立方程式を解いて未知の変数を定める

$$x_1 = 2, x_2 = 2, s_3 = 1$$

主問題の最適解: $z = 6, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 1, x_1 = 2, x_2 = 2$

復習:演習問題

課題3:課題2の解答が正しいことを何らかの方法で確認する

課題2の解答: z は $x_1 = x_2 = 2$ において最大値6を得る

minimize

$z = x_1 + 2x_2$

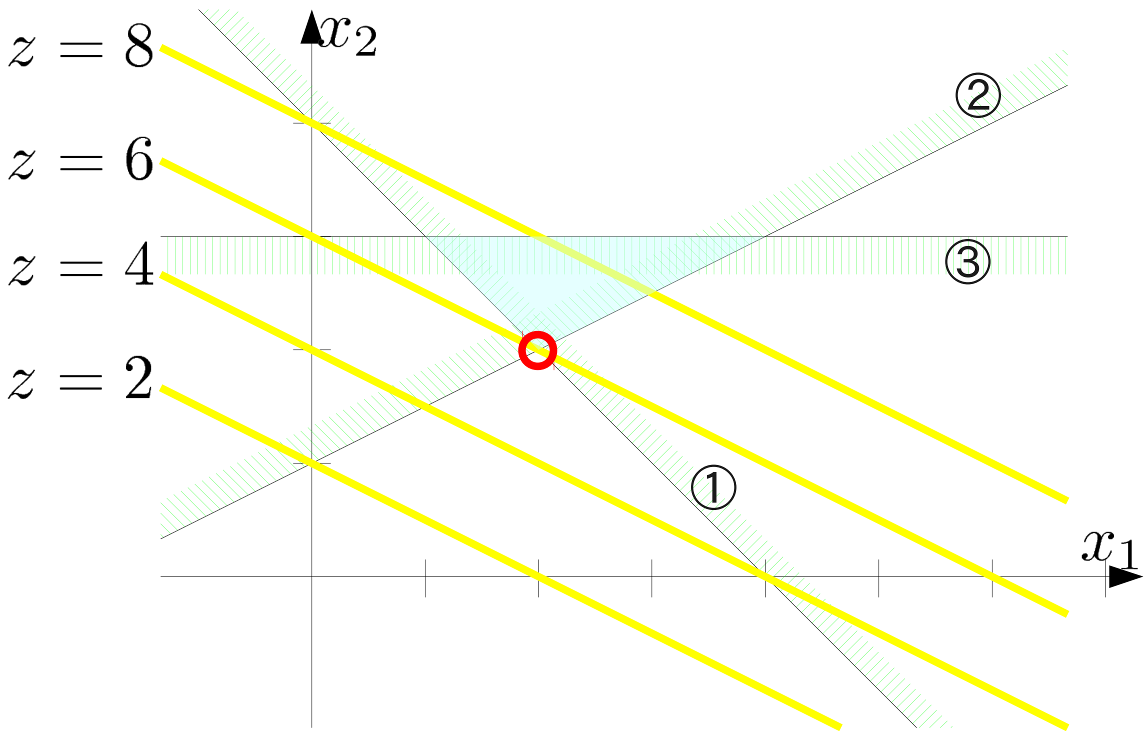
subject to

① $x_1 + x_2 \geq 4$

② $x_2 - 2x_2 + 2 \leq 0$

③ $x_2 \leq 3$

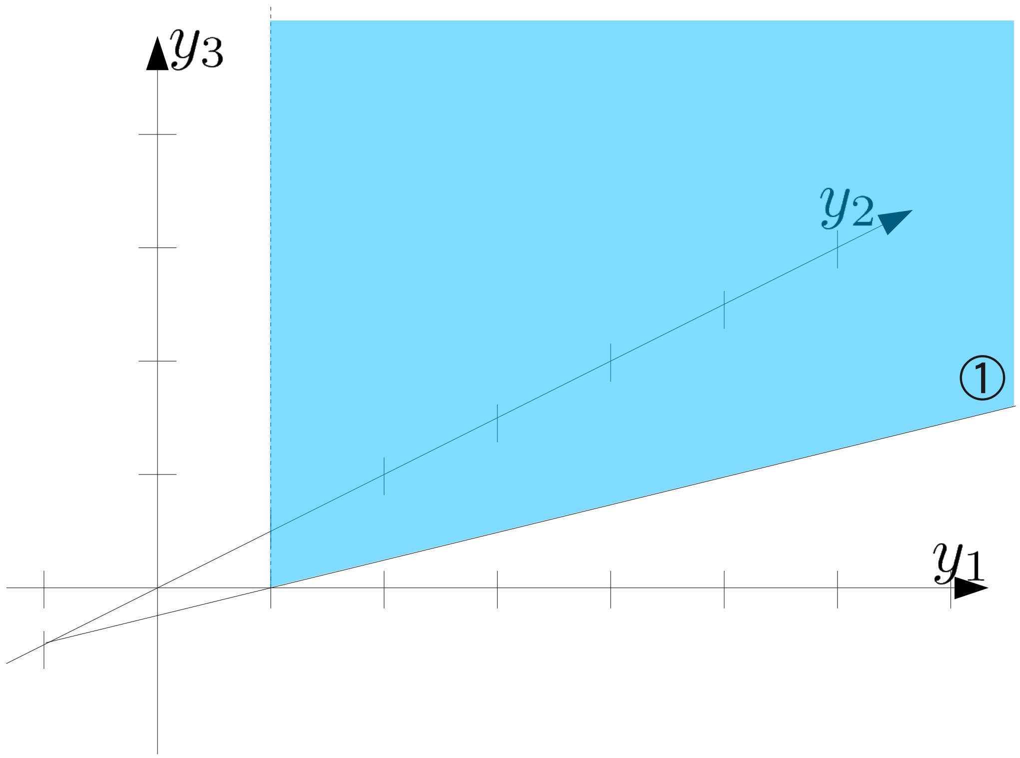
$x_1, x_2 \geq 0$



3次元問題のグラフ

演習問題の双対問題についてもグラフを描く

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \\ &w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3 \\ &\text{subject to} \\ ① \quad & y_1 - y_2 \leq 1 \\ ② \quad & y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$



3次元問題のグラフ

演習問題の双対問題についてもグラフを描く

maximize

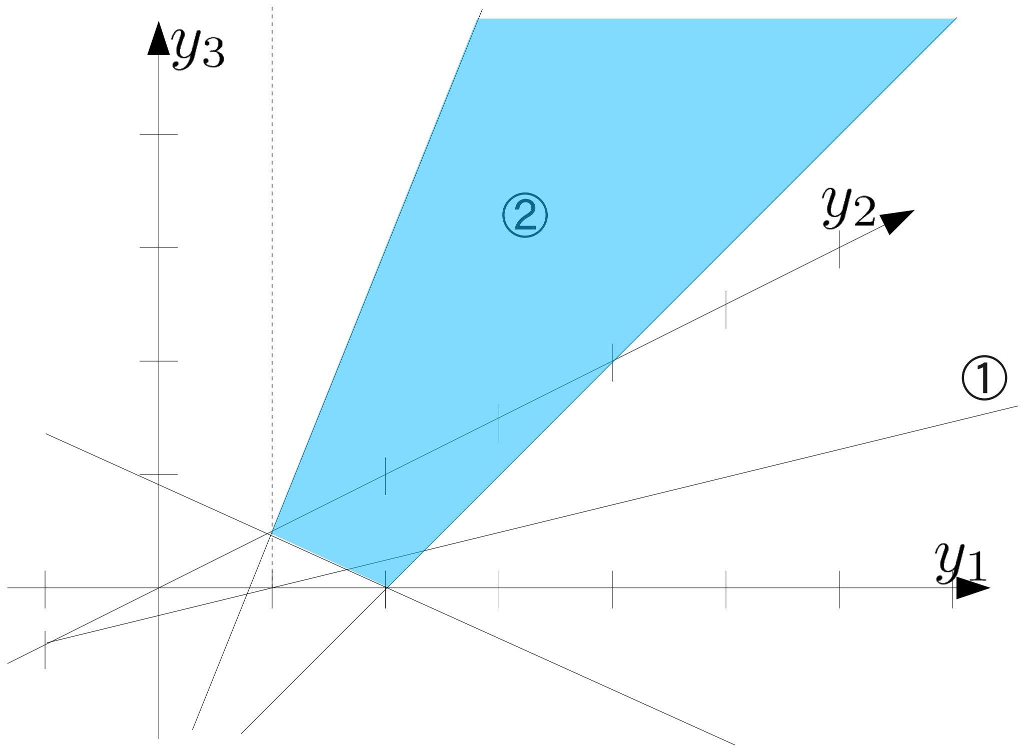
$$w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3$$

subject to

① $y_1 - y_2 \le 1$

② $y_1 + 2y_2 - y_3 \le 2$

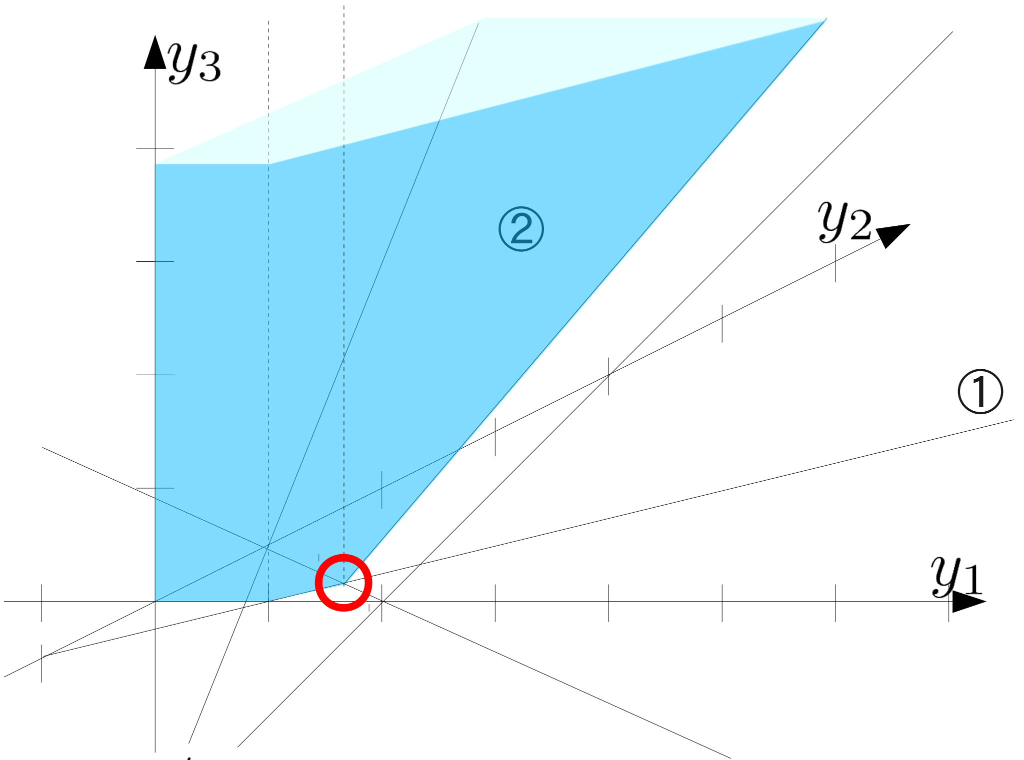
$y_1, y_2, y_3 \ge 0$



3次元問題のグラフ

演習問題の双対問題についてもグラフを描く

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} \\
&w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3 \\
&\text{subject to} \\
①\ & y_1 - y_2 \leq 1 \\
②\ & y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2 \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$



最適解: $w = 6, y_1 = 4/3, y_2 = 1/3, y_3 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0$

線形計画問題と多面体

定義：n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$の多面体

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

のとき、$\mathcal{P}$ を$\mathbb{R}^n$の多面体

と呼ぶ。

maximize

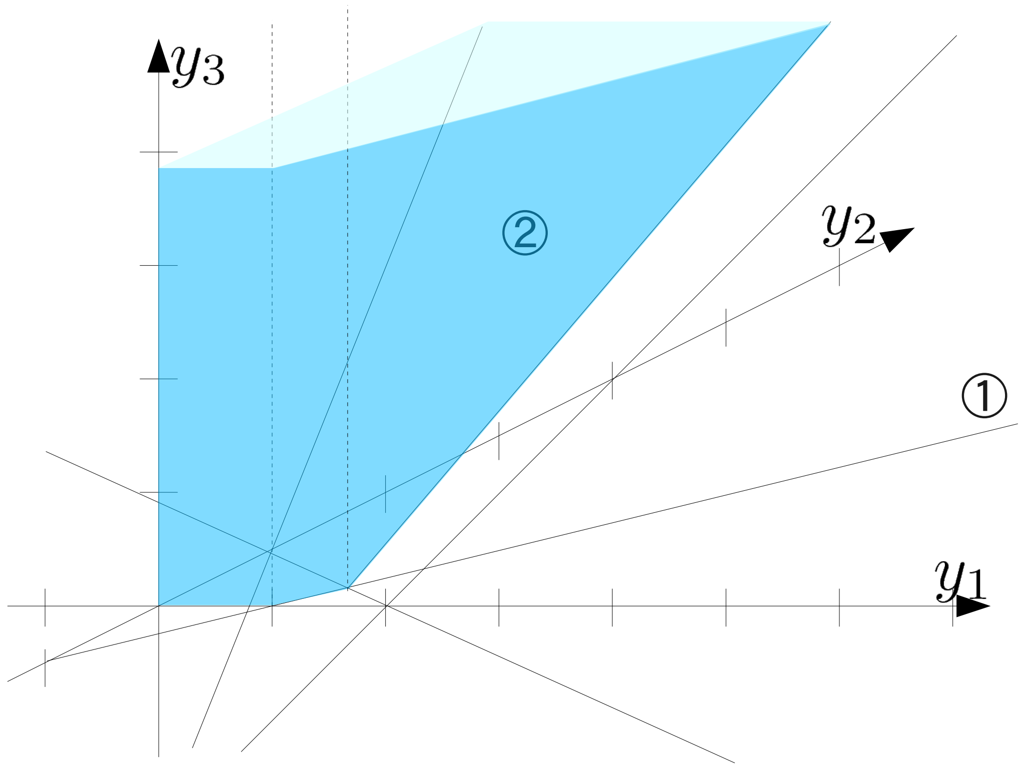
$$w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3$$

subject to

① $y_1 - y_2 \leq 1$

② $y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$



線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$の多面体

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

のとき、$\mathcal{P}$ を$\mathbb{R}^n$の多面体と呼ぶ。

この定義では、面や直線、点、半平面等も多面体となる。

定義:有界多面体

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{P}, ||x|| \leq \exists M$$

となる、M が存在するとき $\mathcal{P}$ を有界多面体と呼ぶ。

線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

このように行列 $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}$ 、ベクトル $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}$ で表わされる部分集合$\mathcal{P}$を $\mathbb{R}^n$ の多面体と呼ぶ。

※この定義では面や直線、点、半平面も多面体となる

面: $\boldsymbol{A}_1 = (a_1, a_2, a_3)$

直線: $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \end{pmatrix}$

点: $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{pmatrix}$

※上は全て 3次元の場合

定義:有界多面体

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{P}, ||x|| \leq \exists M$ を満たす定数 M が存在するとき、$\mathcal{P}$ を有界多面体と呼ぶ。

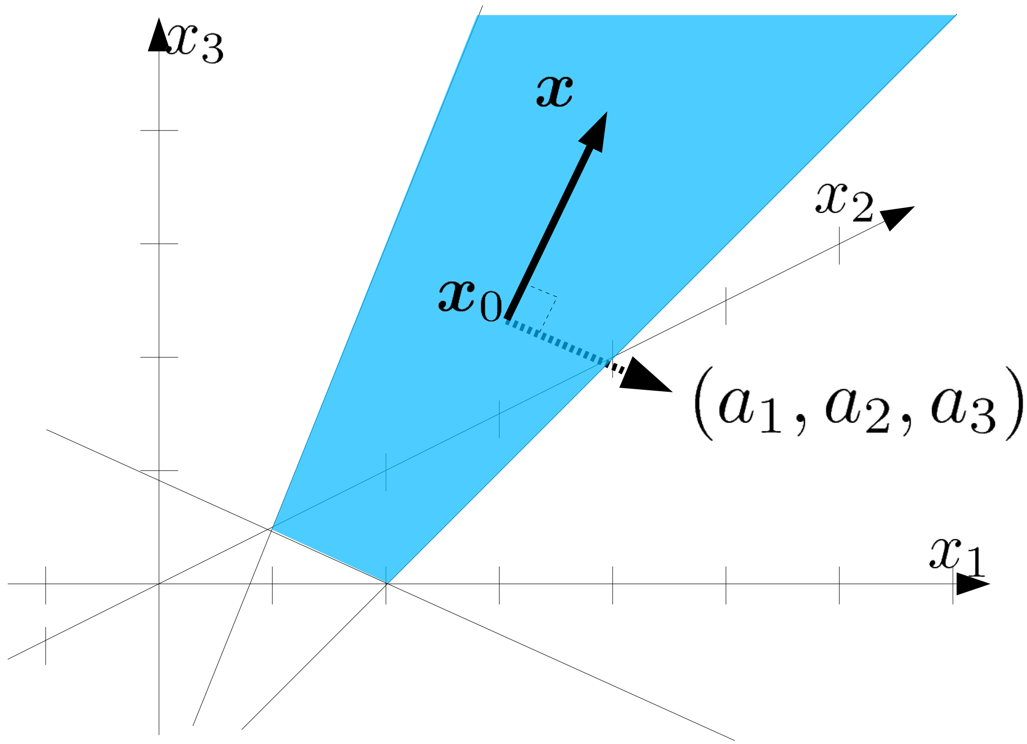
線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体:

$$\boldsymbol{A}_1 = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_1 = b_1 \qquad \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_0 = b_1$$

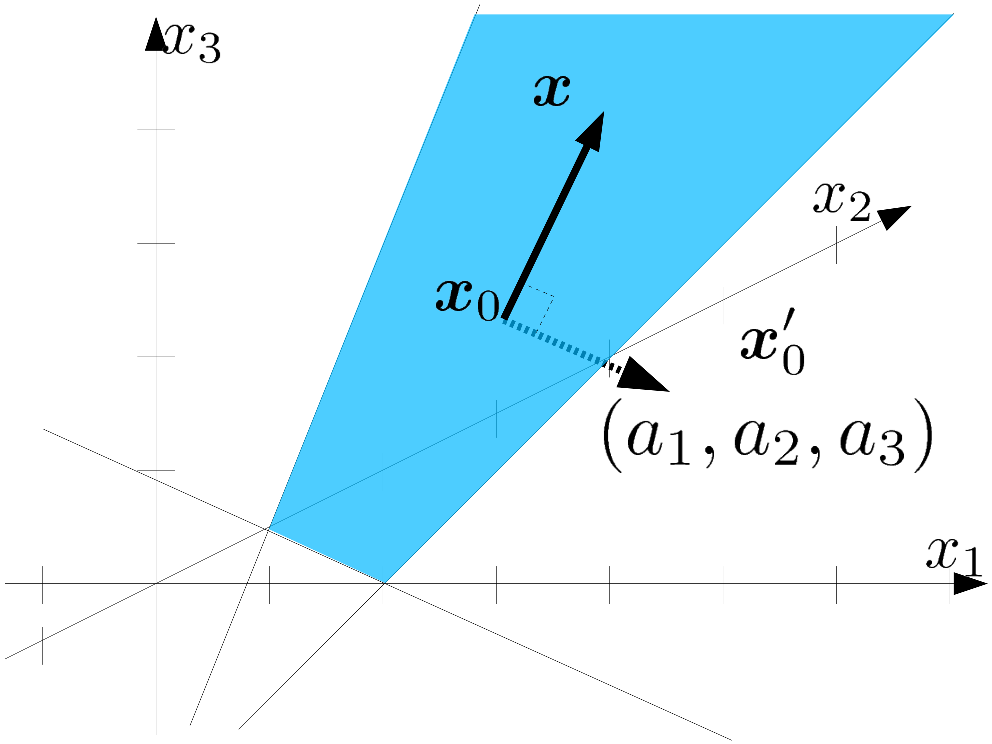


線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体: $\boldsymbol{A}_1 = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_1 = b_1$



$$\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$
$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_0 = b_1$$

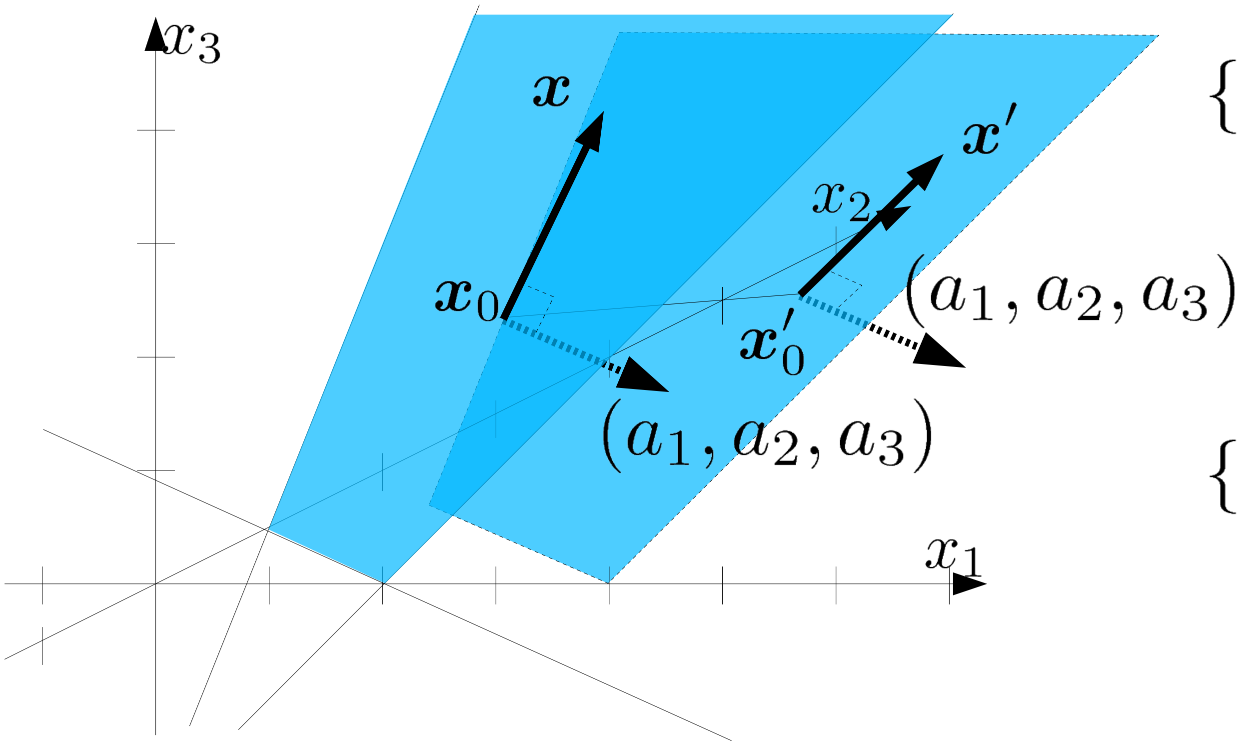
$\boldsymbol{x}_0$を通り、$\boldsymbol{A}_1$に直交する平面

線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体: $\boldsymbol{A}_1 = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_1 = b_1$



$$\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_0 = b_1$$

平行移動

$$\{\boldsymbol{x}' \mid \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}_0') = 0\}$$

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}_0' + \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_0) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}_0 + (\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0))$$

$= b_1 + \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0)$ $> b_1$ 元の平面に対して$\boldsymbol{A}_1$ と同じ側

$< b_1$ 元の平面に対して$\boldsymbol{A}_1$ と反対側

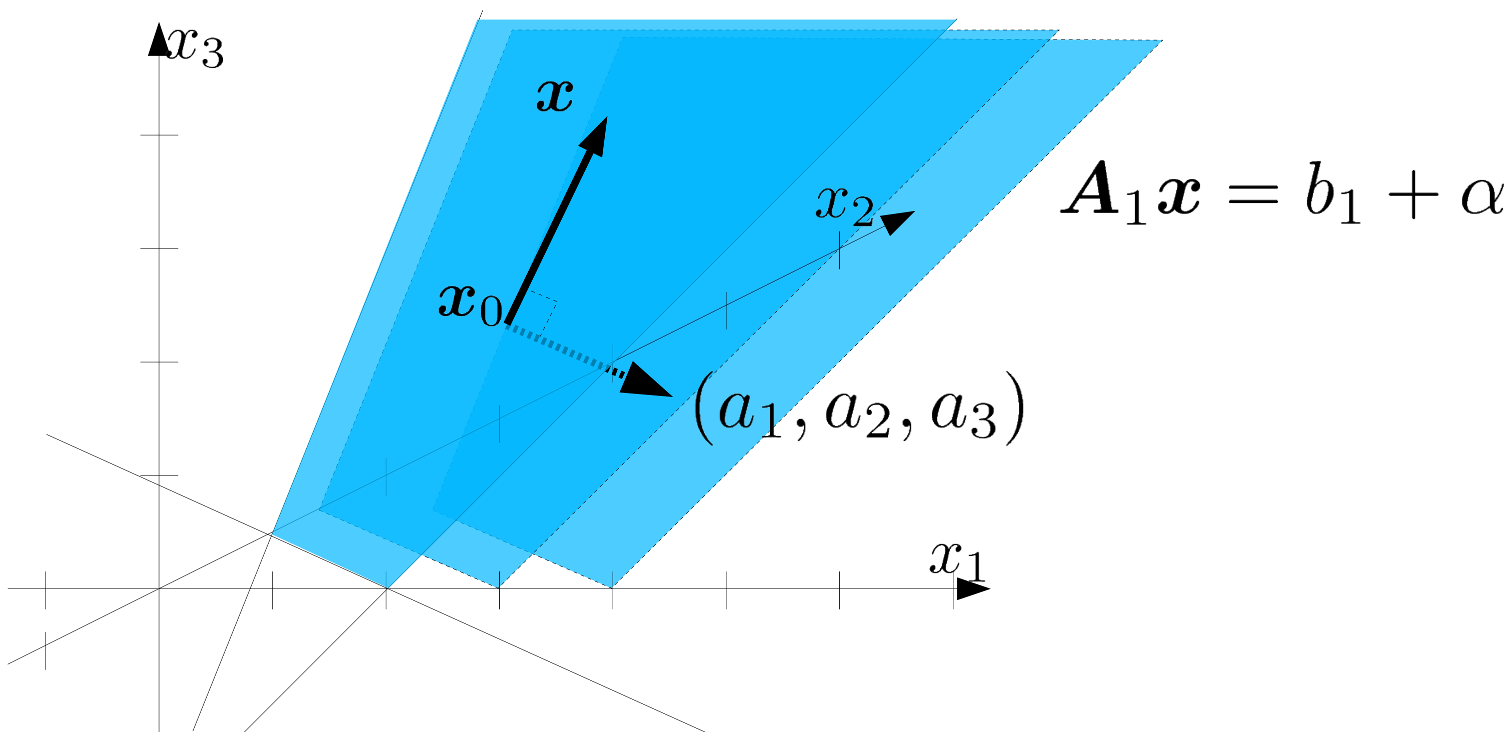
線形計画問題と多面体

定義：n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体：

$$\boldsymbol{A}_1 = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_1 = b_1 \qquad \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_0 = b_1$$



$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

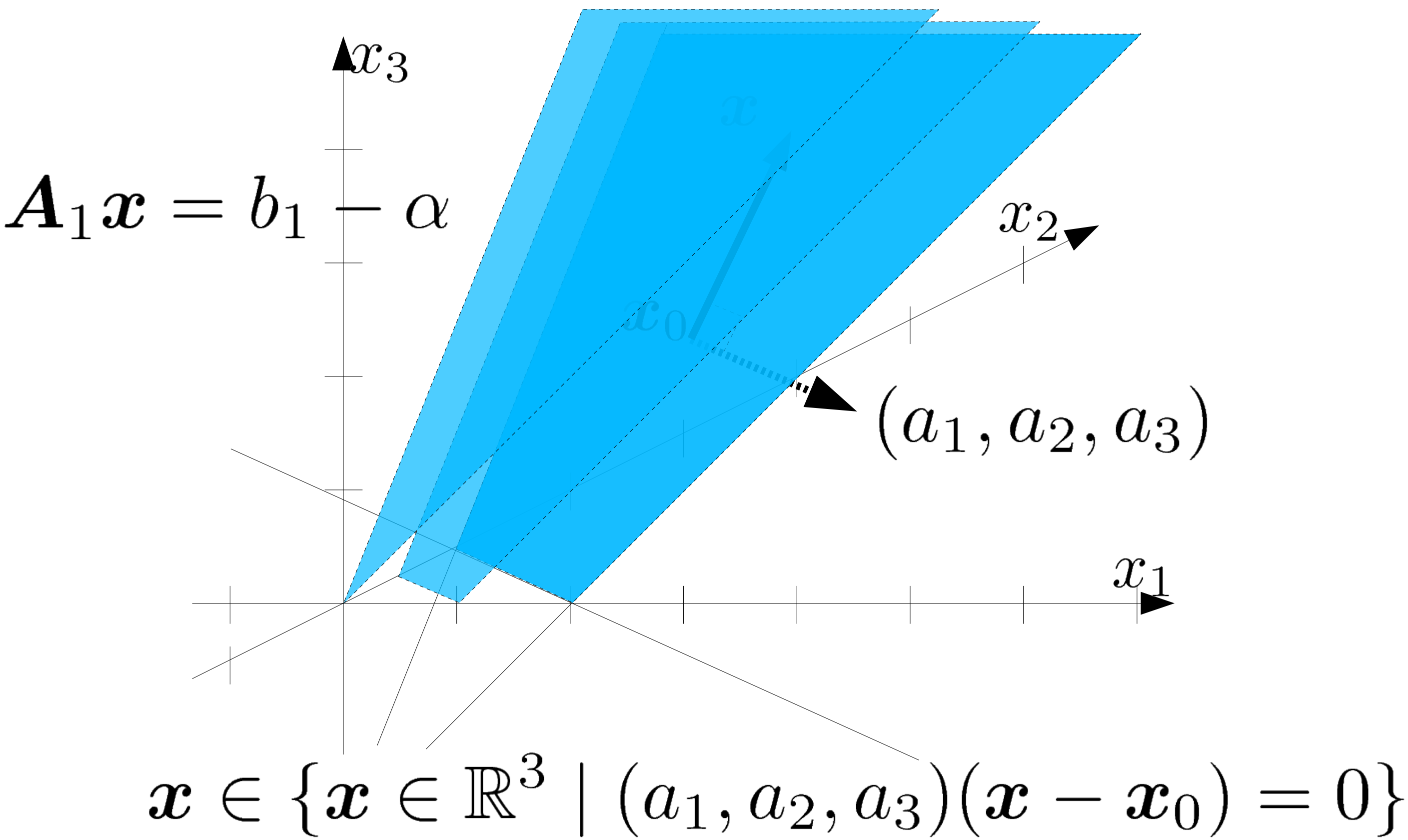
線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体:

$$\boldsymbol{A}_1 = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_1 = b_1 \qquad \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_0 = b_1$$



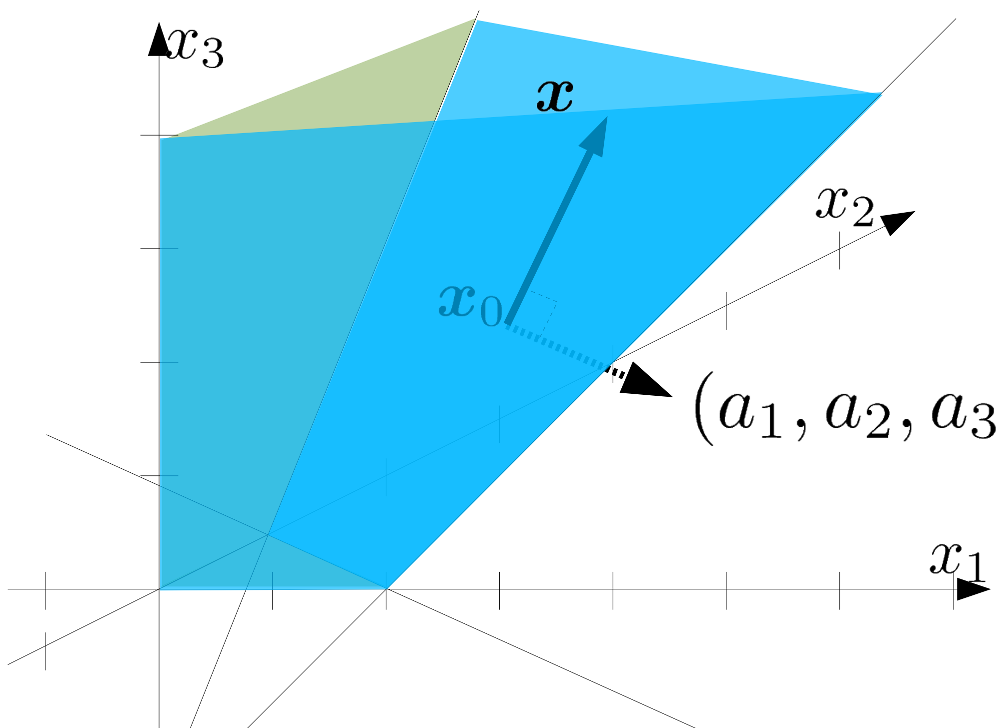
線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元領域を2分する多面体:

$$\boldsymbol{A}_2 = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_2 = b \qquad \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_0 = b$$



$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

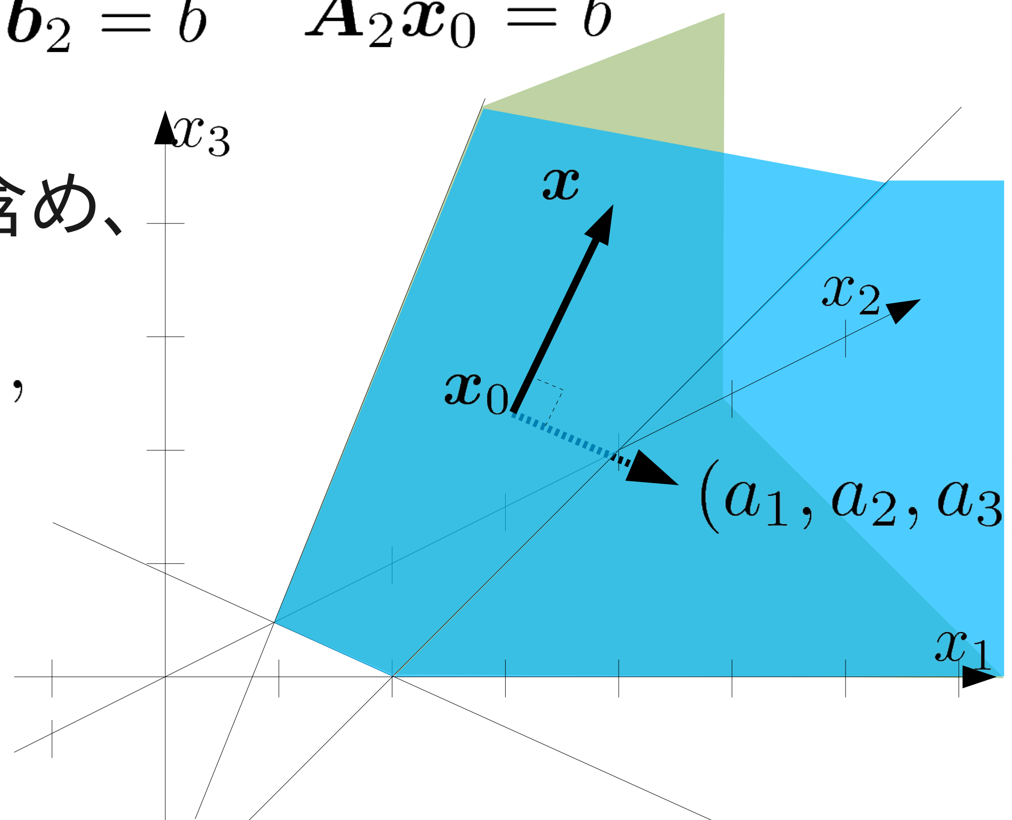
線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元領域を2分する多面体:

$$\boldsymbol{A}_2 = -(a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_2 = b \qquad \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_0 = b$$



正確には非負条件も含め、

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -(a_1, a_2, a_3) \\ -\boldsymbol{I} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} b \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

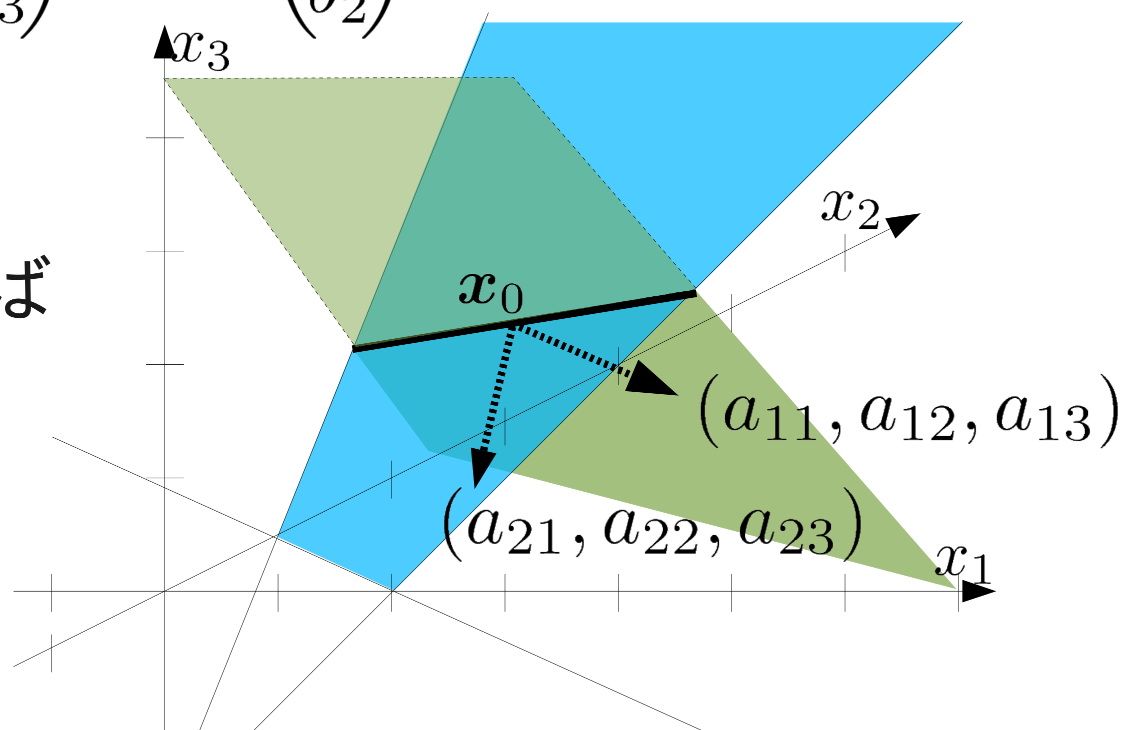
3次元の直線を構成する多面体:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}_1$$

非負条件を入れれば

線分になる



$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

線形計画問題と多面体

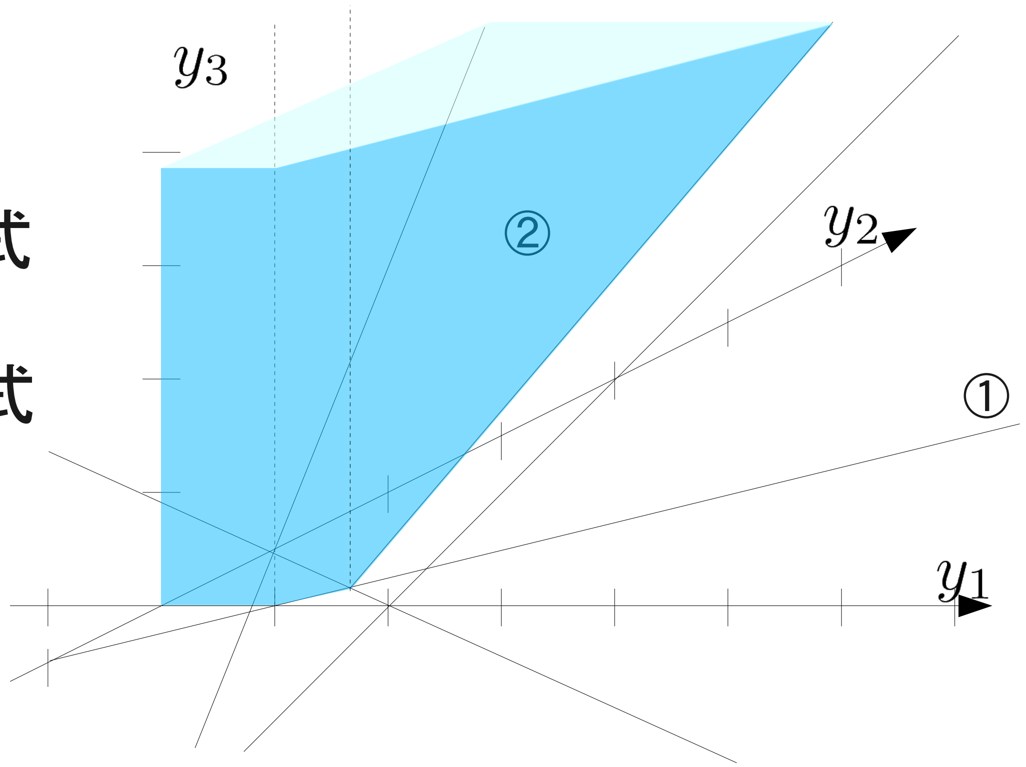
- 妥当不等式

  P が $\mathbb{R}^n$ の多面体のとき、$\forall \boldsymbol{x} \in P \Rightarrow \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ なら

  $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ は P の妥当不等式

- 図の多面体を P とすれば

  $y_1 - y_2 \leq 2$ はP の妥当不等式



P を与える①②③も妥当不等式

① $y_1 - y_2 \leq 1$

② $y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$

③ $y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0$

線形計画問題と多面体

- 支持超平面

  P が$\mathbb{R}^n$ の多面体、$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ が P の妥当不等式のとき、

  $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ の境界が P と交わりを持つなら
  この境界を支持超平面と呼ぶ

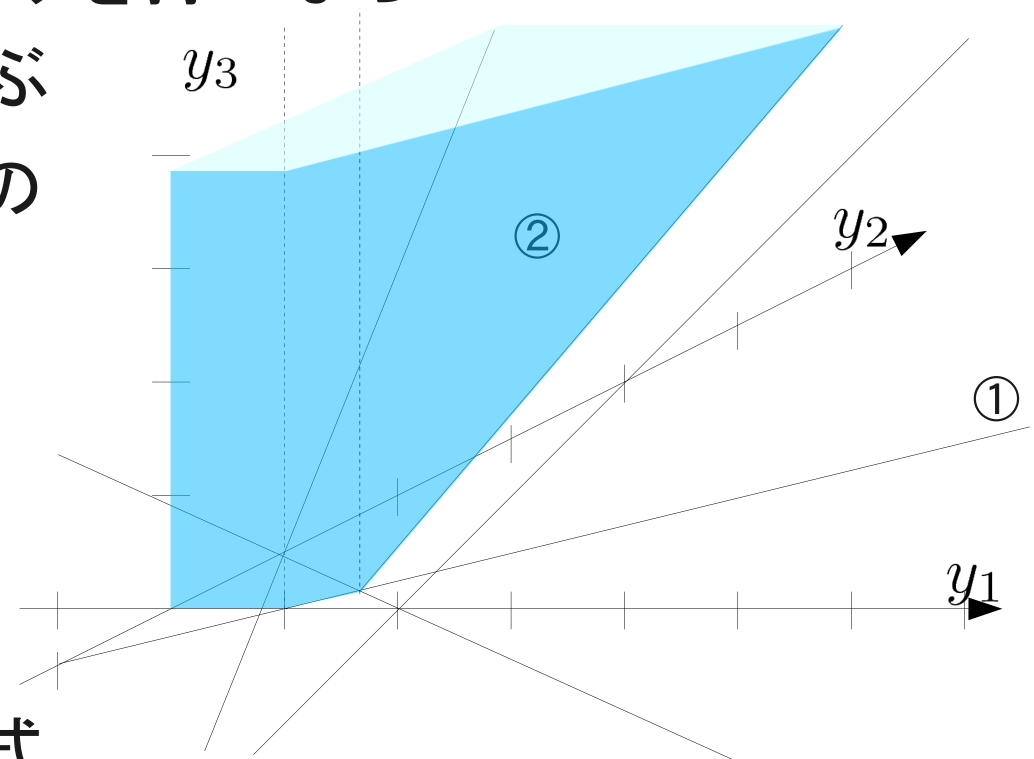
- ①②③の境界は図の多面体の支持超平面

  ① $y_1 - y_2 \leq 1$

  ② $y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$

  ③ $y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0$

  $y_1 - y_2 \leq 2$ はP の妥当不等式ではあるが、その境界は支持超平面ではない



線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{N_1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{N_1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_{N_2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_{N_2} \end{pmatrix}$$

多面体を構成する平面の法線ベクトル:

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{N_1}, \boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_{N_2}$$

　不等式標準形の不等式制約の係数に対応する「minimize z , subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$ 」のとき、$\boldsymbol{A}$ の行ベクトル毎に平面が考えられる。

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$$

平面 ℓ : $\boldsymbol{a}_\ell^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq b_\ell \qquad \ell = 1, \ldots, n$

練習問題10

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

$$
\begin{array}{ll}
 & z = x_1 + 2x_2 \\
\text{minimize} & x_1 + x_2 \geq 4,\ x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0,\ \ x_2 \leq 3, \\
\text{subject to} & x_1, x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

課題2：主問題と双対問題の実行可能領域を、目的関数を表す平面とともに図示し、図を用いてそれぞれの最適解を示せ。