数理計画法

第12回：内点法の原理

今日の授業について

- 復習＋内点法の原理
- 「演習」問題1

※問題1の回答は収集しません。（成績評価対象外）

次回の授業について

- 問題1の解説から始めます。その他の問題についても、できるだけ解いておいてください。
- 「演習」の資料はウェブサイト http://comp.cs.ehime-u.ac.jp/~okano/mathpro/ で配布しています。
- ダウンロード時のユーザ名とパスワードはどちらも

8931

授業の欠席について

- 成績評価に出席点はありません。
- 毎回の提出課題は評価対象です。
- 正当な理由で欠席した場合には提出課題の再提出を認めます。欠席した回の演習課題を完成して提出してください。

※課題は正しい解答とともに完成した形で提出された場合にのみ評価します。確認のために口頭での説明を求める場合があります。

- 2回以上の欠席があり、課題提出が無い場合は評価しません。

復習:演習問題

解答用紙に名前･学年･学籍番号を記入し､提出

次の線形計画問題の双対問題を求め､主問題･双対問題の実行可能領域に対応する多面体をグラフに描け

また､制約式･目的関数に関わる平面の法線ベクトルを描き､双対変数どうしの関係を説明せよ

maximize

$$z = x_1 + x_2$$

subject to

$$\begin{array}{rrcl} x_1 & +2x_2 & \leq & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 2 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

minimize

$$w = 2y_1 + 2y_2$$

subject to

$$\begin{array}{rrcl} y_1 & +2y_2 & \geq & 1 \\ 2y_1 & +y_2 & \geq & 1 \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

復習：演習問題

実行可能領域に対応する多面体をグラフに描け

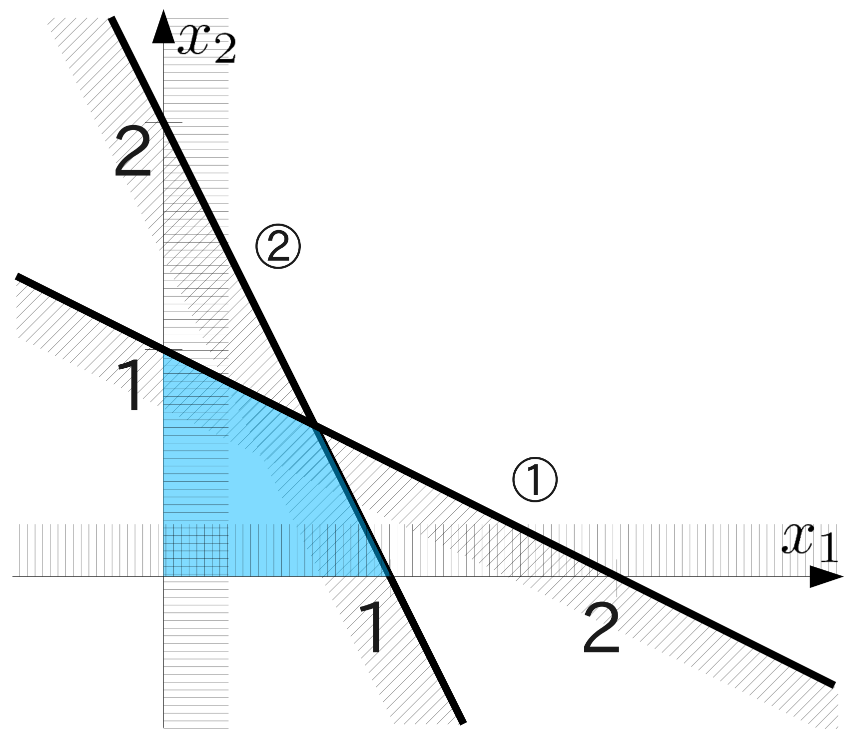
主問題

maximize

$$z = x_1 + x_2$$

subject to

$$\begin{array}{rrcrl} x_1 & +2x_2 & \leq & 2 & ① \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 2 & ② \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$



復習：演習問題

実行可能領域に対応する多面体をグラフに描け

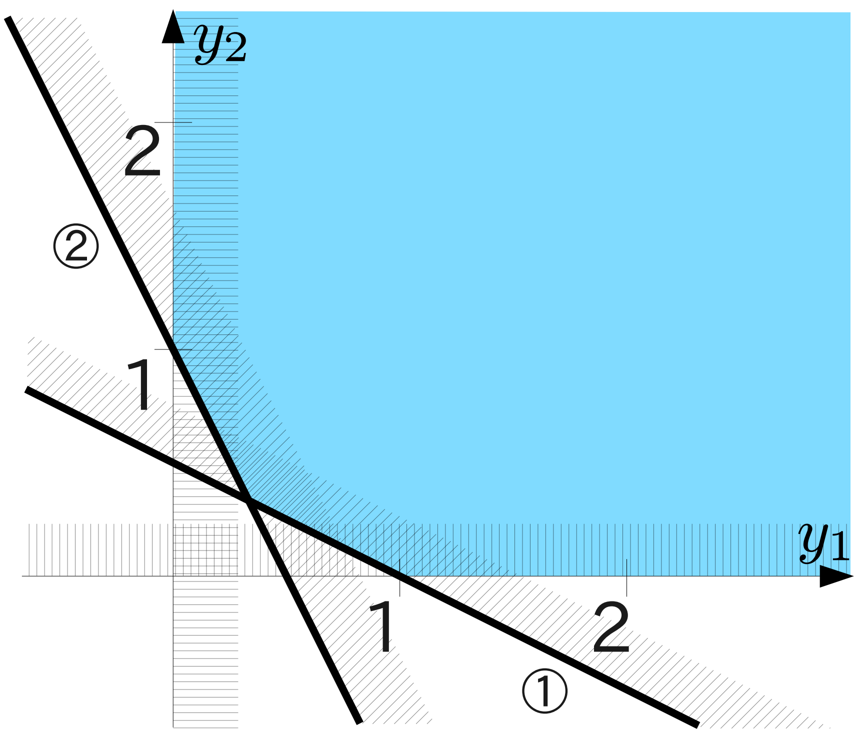
双対問題

minimize

$$w = 2y_1 + 2y_2$$

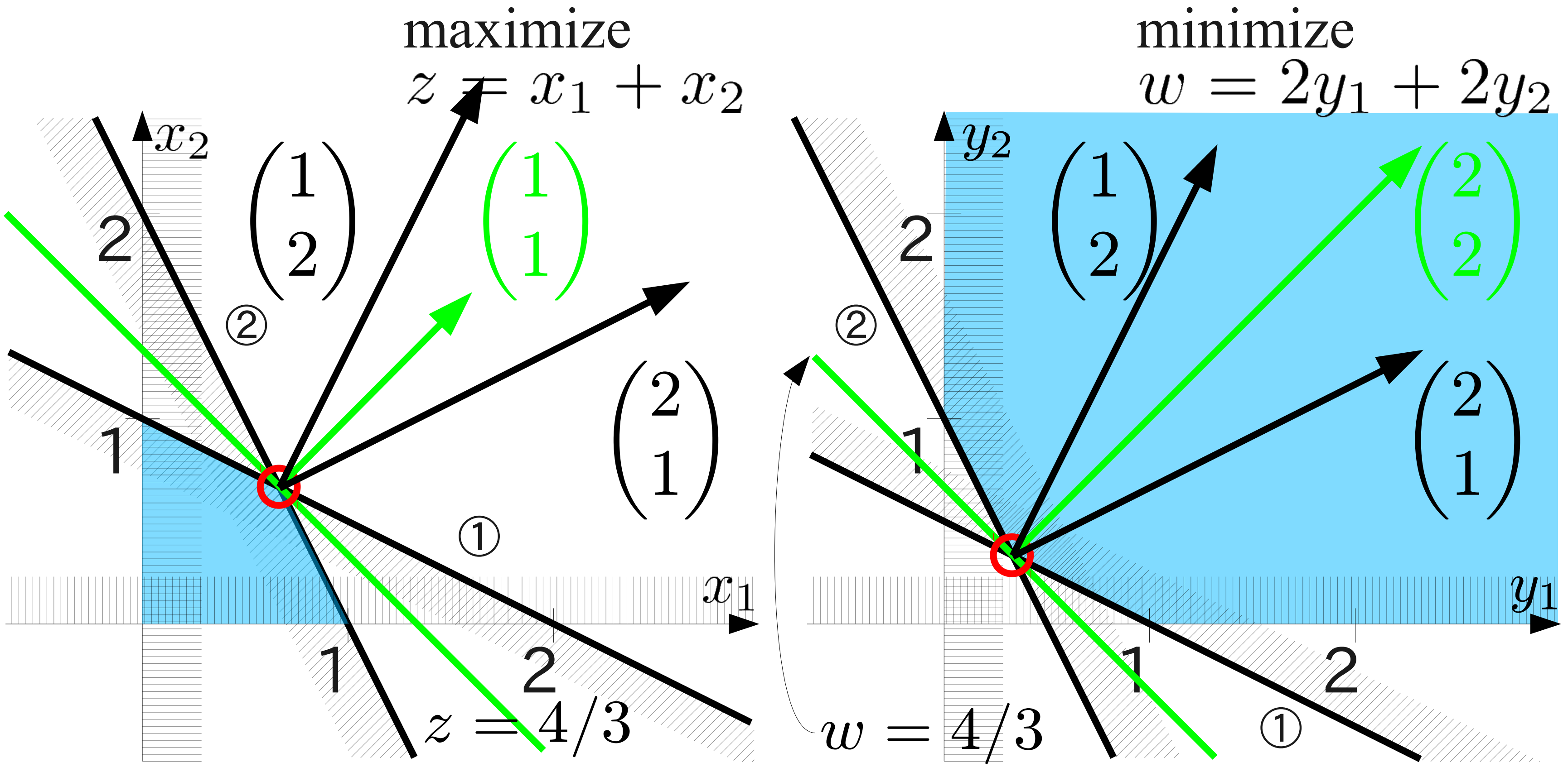
subject to

$$\begin{array}{rrcl} y_1 & +2y_2 & \geq & 1 \quad ① \\ 2y_1 & +y_2 & \geq & 1 \quad ② \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$



復習:演習問題

最適解を与える制約式・目的関数に関わる平面の法線ベクトルを描き、



復習：演習問題

双対変数同士の関係を説明せよ

目的関数の法線ベクトル
＝ $y_1$①の法線ベクトル
＋ $y_2$②の法線ベクトル

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

目的関数
＝y_1制約式①＋y_2制約式②

$$z=x_1+x_2\leq\frac{1}{3}2+\frac{1}{3}2=\frac{4}{3}$$

主問題

maximize
$z=x_1+x_2$
subject to

$$\begin{array}{rrcrl} x_1 & +2x_2 & \leq & 2 & ① \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 2 & ② \\ & x_1,x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

最適解：

$$(z,x_1,x_2,s_1,s_2)=\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},0,0\right)$$

復習:演習問題

双対変数同士の関係を説明せよ

目的関数の法線ベクトル

$= x_1$①の法線ベクトル

$+ x_2$②の法線ベクトル

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

目的関数

$= x_1$制約式①$+ x_2$制約式②

$$w = 2y_1 + 2y_2 \geq \frac{2}{3}1 + \frac{2}{3}1 = \frac{4}{3}$$

双対問題

minimize

$w = 2y_1 + 2y_2$

subject to

$$\begin{array}{lllll} y_1 & +2y_2 & \geq & 1 & ① \\ 2y_1 & +y_2 & \geq & 1 & ② \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

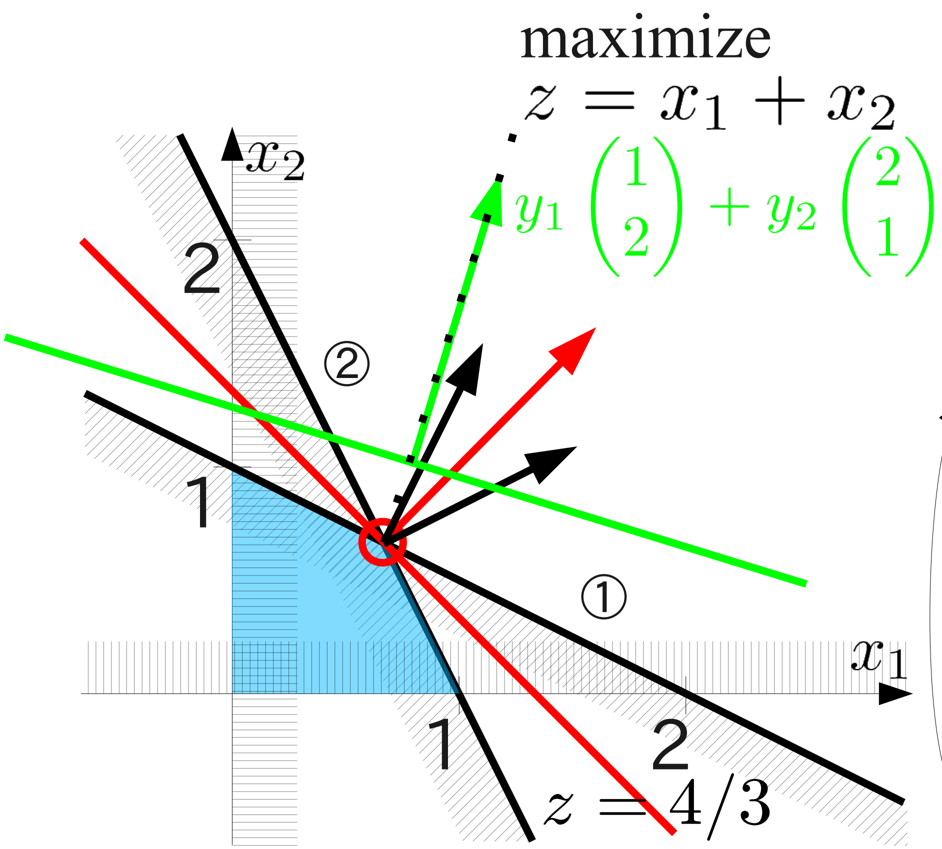
最適解

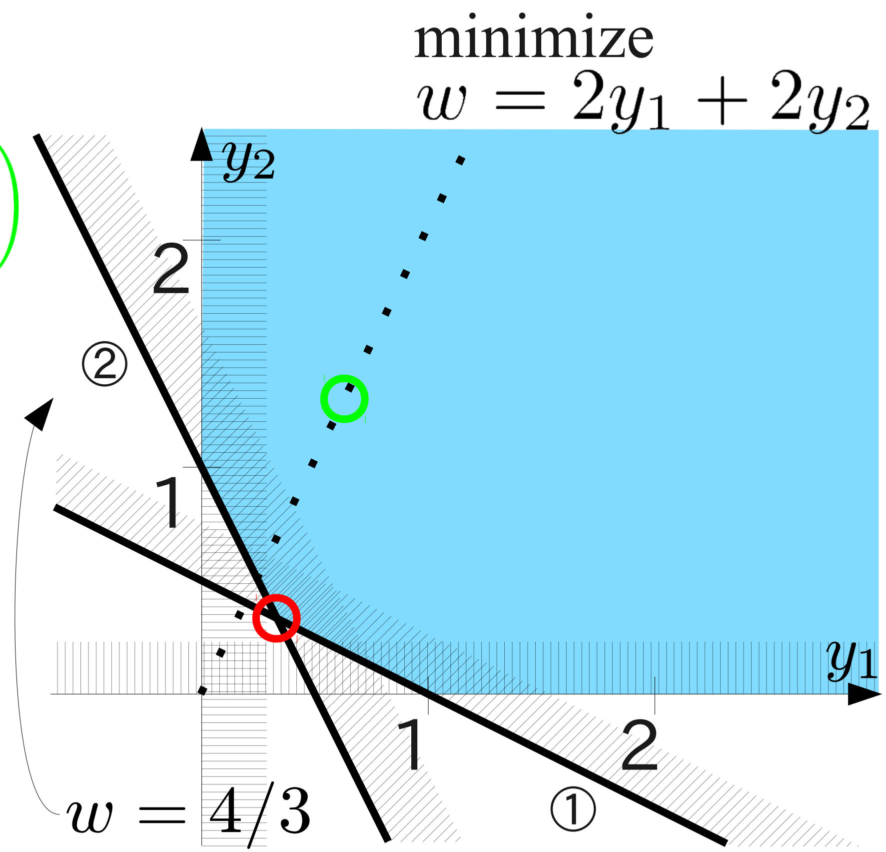
$$(w, y_1, y_2, t_1, t_2) = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0)$$

双対変数値と支持(超)平面

法線ベクトルの組合せで目的関数値に対する制限が決まる

⇒一番厳しい制限＝目的関数と同一法線





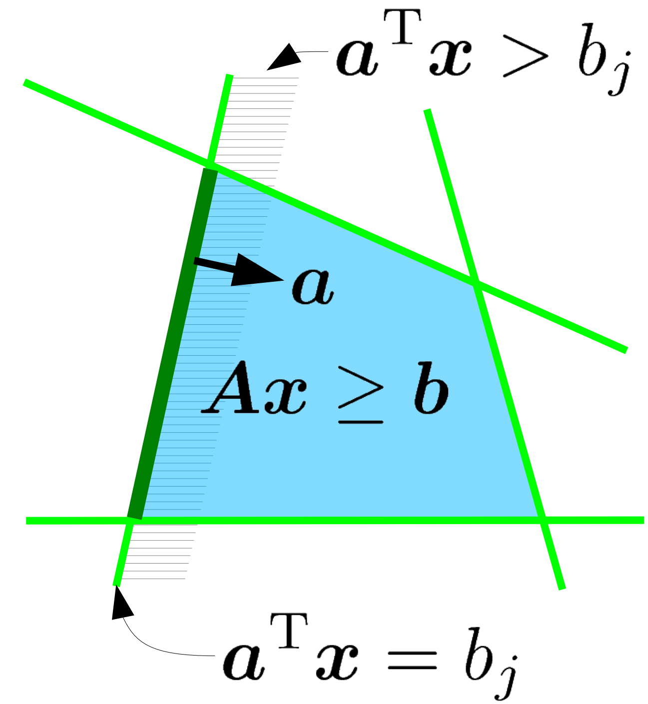
復習+α:線形計画問題と多面体

多面体:
　線形計画問題を考えるベクトル空間において、制約等式、不等式の定める領域、全ての制約を満たす多面体＝実行可能領域

(超)平面:
　(線形)制約等式を満たす点の集合

支持超平面:
　多面体を構成する不等式の一つが単独で構成する多面体の境界

面:
　多面体とその支持超平面の交わり



$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \vdots \\ b_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

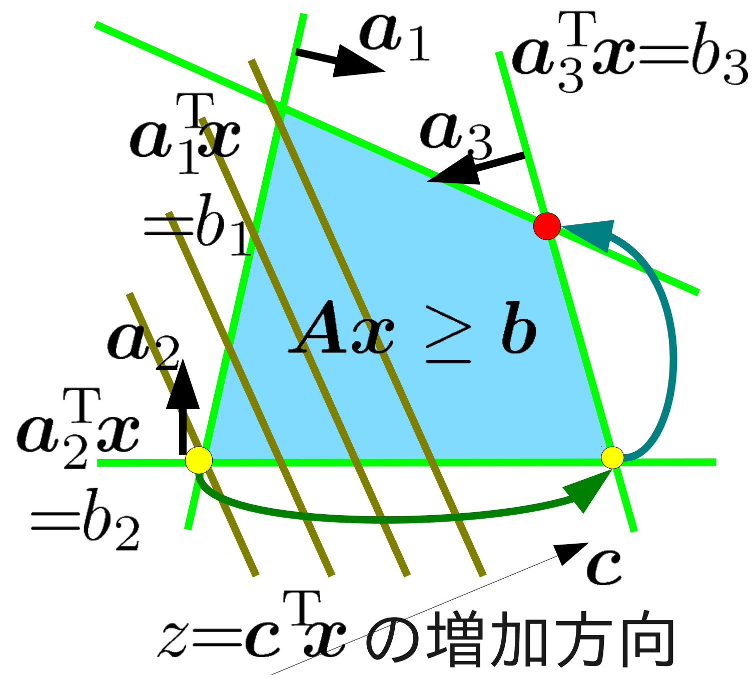
復習+α:線形計画問題と多面体

交点:
  複数の(超)平面の交わりのうち、点を成すもの

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}} \\ \vdots \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

多面体の頂点:
  支持(超)平面の成す交点

単体法の原理:
  目的関数が増加するように多面体の頂点を移動し、最適解を求める方法
  出発点となる頂点から頂点を構成する支持超平面を順番に入れ換えて目的関数を増加させる
  総当たり法よりも効率が良い?



内点法の原理

不等式標準形

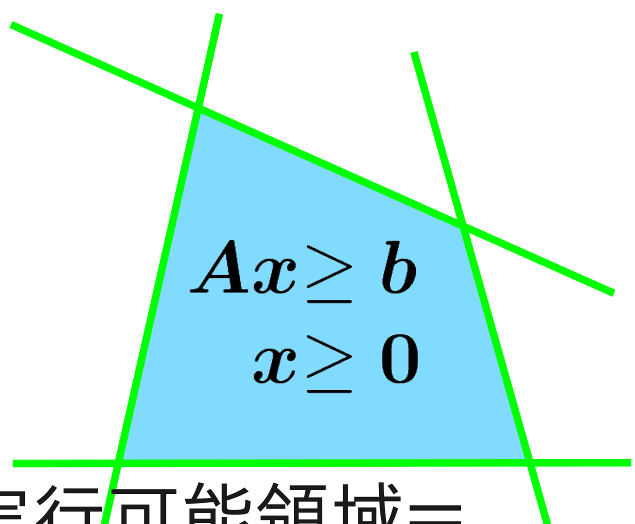
minimize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

subject to

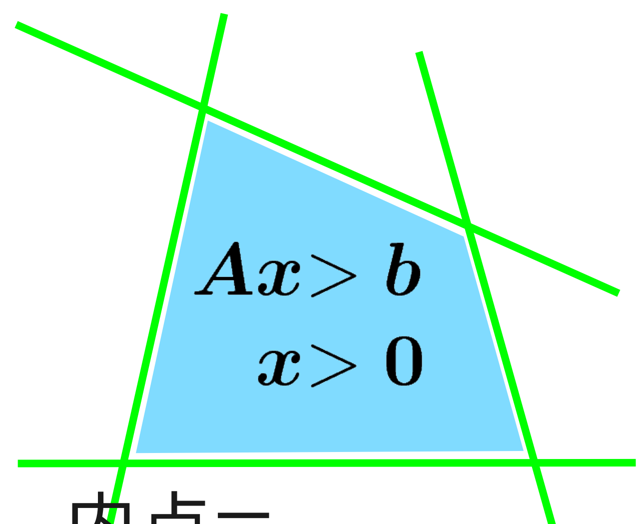
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

内点:
　不等式標準形の制約式から等号を除いた条件を満たす点を内点と呼ぶ



実行可能領域＝

$$\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$



内点＝

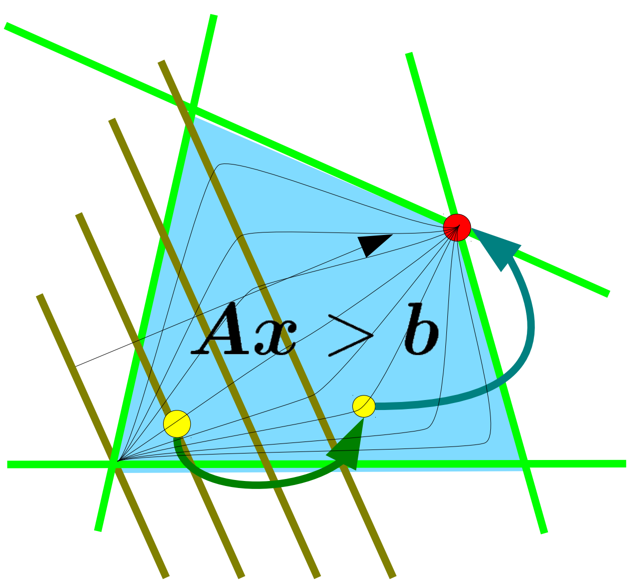
$$\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}\}$$

内点法の原理

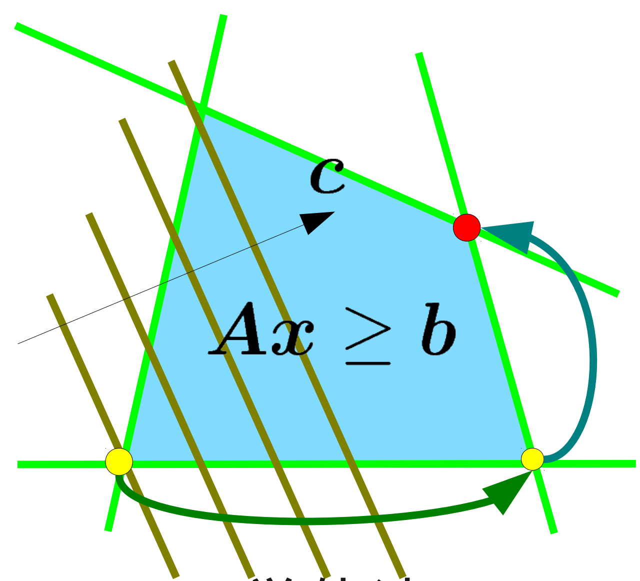
内点法の原理：
　内点領域中に最適解へ向かうベクトル場からなるう軌跡を作り、軌跡に沿って内点領域を通る経路を近似的に求める方法。

不等式標準形

minimize
$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
subject to
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$



内点法



単体法

内点法の原理

双対定理:

主問題･双対問題の実行可能解$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ において

$$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\text{が最適解} \Leftrightarrow \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

そこで、与えられた線形計画問題を「$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$」を実現する点$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^{m+n}$を求める問題に置き換えて考える

$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}$が主･双対問題の最適解でないとき、両者の目的関数には差がある、これを双対ギャップと呼ぶベクトルで評価する

内点法の原理

双対ギャップの導入

主問題	双対問題
minimize $z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}$	maximize $w=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ subject to $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}$

主問題	双対問題
minimize $z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{I}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}\geq\boldsymbol{0}$	maximize $w=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ subject to $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{I}\boldsymbol{t}=\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y},\boldsymbol{t}\geq\boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$が主・双対問題の最適解でないとき　$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$

$$0\leq\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$
$$=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}=(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}$$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{s}\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}$　　$\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}\geq\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c},$

内点法の原理

双対ギャップの導入

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{s}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}\qquad \boldsymbol{s},\boldsymbol{t}\geq\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c},$$

ベクトル$\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{s}\end{pmatrix}$を双対ギャップと呼ぶ

変数の非負性より目的関数差のゼロ点⇔双対ギャップのゼロ点

$$(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{s}\end{pmatrix}=0\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{s}\end{pmatrix}(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{0}$$

多変数の方程式を連立方程式に書き換えることができる

最適解を求める→双対ギャップのゼロ点を求める

内点法の原理

双対ギャップのゼロ点探索

最適解を求める→双対ギャップのゼロ点を求める

$$(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{s}\end{pmatrix}=0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{s}\end{pmatrix}(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})=\mathbf{0}$$

実行可能解である初期点$\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{s}_0,\boldsymbol{t}_0$を何らかの方法で定め

その近傍で関係式$(\boldsymbol{X}+\delta\boldsymbol{X})(\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}+\delta\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}})=\mathbf{0}$の解を一次近似式を緩和した式から反復法で求める;

$$\boldsymbol{X}\delta\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}+\delta\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}=\lambda\mathbf{1}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} \qquad \lambda\to 0$$

$$\boldsymbol{X}\equiv\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{s}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Y}\equiv\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{s}+\delta\boldsymbol{s})=\boldsymbol{b}\therefore\boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x}=\delta\boldsymbol{s}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{t}=\boldsymbol{c},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{t}+\delta\boldsymbol{t})=\boldsymbol{c}\therefore\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{y}=-\delta\boldsymbol{t}$$

復習:1変数Newton法のゼロ点探索

- 1変数の場合、初期点 $\tilde{x}$の近傍での Taylor 展開を考えて

$$f(x) = f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x-\tilde{x}) + \frac{1}{2}f''(\tilde{x})(x-\tilde{x})^2 + \ldots$$

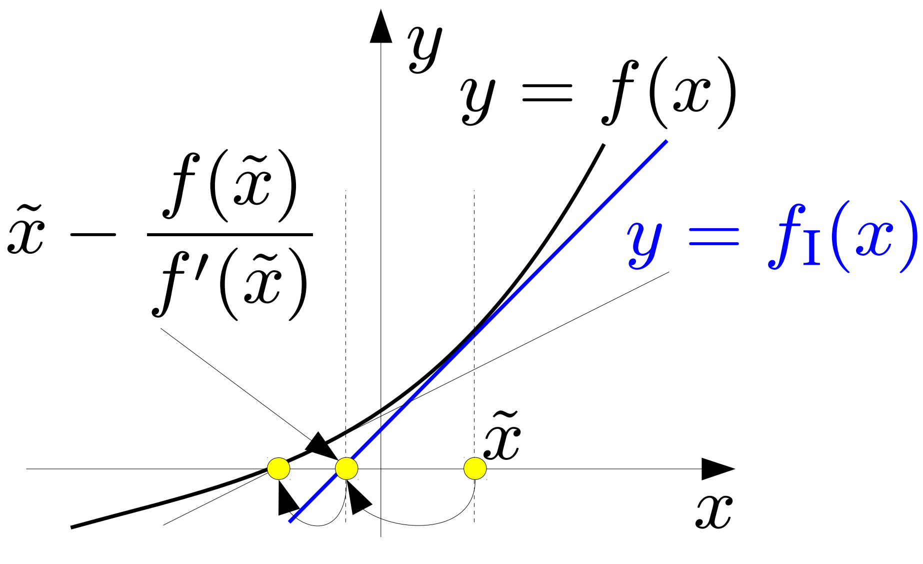
- 1次(=線形)近似を得る

$$f(x) \sim f_{\mathrm{I}}(x) = f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x-\tilde{x})$$

- 1次近似のゼロ点を求め

$$f_{\mathrm{I}}(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \tilde{x} - f(\tilde{x})/f'(\tilde{x})$$



- 求めた x を $\tilde{x}$ として①に戻る
(f(x)がゼロに近ければ終了)

多変数Newton法によるゼロ点探索

- 初期点 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 近傍での Taylor 展開を考えて同様に、

$$f(\boldsymbol{x}) = \tilde{f} + \sum_j \tilde{f}_{x_j}\delta_j + \frac{1}{2}\sum_{j,k}\tilde{f}_{x_j x_k}\delta_j\delta_k + \dots$$

$$\tilde{f} = f(\tilde{\boldsymbol{x}}), \tilde{f}_{x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\tilde{\boldsymbol{x}}), \tilde{f}_{x_j x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\tilde{\boldsymbol{x}}), \delta_j = x_j - \tilde{x}_j$$

一次近似: $f_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x}) = \tilde{f} + \sum_j \tilde{f}_{x_j}\delta_j = \tilde{f} + \tilde{\boldsymbol{f}}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}$

$$\tilde{\boldsymbol{f}}'^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\tilde{\boldsymbol{x}})\right), \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}} = (\delta_1, \dots, \delta_n)$$

$f_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x}) = 0$ より、$\tilde{f} + \tilde{\boldsymbol{f}}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta} = 0$ を解いて $\boldsymbol{\delta}$ を定める

反復公式: $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}$

自己双対型線形計画問題

次の不等式標準形で表わされる線形計画問題を
自己双対型線形計画問題と言う。
ここで、係数行列 $\boldsymbol{A}$ は歪対称行列。

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

自己双対型線形計画問題の双対問題を考える。

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & w = -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & w = -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & -\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

自己双対型線形計画問題の双対問題は主問題に一致する。

自己双対型線形計画問題

任意の線形計画問題を自己双対型線形計画問題に書き換えることができる。
与えられた不等式標準形をもとに、具体的に書き換えの方法を示す。

与えられた線形計画問題に対応して双対問題を考える。

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

次の自己双対型線形計画問題は元の問題の最適解を実行可能領域に持つ。

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + 0\tau \\ \text{subject to} & \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & A^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{c} \\ -A & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{b}^{T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \tau \end{pmatrix} \leq \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \tau \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & A^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{c} \\ -A & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{b}^{T} & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & -A^{\mathrm{T}} & (\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \\ (A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & (-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \\ (-\boldsymbol{c})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{b}^{T} & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & A^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{c} \\ -A & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{b}^{T} & 0 \end{pmatrix}$$

自己双対型線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + 0\tau \\ \text{subject to} & \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{c} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{b}^{T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \tau \end{pmatrix} \ge \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \tau \ge \boldsymbol{0} \end{array}$$

元の問題の最適解を $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 、その双対問題の最適解を $\tilde{\boldsymbol{y}}$ としたとき、
$\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y} = \tilde{\boldsymbol{y}}, \tau = 1$ が自己双対型問題の実行可能領域にあることは明らか。

逆に自己双対型問題の実行可能解を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \tau$ としたとき、
制約式より $\tau\boldsymbol{c} \le \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ 、$-\tau\boldsymbol{b} \le -\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ したがって、

$$\tau(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}) = (\tau\boldsymbol{c})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - (\tau\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \le (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 0$$

$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ なら弱双対定理より元の問題の最適解となる。
$\tau = 0$ ならば相補性定理より $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} > 0$ なので、$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0$
または $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} < 0$ となる。前者なら元の主問題が実行不能で後者なら双対問題が実行不能になる。

練習問題12

A4用紙を横に使って、左上に名前･学年･学籍番号を記入

課題1：次の線形計画問題を書換えて自己双対型線形計画問題を導きなさい。

minimize $z = x_1 + 2x_2$

subject to
$$
\begin{aligned}
& x_1 + x_2 \geq 4 \\
& x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

課題2：元の問題の最適解が求めた自己双対型線形計画問題の実行可能解になっていることを確認してください。

演習問題

主問題は2変数

minimize

$z = x_1 + 2x_2$

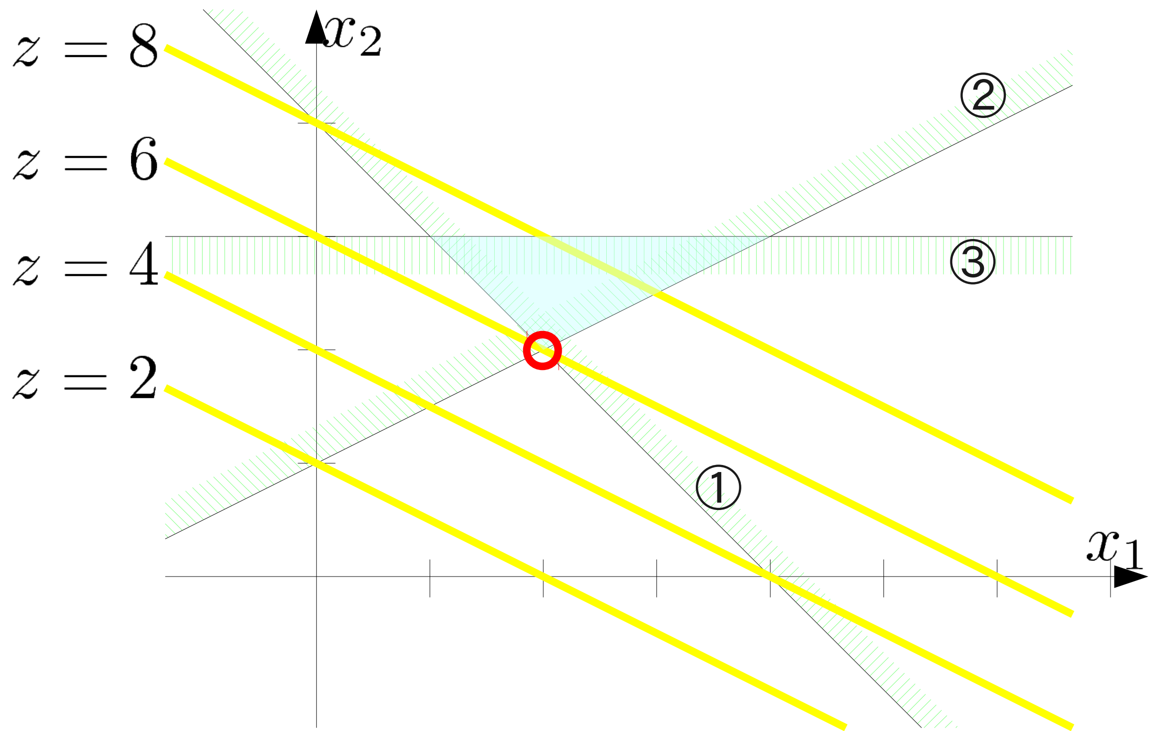
subject to

① $x_1 + x_2 \geq 4$

② $x_2 - 2x_2 + 2 \leq 0$

③ $x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$



最適解:

$$z = 6, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 1, x_1 = 2, x_2 = 2$$

演習問題

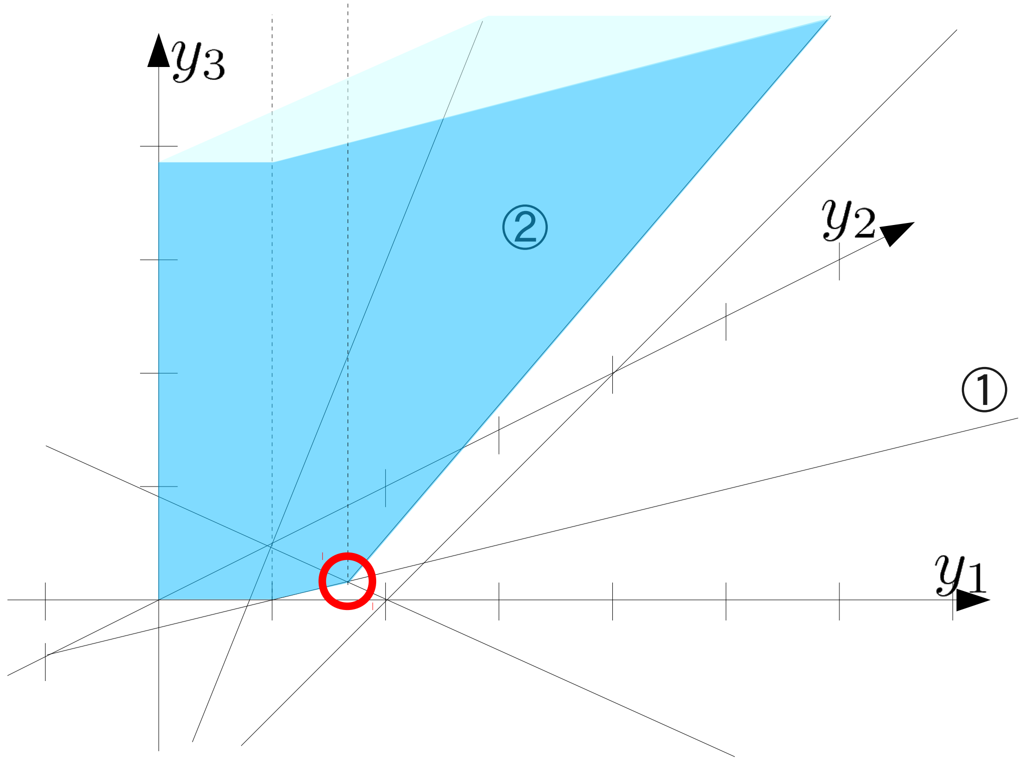
双対問題は3変数

$$\text{maximize}$$
$$w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3$$
$$\text{subject to}$$

① $y_1 - y_2 \leq 1$

② $y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$



最適解:

$$w = 6, y_1 = 4/3, y_2 = 1/3, y_3 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0$$